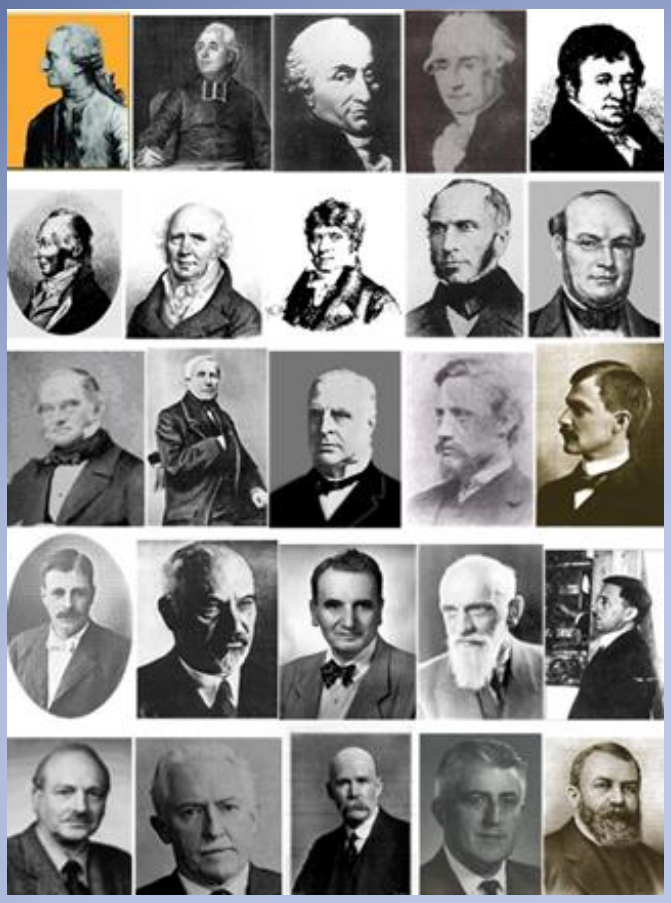
UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA

Programa de doctorado: Ingeniería Agraria, Alimentaria, Forestal y de Desarrollo Rural Sostenible



Tesis Doctoral

Historia, análisis y expresión gráfica de las fórmulas de pérdidas de carga utilizadas en la ingeniería hidráulica. History, analysis and graphic expression of the formulas of pressure losses used in hydraulic engineering.

Julián Monís Oquendo

Directores:

Prof. Doctor D. Rafael López Luque

Prof. Doctor D. Francisco Montes Tubio

Córdoba, febrero 2020

TITULO: *HISTORIA, ANÁLISIS Y EXPRESIÓN GRÁFICA DE LAS FÓRMULAS DE PÉRDIDAS DE CARGA UTILIZADAS EN LA INGENIERÍA HIDRÁULICA*

AUTOR: *Julián Ignacio Monís Oquendo*

© Edita: UCOPress. 2020
Campus de Rabanales
Ctra. Nacional IV, Km. 396 A
14071 Córdoba

https://www.uco.es/ucopress/index.php/es/
ucopress@uco.es

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA

Programa de doctorado: Ingeniería Agraria, Alimentaria, Forestal y de Desarrollo Rural Sostenible

Tesis Doctoral

Historia, análisis y expresión gráfica de las fórmulas de pérdidas de carga utilizadas en la ingeniería hidráulica

History, analysis and graphic expression of the formulas of pressure losses used in hydraulic engineering

Julián Monís Oquendo

Directores:

Prof. Doctor D. Rafael López Luque

Prof. Doctor D. Francisco Montes Tubio

Córdoba, febrero 2020

Dedico este trabajo a

Mi padre Julián

Que, como Educador, Jefe Nacional de Los Boys Scouts de Panamá, Ex Jesuista y, sobre todo, buen padre, supo inculcar en mi, con mucha paciencia, valores varios, entre ellos la disciplina, la fuerza de voluntad y la perseverancia para no rendirme jamás ante nada, ¡y que a lo largo de mi vida me ha ayudado muchísimo! desde aquí: gracias papá!

A mi madre Adela y a mamá Celeste por sus ánimos y rezos.

A mi hijo Julián por su apoyo moral y por ser mi inspiración para darle ejemplo.

A mi novia Rose Marie, que me ha acompañado y motivado en todo momento.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis directores de tesis D. Francisco Montes Tubio y D. Rafael López Luque por la dedicación, paciencia, persistencia y apoyo que han tenido a lo largo de este periplo, encauzándome a desarrollar lo mejor posible la presente Tesis Doctoral en todos los aspectos, con sus sabios consejos y directrices.

También mostrar mi agradecimiento a D. Manuel Torres, amigo y compañero de Aguas de Cordoba S.A y Profesor de Física Aplicada de la Universidad de Córdoba por sus ánimos y directrices técnicas en este trabajo.

Quiero agradecer también a Eva Duckstein, Mercedes Reeves Barrientos y a mi novia, compañera y amiga Rose Marie Senn por las traducciones efectuadas de la documentación en alemán e inglés al español.

A mis amigos de la infancia y juventud:

D. Willy Rechsteiner del Departamento de Informática de la Universidad de Florida por facilitarme documentación técnica de la Biblioteca de esa Universidad.

D. Joaquin Lora Carrasco y D. José Vicente Alvarez Pérez por aportar sabios consejos y documentación técnica.

TÍTULO DE LA TESIS: HISTORIA, ANÁLISIS Y EXPRESIÓN GRÁFICA DE LAS FÓRMULAS DE PÉRDIDAS DE CARGA UTILIZADAS EN LA INGENIERÍA HIDRÁULICA.

DOCTORANDO: JULIÁN MONÍS OQUENDO

INFORME RAZONADO DE LOS DIRECTORES DE LA TESIS

En esta tesis se revisa el contexto en el cual se desarrolla el nacimiento de la Hidráulica experimental y su posterior evolución hasta nuestros días. La tesis tiene como objetivo investigar la procedencia de las fórmulas de pérdidas de carga por fricción existentes, tanto en conducciones forzadas como a presión atmosférica, dentro de un marco histórico – evolutivo, analizando el desarrollo y la metodología utilizada en las experiencias que llevaron a concluir sus formulaciones, ya sea de forma experimental o racional.

En ella se expone e investiga desde los primeros experimentos realizados, los recursos utilizados ya sean de índole experimental o analíticos, y se analizan mediante aplicaciones informáticas los datos aportados por los investigadores estudiados para la determinación de sus leyes y fórmulas aportadas.

La evolución del estudio de las pérdidas de carga se ha realizado cronológicamente a partir de 1722 hasta los tiempos actuales a través de las aportaciones de los 26 investigadores más influyentes en este tema, resaltando lo significativo de cada uno, e indicando las conclusiones que han tenido más trascendencia y las que han sido desechadas a través del tiempo.

Por todo esto, consideramos que se trata de una tesis de gran calidad, que repasa desde sus inicios los cimientos en los que se apoya la hidráulica actual, y en particular el estudio del rozamiento del agua cuando circula por una conducción, de gran aplicabilidad en obras hidráulicasLas publicaciones que se aportan como indicio de calidad de la tesis son:

> Julián Ignacio Monís, Rafael López-Luque, Juan Reca, Juan Martínez. Multistage Bounded Evolutionary Algorithm to Optimize the Design of Sustainable Photovoltaic (PV) Pumping Irrigation Systems with Storage. Sustainability 2020, 12(3), 1026; https://doi.org/10.3390/su12031026. Factor de impacto: 2,801.

Por todo ello, se autoriza la presentación de la tesis doctoral.

Córdoba, 10 de febrero de 2.020

Firma de los directores

Fdo.: RAFAEL LÓPEZ LUQUE

Fdo.: FRANCISCO MONTES TUBIO

RESUMEN

La pérdida de carga en una tubería o canal es la pérdida de presión que ocurre en un fluido debido a la fricción de las partículas del fluido entre sí y contra las paredes de la tubería que conduce. Las pérdidas pueden ser continuas, a lo largo de conductos regulares y localizados, debido a circunstancias particulares, como un estrechamiento, un cambio de dirección, la presencia de válvulas, codos, etc.

A lo largo de la historia, se han construido muchas instalaciones hidráulicas, y la eficacia y eficiencia de las redes de suministro y los acueductos que están disponibles desde la época de los romanos son sorprendentes. El concepto de flujo de agua aún no estaba vigente, sin embargo, lograron el concepto de sección y pendiente de una conducción, pero sin relacionarlos con ninguna otra magnitud. La primera referencia a este respecto es la registrada en 1712 por la Academia de Ciencias de París. Desde ese momento hasta hoy, varios investigadores han desarrollado sus fórmulas y leyes para calcular las pérdidas de carga por fricción en tuberías y canales.

En esta tesis doctoral, se pretende investigar las conclusiones a las que llegaron estos investigadores, así como sus teorías desarrolladas, teniendo en cuenta las bases conceptuales que se utilizaron y, finalmente, su utilidad práctica y precisión. Se han estudiado principalmente los conducciones a presión forzada, sin embargo, algunas fórmulas también son válidas para las conducciones a la atmósfera libre.

Los investigadores más representativos han sido seleccionados. La mayoría de ellos son representativos de las Escuelas de Hidráulica francesas y alemanas y fueron quienes finalmente llegaron a las fórmulas más modernas y exactas.

ABSTRACT

The loss of load in a pipe or channel is the loss of pressure that occurs in a fluid due to the friction of the particles of the fluid with each other and against the walls of the pipe that leads. Losses can be continuous, along regular, localized conduits, due

to particular circumstances, such as a narrowing, a change of direction, presence of a valves, kinks, etc.

Throughout history, many hydraulic facilities have been built, and the effectiveness and efficiency of the supply networks and aqueducts that are available from the time of the Romans are surprising. The concept of water flow was not yet in force, however they managed the concept of section and slope of a conduction but without relating them to any other magnitude.

The first reference in this regard is the one registered in 1712 by the Paris Academy of Sciences. Since that moment until today several researchers have developed their formulas and laws to calculate the losses of friction load in pipes and channels.

In this doctoral thesis, it is intended to investigate the conclusions these researchers reached as well as their theories were developed, considering the conceptual bases that were used and finally their practical utility and precision. Mainly forced pressure conduits have been studied nevertheless some formulas are also valid for free atmospherics conduits.

The most representative researchers have been selected. Most of them are representative of the French and German Schools of Hydraulics and they were who finally got to the most modern and exact formulas.

CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

1. INTRODUCCIÓN

La capacidad de transporte de una conducción ya sea esta una tubería o un canal reviste gran importancia tecnológica y económica. En el primer caso por la necesidad de dar un servicio eficiente en lo concerniente a un abastecimiento de aguas, por poner el ejemplo más relacionado al respecto, y en el segundo caso, la economía, tanto en la utilización de los materiales de las conducciones como en el aspecto energético, a la hora por ejemplo de seleccionar la sección óptima de una conducción de impulsión en una estación elevadora de agua, cuya repercusión en la facturación de electricidad es directa.

En definitiva, lo que determina en mayor parte el que una instalación sea eficiente, ya sea de conducciones forzadas o a presión atmosférica es la utilización de lo que se denomina en ingeniería hidráulica el cálculo de las pérdidas de carga.

Ante todo, conviene definir ¿qué es lo que se entiende por pérdida de carga? La pérdida de carga en una tubería o canal, es la pérdida de presión en un fluido debido a la fricción de las partículas del fluido entre sí y contra las paredes de la tubería que las conduce. Las pérdidas pueden ser continuas, a lo largo de conductos regulares, o accidentales o localizadas, debido a circunstancias particulares, como un estrechamiento, un cambio de dirección, la presencia de una válvula, etc.

Se puede decir que el primero en realizar experimentos sobre las pérdidas de energía en la circulación de agua por tuberías fue *C.A. Couplet* en el año 1712.

Los trabajos realizados a partir de dicha fecha hasta nuestros días han sido innumerables, en la que se recogen muchas fórmulas, la mayor parte de ellas experimentales, para determinar la velocidad de circulación del agua en una conducción, cuyo valor tan importante va ligado al no menos importante denominado en hidráulica “pérdida de carga”.

Con la presente tesis se busca hacer un recorrido para satisfacer las necesidades de conocer cada una de estas fórmulas, al menos las más utilizadas, para saber en qué tipo de régimen son las más adecuadas, con qué tipo de materiales se deben utilizar dada sus limitaciones para algunas de ellas, cuales han sido desechadas para su utilización y que tipo de herramientas se utilizan en su cálculo.

Para ello, se hace un recorrido histórico, analizando en una primera fase las bases científicas en las que se apoyaron los investigadores para llegar a concluir las primeras fórmulas empíricas desde *Couplet* (1712) hasta *Darcy* (1857).

En esta primera etapa se hicieron diversos experimentos de los que se dedujeron algunas leyes generales de la circulación forzada a través de tuberías, y fue *Darcy* quien dedujo la influencia que tenían las superficies de las conducciones sobre las pérdidas de carga. Esta afirmación fue fundamental para continuar con las investigaciones posteriores que se llevaron a cabo por diferentes investigadores para concluir con la segunda etapa, pero fue *Osborne Reynolds* con su publicación en 1883 quien marcó un nuevo hito de una manera científica, al reconocer la existencia de los flujos laminar y turbulento, fijar los límites para pasar de uno a otro y apoyarse en el análisis dimensional para proponer una fórmula racional que expresara la resistencia al flujo en las conducciones.

Posteriormente *Blasius* en 1913 y *Staton* en 1914 relacionaron el coeficiente de fricción f, de la fórmula de *Weisbach-Darcy* con el número de *Reynolds* y la rugosidad de la tubería, por lo que se inicia una nueva etapa en el análisis racional de las pérdidas de carga en las conducciones y en la cual se empiezan a ser representadas por los llamados diagramas de *Stanton* que consisten en gráficos doble logarítmicos, que posteriormente fueron perfeccionados por *Rouse* y *Moody*.

Hoy en día, el gran desarrollo experimentado en la informática ha ayudado a resolver redes muy complejas, ya sean ramificadas, malladas o mixtas, en las que con suma facilidad arrojan en sus resultados las pérdidas de carga que tiene cada conducción, y casi siempre apoyándose en las fórmulas de *Manning*, *Darcy-*

Weisbach, *Prandl-Colebrook*, *Hazen-Williams*, etc., que fueron surgiendo después, tanto para conducciones forzadas como libres.

2. OBJETIVOS

2.1 Objetivos generales

- Investigar la procedencia de las fórmulas de pérdidas de carga por fricción existentes, tanto en conducciones forzadas como a presión atmosférica, dentro de un marco histórico – evolutivo, analizando el desarrollo y la metodología utilizada en las experiencias que llevaron a concluir sus formulaciones, ya sea de forma experimental o racional.
- Comparar las fórmulas según el grado de error que se comete al utilizarlas y analizar cómo afectan estas diferencias a la pérdida de energía de una instalación.
- Redactar un documento que sirva de consulta y de prontuario de cálculo.

2.2 Objetivos específicos

- Investigar en profundidad desde los primeros experimentos realizados, los recursos que se utilizaron ya sean experimentales o analíticos, analizando los procedimientos utilizados en cada caso y época en particular, y en los casos en los que corresponda, analizar y procesar los datos aportados con aplicaciones informáticas que corroboren o den más información que la aportada en su día.
- Determinar el grado de aproximación a los casos reales, estudiando los errores que se cometen al utilizar las distintas fórmulas de pérdidas de carga en una misma situación y definir la más adecuada en cada caso.
- Realizar un análisis del modo de empleo, ya sea matemáticamente, por nomogramas y gráficos.

3. ANTECEDENTES

Existe una extensa y variada bibliografía relacionada con la Hidráulica en la que se muestran las fórmulas más utilizadas de pérdidas de carga, dentro de un marco didáctico y de utilidad en la Ingeniería Hidráulica para resolver diversos problemas, en su mayoría de abastecimiento de aguas a poblaciones y alcantarillado para drenar las aguas negras y de lluvia, en la que siempre interviene el factor de pérdidas de carga, para diseñar adecuadamente las secciones de las conducciones en ambos tipos de sistemas. En definitiva, la gran mayoría, enfocada a un sentido práctico con una base teórico-práctica lo suficientemente extensa para salir adelante con el firme objetivo de resolver los problemas hidráulicos que se puedan suscitar.

Detrás de toda esta información existente para resolver hoy en día dichos problemas ingenieriles, dentro de la Hidráulica, se esconde detrás una amplia historia de muchos investigadores que han aportado en mayor o menor grado su granito de arena con sus experiencias, sus fórmulas, sus reflexiones, en la que han despertado curiosidad y dudas en las siguientes generaciones de investigadores, aportando, afirmando y desechando normas, leyes, fórmulas hasta conformar lo que hoy en día es, una Hidráulica avanzada, apoyada en múltiples programas informáticos para facilitar los cálculos de diversa índole dentro del campo en cuestión.

De entre los trabajos más destacados que han aportado una visión histórica desde los primeros investigadores hasta bien avanzado el siglo XX, se tiene el del Doctor en Ciencias Técnicas, Ingeniero Hidráulico y Profesor Titular del Centro de Investigaciones Hidráulicas del Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverria de la ciudad de La Habana, Don Diosdado Pérez Franco, quien ha escrito dos artículos muy relacionados con la presente tesis:

- EVOLUCIÓN HISTÓRICA DE LAS FÓRMULAS PARA EXPRESAR LAS PÉRDIDAS DE CARGA EN TUBERÍAS. Primera parte: Desde los experimentos de Couplet hasta los de Darcy (Pérez Franco, 2001).

- EVOLUCIÓN HISTÓRICA DE LAS FÓRMULAS PARA EXPRESAR LAS PÉRDIDAS DE CARGA EN TUBERÍAS. Segunda parte: Desde los trabajos de Darcy hasta los de Stanton (Pérez Franco, 2002).

En ambos artículos describe de forma resumida y sustancial los trabajos realizados por los investigadores que han trabajado en el tema, desde *Couplet* (1712) pasando por *Darcy* cuando publicó su obra "*Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux*" en 1857, en la que resalta que con estos trabajos se reconoce por primera vez, la influencia que tiene el estado de las superficies interiores de los conductos, sobre las pérdidas de carga.

Hace un resumen de los investigadores más relevantes de la Escuela de Hidráulica Europea, en especial la francesa y alemana, en el que exponen en sus experiencias el número de tuberías, diámetros, material y longitudes empleadas y las fórmulas propuestas, producto de dichas experiencias.

4. MATERIALES Y MÉTODOS

4.1 Materiales

En el presente trabajo de investigación se realiza un estudio de las posibles publicaciones sobre los primeros investigadores que hayan contribuido a desarrollar fórmulas, leyes técnicas, teorías sobre pérdidas de carga por fricción en conducciones. Para ello se ha indagado en bibliotecas virtuales de libros antiguos, algunos incluso se han adquirido en el mercado de libros antiguos por la dificultad de encontrarlos en dichas bibliotecas "on line".

Bibliotecas consultadas

Las bibliotecas más consultadas para la recopilación de documentación relacionada con el tema han sido:

- **Biblioteca virtual realizada por La Universidad Grenoble Alpes.**
  Fue una universidad francesa, fundada en 1339 en la ciudad de *Grenoble*, Francia, y suspendida en 1793. Actualmente reformada y activa.
  La dirección web es la siguiente: http://hydraulica.grenet.fr/items.

  Aquí en esta biblioteca se encuentra prácticamente la mayoría de la bibliografía de los investigadores en materia de Hidráulica de la antigua Escuela Francesa de Hidráulica del siglo XVIII.

- **The Internet Archive.**
  Es una organización sin fines de lucro, está construyendo una biblioteca digital de sitios de Internet y otros artefactos culturales en forma digital. Al igual que una biblioteca en papel, brinda acceso gratuito a investigadores, historiadores, académicos, personas con dificultades para acceder al texto impreso y al público en general. Su misión es proporcionar acceso universal a todos los conocimientos. Esta biblioteca tiene acceso a más de 20 años de historial web a través de Wayback Machine y trabaja con más de 450

bibliotecas y otros socios a través de nuestro programa *Archive-It* para identificar páginas *web* importantes. Se pueden encontrar libros antiguos de diversas disciplinas, que han sido escaneados incluso en su primera edición. En ingeniería hidráulica se han encontrado muchos autores franceses, ingleses, norteamericanos que han escrito sobre el tema.

La dirección web es la siguiente: https://archive.org/about/

- **Biblioteca Marston Science Library, University of Florida, Assistant University Librarian Chemistry, Chemical Engineering, and Materials Science & Engineering.**

- **Biblioteca de la empresa Aguas de Córdoba (EMPROACSA: Empresa Provincial de aguas de Córdoba).**

  El que suscribe la presente tesis, tiene 30 años de experiencia en el Departamento de ingeniería de Estudios, Proyectos y Obras de dicha empresa como proyectista y en menor grado como Director de Obras, en el que se han realizado alrededor de unos 900 proyectos relacionados con el agua, para abastecimiento y saneamiento. La empresa consta de una gran biblioteca relacionada con la Hidráulica, que ha servido de base para diversas consultas relacionadas con la temática desarrollada. El desarrollo de dichos proyectos y estudios se apoya en una gran dosis teórico – práctica, en el que se han utilizado aplicaciones de software de hidráulica, ábacos, hojas de cálculo, aplicación de fórmulas, sin ahondar más allá de su procedencia y fundamento, sino que solo se han utilizado con fines prácticos si más. Todo ello ha sido motivo de inspiración para desarrollar la presente tesis doctoral, la curiosidad de su procedencia, como se han llegado a utilizar dichas fórmulas a través del tiempo, cuando dejaron de tener vigencia, que historia se esconde detrás de ellas y muchas otras incógnitas por resolver.

  El que suscribe también ha tenido el privilegio de tener en dicha empresa a expertos a los que se les ha realizado consultas directas, entre ellos se

encuentra el Dr. Ingeniero Manuel Torres Roldán, compañero de ese Departamento, Profesor de física en la UCO (Universidad de Córdoba).

La bibliografía de la que consta la biblioteca de Emproacsa es muy extensa y variada en sus contenidos, por lo que señalaré tan solo algunas de las más importantes consultadas en mayor o menor medida para el desarrollo de la presente tesis doctoral:

- ✓ Colección de Obras Hidráulicas (17 volúmenes), dirigida por Manuel Mateos de Vicente, (Dr. Ing. De Caminos, C y P, Ingeniero de Obras Públicas, PhD Master of Science en la Iowa State University, Professional Engineer Civil en EE.UU.
- ✓ Tuberías. Tomo 1: Materiales, cálculos hidráulicos, cálculos mecánicos. J. Mª. Mayol (Mallorquí, 1981).
- ✓ Tuberías. Tomo 2: Instalación de conducción, distribución y saneamiento. Aplicaciones por ordenador. J. Mª. Mayol (Mallorquí, 1983).
- ✓ Ingenieria Hidráulica aplicada a los sistemas de distribución de agua. Volumen 1. Cabrera E. Espert. UD Mecanica de fluidos de la Universiodad Politecnica de Valencia (Cabrera, 1996).

Dentro del diseño de las instalaciones proyectadas, se han realizado multitud de ellas, de las cuales posteriormente han sido constatados los cálculos hidráulicos con lo observado en la realidad. En la mayoría de estas obras diseñadas ha estado implicado el cálculo de las pérdidas de carga con las fórmulas adecuadas. Dentro de esta experiencia, se han diseñado conducciones que van de depósito a depósito, de depósito a red de distribución municipal, bombeos para elevar el agua a un determinado depósito, y dentro de lo complejo, la modelización de redes municipales. Toda esta experiencia ha servido para estudiar con carácter más crítico cada fórmula investigada.

De entre los libros antiguos más importantes y en lengua extranjera, consultados para el desarrollo de esta tesis se tiene:

- *Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux. (Henry Darcy - 1857).* Investigación experimental en el movimiento del agua en tubos (Darcy, 1857).

RECHERCHES EXPÉRIMENTALES

AU MOUVEMENT DE L'EAU

DANS LES TUYAUX,

PAR HENRY DARCY,

PARIS,

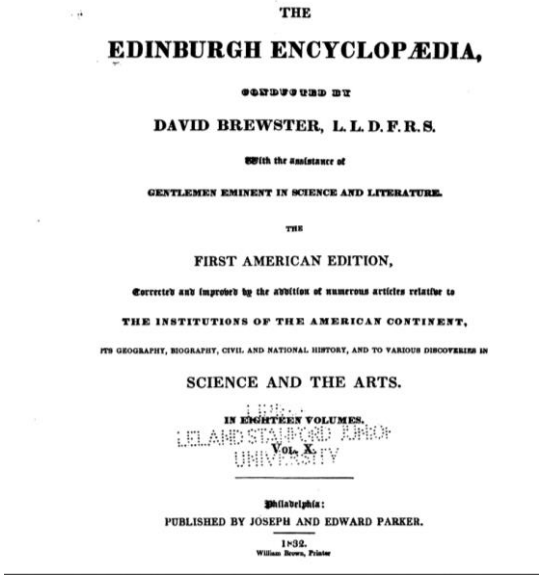
MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Augustins, 55.

1857.

Ilustración 1. Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux.

- *The Edinburgh Encyclopedia. David Brewster, LLDFRS.(1832) First american edition. Vol. X of XX* (Brewster, 1832) .



THE

EDINBURGH ENCYCLOPÆDIA,

CONDUCTED BY

DAVID BREWSTER, L. L. D. F. R. S.

With the assistance of

GENTLEMEN EMINENT IN SCIENCE AND LITERATURE.

THE

FIRST AMERICAN EDITION,

Corrected and improved by the addition of numerous articles relative to

THE INSTITUTIONS OF THE AMERICAN CONTINENT,

ITS GEOGRAPHY, BIOGRAPHY, CIVIL AND NATIONAL HISTORY, AND TO VARIOUS DISCOVERIES IN

SCIENCE AND THE ARTS.

IN EIGHTEEN VOLUMES.

VOL. X.

Philadelphia:

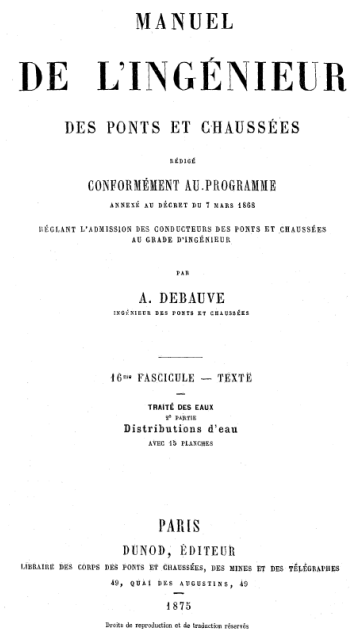
PUBLISHED BY JOSEPH AND EDWARD PARKER.

1832.

William Brown, Printer

Ilustración 2. The Edinburgh Encyclopedia.

- *Manuel de l'ingénieur des Ponts et chaussés. A. Devauve. 16 fascicule – texte traité des eaux 2 partie distributi.ons d'eau. 1875 Paris* (Debaube, 1875).



MANUEL

DE L'INGÉNIEUR

DES PONTS ET CHAUSSÉES

RÉDIGÉ

CONFORMÉMENT AU PROGRAMME

ANNEXÉ AU DÉCRET DU 7 MARS 1868

RÉGLANT L'ADMISSION DES CONDUCTEURS DES PONTS ET CHAUSSÉES AU GRADE D'INGÉNIEUR

PAR

A. DEBAUVE

INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES

16me FASCICULE — TEXTE

TRAITÉ DES EAUX

2e PARTIE

Distributions d'eau

AVEC 15 PLANCHES

PARIS

DUNOD, ÉDITEUR

LIBRAIRE DES CORPS DES PONTS ET CHAUSSÉES, DES MINES ET DES TÉLÉGRAPHES

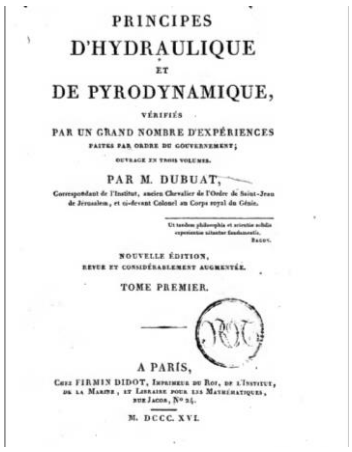
49, QUAI DES AUGUSTINS, 49

1875

Droits de reproduction et de traduction réservés

Ilustración 3. Manuel de l'ingénieur des Ponts et chaussés. A. Devauve.

- *Principes d'hydraulique et de pyrodynamique. M. Dubuàt. Nouvelle édition, revue et considérablement augmentee. Tome premier. M. DCCC. XVI.Paris* (Dubuat, MDCCCXVI (1816)).



PRINCIPES

D'HYDRAULIQUE

ET

DE PYRODYNAMIQUE,

VÉRIFIÉS

PAR UN GRAND NOMBRE D'EXPÉRIENCES

FAITES PAR ORDRE DU GOUVERNEMENT;

OUVRAGE EN TROIS VOLUMES.

PAR M. DUBUAT,

Correspondant de l'Institut, ancien Chevalier de l'Ordre de Saint-Jean de Jérusalem, et ci-devant Colonel au Corps royal du Génie.

Ut tardem philosophia et scientiæ solida experientiæ nitantur fundamentis.

BACON.

NOUVELLE ÉDITION,

REVUE ET CONSIDÉRABLEMENT AUGMENTÉE.

TOME PREMIER.

A PARIS,

CHEZ FIRMIN DIDOT, IMPRIMEUR DU ROI, DE L'INSTITUT, DE LA MARINE, ET LIBRAIRE POUR LES MATHÉMATIQUES, RUE JACOB, N° 24.

M. DCCC. XVI.

Ilustración 4. Principes d'hydraulique et de pyrodynamique.

Para su comprensión se han utilizado traductores.

Equipo informático y programas utilizados

Equipo informático

El equipo utilizado para escribir tesis, apoyarme en software para resolución de ejemplos dentro de la redacción es el siguiente:

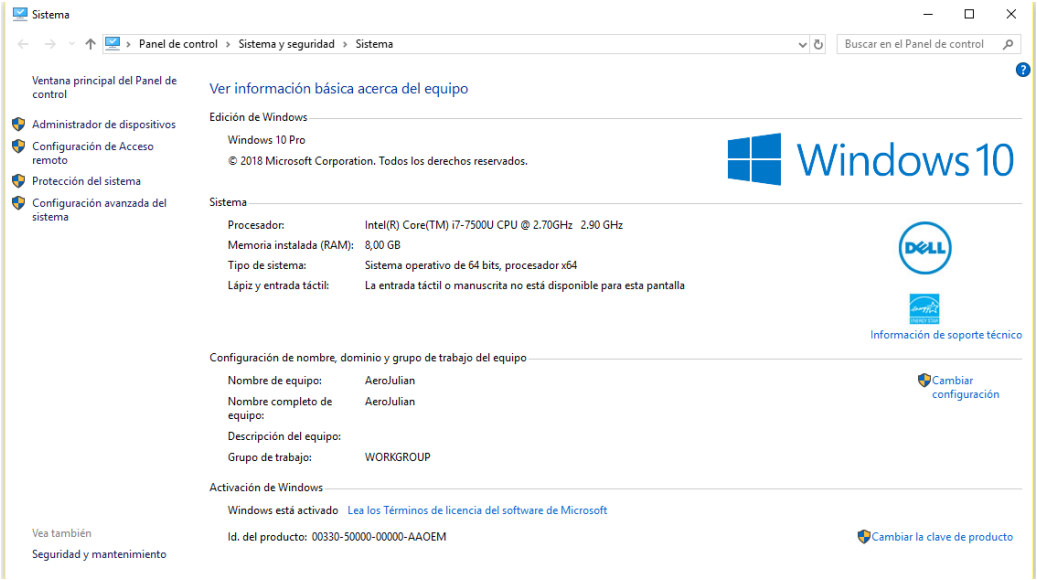


Ilustración 5. Caracteristicas del ordenador utilizado.

Programas utilizados

EPANET

Es un *software* libre, desarrollado por la EPA (Agencia de Protección Ambiental de los Estados Unidos), que realiza simulaciones del comportamiento hidráulico y de la calidad del agua en redes de tuberías a presión. Está diseñado para el uso con sistemas de distribución de agua potable, aunque en general puede ser utilizado para el análisis de cualquier fluido no compresible con flujo a presión.

HEC-RAS (Hydrological Engineering Center – River Analysis System)

Es un programa de modelización hidráulica unidimensional compuesto por 4 tipos de análisis en ríos:

- Modelización de flujo en régimen permanente
- Modelización de flujo en régimen no permanente
- Modelización del trasporte de sedimentos
- Análisis de calidad de aguas

Nos permite simular flujos en cauces naturales o canales artificiales para determinar el nivel del agua, por lo que su objetivo principal es realizar estudios de inundabilidad y determinar las zonas inundables.

ZWCAD

Es una aplicación informática de diseño asistido por ordenador (CAD) para diseño y dibujo técnico en 2D y 3D, desarrollado por la empresa ZWCAD SOFTWARE CO., LTD, una corporación de la República de China con sede en Guangzhou, China. Actualmente este sistema cuenta con más de 550,000 usuarios, incluyendo corporaciones internacionales de prestigio como Honda, Alstom, Siemens, Philips, Ericsson, Panasonic, Colgate, Bosch y otros.

SketchUp (anteriormente Google SketchUp)

Es un programa de diseño gráfico y modelado en tres dimensiones (3D) basado en caras. Para entornos de arquitectura, ingeniería civil, diseño industrial, diseño escénico, GIS, videojuegos o películas. Es un programa desarrollado por *@Last Software*, empresa adquirida por *Google* en 2006 y finalmente vendida a *Trimble* en 2012.

4.2 Metodología

El planteamiento para la recogida de información se basó en que había que confeccionar una lista por orden cronológico de los investigadores que realizaron sus experiencias y aportaron sus conclusiones plasmadas en leyes, fórmulas, relacionadas con las pérdidas de carga en conducciones, es decir a partir de las primeras investigaciones hasta la actualidad.

Se empezó por el primer periodo definido como “Desde los experimentos de Couplet hasta los realizados por Darcy”.

Se buscaron libros antiguos, revistas de divulgación, sitios web relacionados con el tema y sus correspondientes en las bibliotecas señaladas anteriormente. En concreto se adquirieron dos libros en el mercado de libros antiguos, uno de *H. Darcy* en francés y el otro de *Reinhard Woltman* en idioma alemán, que tuvieron que ser traducidos.

Tambien se encontró abundante información en inglés que también se tuvo que traducir al español.

Con toda esa información se procedió a la organización y clasificación para su posterior análisis y conclusiones definitivas.

En esta primera etapa la dificultad era la de encontrar bibliografía antigua sobre los investigadores de esta, y, por otro lado, interpretar correctamente las traducciones realizadas del francés, alemán y inglés, dado su árido contenido.

Concretamente el libro escrito por *Reinhard Woltman*, *Beiträge zur hydraulishchen architectur I* (Contribuciones a la Hidráulica I), se adquirió en el mercado de libros antiguos, su letra era gótica en alemán antiguo y tuvo que ser traducido parcialmente en la parte que interesaba por una experta traductora alemana (Dña. *Eva Duckstein*).

Se analizó toda la información y se llegó a la obtención de las conclusiones que cada investigador había realizado.

La información relacionada con el segundo periodo fue más acequible, debido a que había mucha más información en español y en inglés. Se procedió de la misma manera que en el primer periodo.

4.3 Teoría de la circulación de fluidos en tuberías

4.3.1 Introducción

Antes de empezar a desarrollar la investigación que acontece, se dará en este capítulo un repaso de los conceptos fundamentales utilizados en la Hidráulica en general.

En la mayor parte de los casos, en los que se debe abordar el diseño de un sistema de redes de abastecimiento de agua mediante el transporte por redes de tuberías o por canalizaciones a la atmósfera, intervienen en su cálculo las denominadas pérdidas de carga, cuyo cálculo debe realizarse cuando el líquido fluye por las conducciones, válvulas, piezas especiales (codos, tes, bifurcaciones, reducciones, etc).

El comportamiento de este fluido en su trayectoria con respecto a las distintas variables encontradas son las que determinan si dicho diseño es deseable con respecto al servicio que se quiere prestar. Para ello ha de seleccionarse la sección óptima, que en el caso de una conducción por gravedad deberá ser la mínima para reducir el costo de la instalación, y en el caso de un bombeo el conducto deberá tener una sección grande óptima para reducir la fricción y por lo tanto la potencia a generar en dicha elevación, que al final se traduce en costes de energía eléctrica.

La mayor parte de las fórmulas para pérdidas de carga son empíricas y limitadas, en función de las condiciones del experimento del cual fueron deducidas.

4.3.2 Fluidos

Se denomina fluido a un tipo de medio continuo formado por alguna sustancia entre cuyas moléculas sólo hay una fuerza de atracción débil. Es por ello por lo que se suele deformar continuamente cuando se somete a un esfuerzo cortante. La propiedad definitoria es que los fluidos pueden cambiar de forma sin que aparezcan en su seno fuerzas restitutivas tendentes a recuperar la forma "original" (lo cual

constituye la principal diferencia con un sólido deformable, donde sí hay fuerzas restitutivas); el término engloba a los líquidos y los gases .

4.3.2.1 Clasificación

Los fluidos se pueden clasificar de acuerdo con sus diferentes características, en función con el comportamiento viscoso que presentan en:

- **Fluidos perfectos o superfluidos:**
  El superfluido es un estado de la materia caracterizado por la ausencia total de viscosidad (lo cual lo diferencia de una sustancia muy fluida, la cual tendría una viscosidad próxima a cero, pero no exactamente igual a cero), de manera que, en un circuito cerrado, fluiría interminablemente sin fricción.
- **Fluidos newtonianos:**
  Un fluido newtoniano es un fluido cuya viscosidad puede considerarse constante en el tiempo. Los fluidos newtonianos son uno de los fluidos más sencillos de describir. La curva que muestra la relación entre el esfuerzo o cizalla contra su velocidad de deformación es lineal. El mejor ejemplo de este tipo de fluidos es el agua en contraposición al pegamento, la miel o los geles y sangre que son ejemplos de fluido no newtoniano.
- **Fluidos no newtonianos**
  Un fluido no newtoniano es aquel fluido cuya viscosidad varía con la temperatura y la tensión cortante que se le aplica. Como resultado, un fluido no newtoniano no tiene un valor de viscosidad definido y constante, a diferencia de un fluido newtoniano.

En esta tesis doctoral se desarrollarán los conceptos de pérdidas de carga para el caso del agua, a la vista de que va encaminada al estudio de las fórmulas de las pérdidas de carga en relación con el abastecimiento de agua (conducciones a presión) y en menor grado las correspondientes al saneamiento de aguas (conducciones sin presión).

4.3.3 Propiedades físicas de los fluidos

Todo el desarrollo de la ingeniería mecánica de los fluidos está basado en el apoyo de las propiedades de los fluidos, la aplicación de las leyes básicas de Mecánica y Termodinámica (Agüera Soriano, 1992).

4.3.3.1 Densidad

La densidad de un fluido se define como la cantidad de masa por unidad de volumen.

$$\rho = \frac{m}{V}$$ **Ecuación 1**

Dónde:

ρ = Densidad del fluido (kg/m^3)

m = Masa (kg)

V = Volumen de la sustancia (m^3)

4.3.3.2 Peso específico

El peso específico de un fluido es el peso por unidad de volumen. Éste cambia con la gravedad, la cual depende del lugar de localización del producto:

$$\gamma = \frac{P}{V} = \frac{m\,g}{V} = \rho . g$$ **Ecuación 2**

Dónde:

γ = Peso específico del fluido (N/m^3)

ρ = Densidad de la sustancia (kg/m^3)

g = Aceleración de la gravedad (m/s^2)

4.3.3.3 Densidad relativa

La densidad relativa de una sustancia es un número adimensional que viene dado por la relación entre su peso y el peso de un volumen igual de agua en condiciones normales. También se puede expresar como la relación entre su densidad o peso específico y la del agua.

$$\rho_r = \frac{\rho_{sust}}{\rho_{agua}} = \frac{\gamma_{sust}}{\gamma_{agua}} \qquad \textbf{Ecuación 3}$$

donde ρ_r es la densidad relativa, ρ_{sust} es la densidad absoluta de la sustancia y ρ_{agua} es la densidad de referencia.

El agua en condiciones normales la temperatura (20°C), la densidad (1000 kg/m^3) y una presión absoluta (760 mm de Hg).

4.3.3.4 Viscosidad

La viscosidad de un fluido es una medida de su resistencia a fluir, como resultado de la interacción y cohesión de sus moléculas. La viscosidad se produce por el efecto de corte o deslizamiento resultante del movimiento de una capa de fluido con respecto a otra y es completamente distinta de la atracción molecular.

La ley de viscosidad de *Newton* establece que, para una tasa dada de deformación angular del fluido, el esfuerzo cortante es directamente proporcional a la viscosidad.

$$T = \mu . \frac{d\mu}{dy} \qquad \textbf{Ecuación 4}$$

Donde, μ tiene las dimensiones $FL^{-2}T$

4.3.3.5 Viscosidad Absoluta o Dinámica

Es la propiedad del fluido y expresa la resistencia al corte ofrecido por el fluido cuando se mueve. La viscosidad dinámica es directamente proporcional a la tensión de cortadura, e inversamente proporcional a la velocidad angular.

$$\mu = \frac{T}{\frac{dv}{dy}}$$ **Ecuación 5**

Donde:

μ = Viscosidad absoluta ($N.s/m^2$) o [kg/(m.s)]

T = Tensión de cortadura (N) o (kg)

v = Velocidad del fluido

4.3.3.6 Viscosidad Cinemática

Es la viscosidad absoluta dividida entre la densidad. En el sistema internacional (SI) la unidad de viscosidad cinemática es el metro cuadrado por segundo (m^2/s).

$$\upsilon = \frac{\mu}{\rho}$$ **Ecuación 6**

Dónde:

υ = Viscosidad cinemática del fluido (m^2/s)

μ = Viscosidad dinámica o absoluta del fluido ($Kg.s/m^2$)

ρ = Densidad del fluido ($kg.s/m^4$)

En los líquidos cuando la temperatura aumenta la viscosidad disminuye, a la inversa, en tanto en los gases, si la temperatura aumenta la viscosidad también aumenta. El efecto de la presión sobre la viscosidad de los líquidos y la de los gases

perfectos es tan pequeño que no tiene interés práctico en la mayor parte de problemas para flujo de fluidos.

4.4.4 Caudal

Es el volumen por unidad de tiempo que atraviesa una sección transversal de un conducto. Se pueden relacionar el caudal (Q) con la velocidad (V) a través del área transversal de flujo (A).

$Q = V\ A$ **Ecuación 7**

También se puede definir como la cantidad de fluido que avanza en una unidad de tiempo.

Unidades frecuentes de caudal: m^3/s, l/s, GPM

4.4.5 Presión

Es la fuerza por unidad de área a que está sometida una partícula de un fluido. La presión en una partícula de un fluido es igual en todas las direcciones. La diferencia de presión entre dos puntos de un conducto (tubería, canal) es la causa del movimiento (caudal) de un fluido (Ordoñez Viñan, 2013).

Presión atmosférica: Es la debida al peso del aire en un sitio particular de la superficie terrestre, por lo que su valor depende de la ubicación, altitud y latitud del lugar.

Presión absoluta: Es la presión que se mide con relación al cero absoluto de presión, donde no existe presencia de aire, o en su defecto es igual a la suma de la presión manométrica más la atmosférica.

Presión barométrica: Es la presión ejercida por la atmósfera terrestre medida mediante un barómetro, a nivel del mar. Esta presión es próxima a 1,00 atmósfera.

Presión manométrica: Es la determinada por cualquier instrumento que mide la diferencia entre cualquier presión absoluta por encima de la atmosférica y la presión atmosférica del lugar donde se efectúa la medición.

Vacío: El vacío es la diferencia de presiones entre la presión atmosférica existente y la presión absoluta.

Las unidades más usadas de presión son: en el Sistema Internacional el kg /cm^2.

4.4.6 Introducción a la mecánica de fluidos

4.4.6.1 Dinámica de fluidos

La dinámica de fluidos es la ciencia encargada de estudiar y describir las leyes que rigen el movimiento de los fluidos.

¿Cómo describo un fluido?

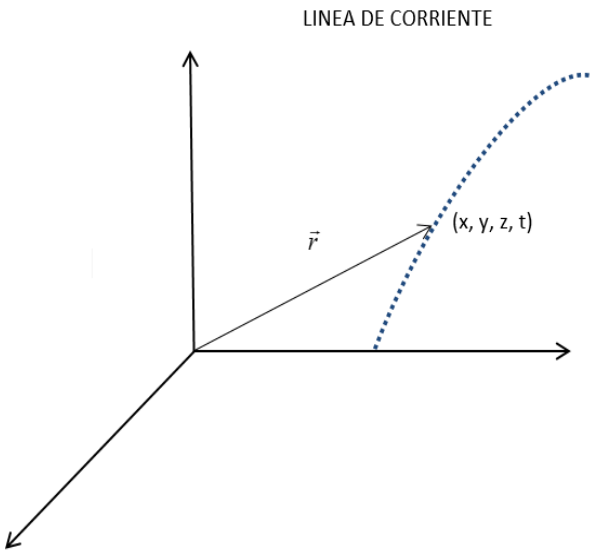


Ilustración 6. Coordenada de una partícula perteneciente a la línea de corriente

4.4.6.2 Método de Euler

No considera una partícula, sino básicamente lo que está ocurriendo en un cierto punto del espacio y en un cierto instante de tiempo, en lugar de preocuparse por lo que le ocurra a una determinada partícula fluida.

En cada punto del espacio y en cada instante de tiempo las leyes físicas que describen el movimiento vienen dadas en función de las coordenadas x, y, z y t y son:

Densidad: $\vec{\rho} = \rho(x, y, z, t)$
Posición: $\vec{r} = r(x, y, z, t)$
Presión: $P = p(x, y, z, t)$
Velocidad: $\vec{v} = v(x, y, z, t)$

En este procedimiento desarrollado por Leonhard Euler (1707-1783), se sigue lo siguiente:

- Se asigna a cada punto del espacio ocupado por el fluido un vector velocidad que es función de las coordenadas del punto y del tiempo, es decir $\vec{v} = v(x, y, z, t)$.
- El campo de velocidades queda definido como campo vectorial.
- Las propiedades del flujo se obtienen del campo vectorial definido.

A continuación, se definen los tipos de regímenes en función de la velocidad de las partículas fluidas:

4.4.6.3 Tipos de regímenes

Flujo no-uniforme y no-estacionario (variable).

En general se cumple que:

- Las velocidades de las partículas fluidas en dos puntos cualesquiera del espacio son diferentes en un mismo instante.

- Las velocidades de las partículas fluidas en dos puntos cualesquiera son diferentes al pasar por un punto dado en distintos instantes de tiempo.

Flujo estacionario o permanente.

En general se cumple que:

- La velocidad en un punto cualquiera permanece constante al transcurrir el tiempo, es decir, la velocidad de las partículas fluidas al pasar por un punto dado es siempre la misma.
- En régimen estacionario la velocidad de las partículas fluidas es tan sólo función de sus coordenadas espaciales y no del tiempo, $\vec{v} = v(x, y, z)$.

Flujo uniforme

En general se cumple que:

La velocidad de las partículas fluidas es la misma en todos los puntos del espacio, aun cuando pueda cambiar en el transcurso del tiempo, por lo tanto, el campo de velocidades no es función de las coordenadas espaciales, sino solamente del tiempo, es decir $\vec{v} = v(t)$.

4.4.6.4 Líneas de corriente

Es la representación gráfica de las líneas vectoriales, correspondientes al campo vectorial.

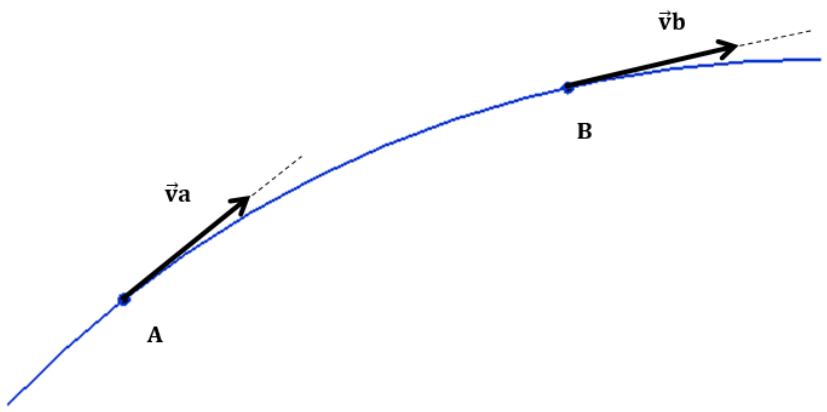


Ilustración 7. Trayectoria de una línea de corriente

- Una línea de corriente es tangente en cualquiera de sus puntos a la dirección de la velocidad de la partícula fluida que pasa por ese punto.
- Las líneas de corriente satisfacen la ecuación vectorial

$\vec{v} \times d\vec{r} = 0$ **Ecuación 8**

$dr = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ **Ecuación 9**, es el desplazamiento elemental a lo largo de la línea de corriente, cuyas ecuaciones diferenciales de la familia de líneas de corriente son:

$\frac{dx}{vx} = \frac{dy}{vy} = \frac{dz}{vz}$ **Ecuación 10**

- Para analizar, al menos cualitativamente, el movimiento del fluido espaciamos las líneas de corriente de modo que el número de ellas que atraviesan la unidad de área normal a su dirección sea proporcional al valor de la velocidad de las partículas fluidas en los puntos de dicha superficie unitaria, obteniéndose asi un "mapa" de líneas de corriente de tal manera que en las zonas en que las líneas de corriente están muy apretadas, la velocidad será grande; en las que están muy separadas, será pequeña.
- Una propiedad inmediata de las líneas de corriente es que no pueden cruzarse; de no ser así, no quedaría unívocamente determinada la velocidad de la partícula fluida en cada instante y en cada punto del espacio.

En el **régimen de flujo estacionario** las magnitudes físicas de interés no dependen del tiempo, es decir:

Densidad: $\vec{\rho} = \rho(x, y, z)$
Posición: $\vec{r} = r(x, y, z)$
Presión: $P = p(x, y, z)$
Velocidad: $\vec{v} = v(x, y, z)$

Esto significa que las líneas de corriente no tienen una dependencia temporal.

Si imaginamos un grupo de partículas viajando hacia dentro de un tubo según la Ilustración 8, una partícula A acabará pasando por el punto B con una velocidad

V_B, después seguirá avanzando hasta llegar al punto C y llevará una velocidad al pasar por este punto de Vc, pero resulta que detrás vienen más partículas y el tiempo transcurre, pero cuando estas partículas pasen por el punto C llevarán la velocidad Vc sin importar en que tiempo lo hacen. Si dependiera del tiempo, cada vez que una partícula pase por B ó por C tendría diferente velocidad.

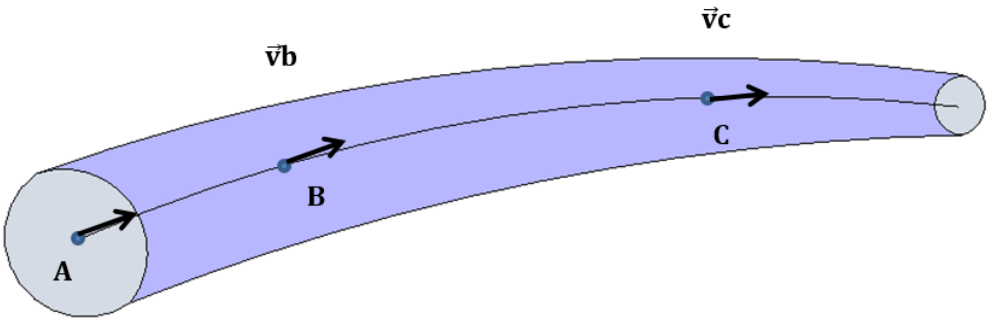


Ilustración 8. Trayectoria de una línea de corriente en régimen flujo estacionario

Por lo tanto, si se traza la trayectoria de una partícula A qué pasó por el punto B, esa será la trayectoria de todas las partículas que lleguen al punto B y se define como línea de corriente.

En el régimen de flujo no-estacionario, el patrón de líneas de corriente puede cambiar en el transcurso del tiempo, y las trayectorias de las partículas no coinciden, en general, con las líneas de corriente en un instante dado. Las trayectorias y las líneas de corriente se tocan en un punto, localizando la partícula en el instante en cuestión.

Un tubo de corriente son el conjunto de líneas de corriente que, en un instante dado, pasan por el contorno de un elemento infinitesimal de superficie (dS).

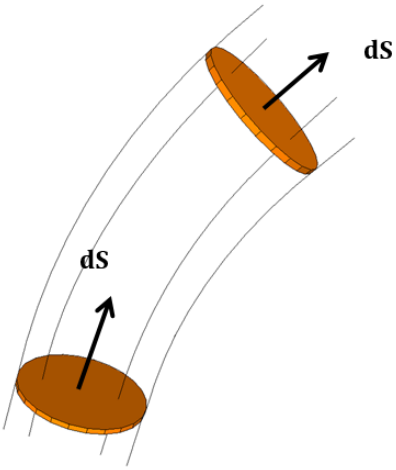


Ilustración 9. Tubo de corriente

4.4.6.5 Ecuación general de energía.

En Hidráulica, la energía total de un fluido incompresible en movimiento puede representarse por la suma de las energías cinética, potencial y de posición, y se puede expresar de acuerdo con la siguiente ecuación (Afif Khouri, 2004).

$$E_{TOTAL} = E_{CINETICA} + E_{POTENCIAL} + E_{POSICION}$$ Ecuación 11

Energía Cinética: La energía cinética de la masa del fluido es la medida de la capacidad del fluido de hacer un trabajo en virtud de su velocidad.

Su magnitud es comúnmente expresada en unidades de energía por unidad de peso.

$$E_{CINETICA} = \frac{v^2}{2g}$$ Ecuación 12

Sus dimensiones son de longitud y representa la altura de una columna de fluido comúnmente conocida como altura de velocidad.

Donde:

v = Velocidad media (m/s).

g = Aceleración de la gravedad del lugar (m/s^2).

Sus dimensiones son de longitud y representa la altura de una columna de fluido comúnmente conocida como altura de velocidad.

Energía Potencial: La energía de presión es la medida del trabajo realizado por la fuerza debido a la presión en la masa del fluido. Su magnitud es comúnmente expresada en unidades de energía por unidad de peso.

$$E_{POTENCIAL} = \frac{P}{\gamma}$$ **Ecuación 13**

Esta cantidad tiene también dimensiones de longitud y se la conoce como altura de presión.

Donde:

P = Presión en una sección cualquiera de la tubería (m)
γ = Peso específico del fluido (N/m^3)

Energía de Posición o Elevación: La energía de elevación contenida en la masa de un fluido en movimiento se mide respecto de un plano o altura de referencia. Es la energía requerida para elevar el fluido a esa posición.

$$E_{POSICION} = z$$ **Ecuación 14**

La suma algebraica de la altura cinética, altura potencial y la altura de posición, son muy aproximadamente la energía contenida por unidad de peso del fluido a través de una tubería.

$$E_{TOTAL} = E_{CINETICA} + E_{POTENCIAL} + E_{POSICION} = \frac{v^2}{2g} + \frac{P}{\gamma} + z$$ **Ecuación 15**

En esta ecuación la energía total está expresada en (m.c.a)

4.4.6.6 Pérdidas de energía en un sistema a presión de un flujo incompresible.

Del planteamiento de la ecuación de energía para un tubo de corriente de fluido real incompresible que se mueve entre dos puntos de un sistema se obtiene, teniendo en cuenta que se desarrollan pérdidas de energía (Rodríguez Castro, 2014).

$$E_{T1} = E_{T2} + \sum \text{pérdidas} \qquad \textbf{Ecuación 16}$$

Donde:

E_{T1} = Energía total disponible en el punto inicial.

E_{T2} = Energía total disponible en el punto final.

$\sum \text{pérdidas}$ = Sumatoria de las pérdidas de energía producidas por fricción y accesorios entre los puntos inicial y final del planteamiento de la ecuación de energía.

Tal como se presenta en la (Ilustración 10) del planteamiento de la ecuación de energía, se tiene que:

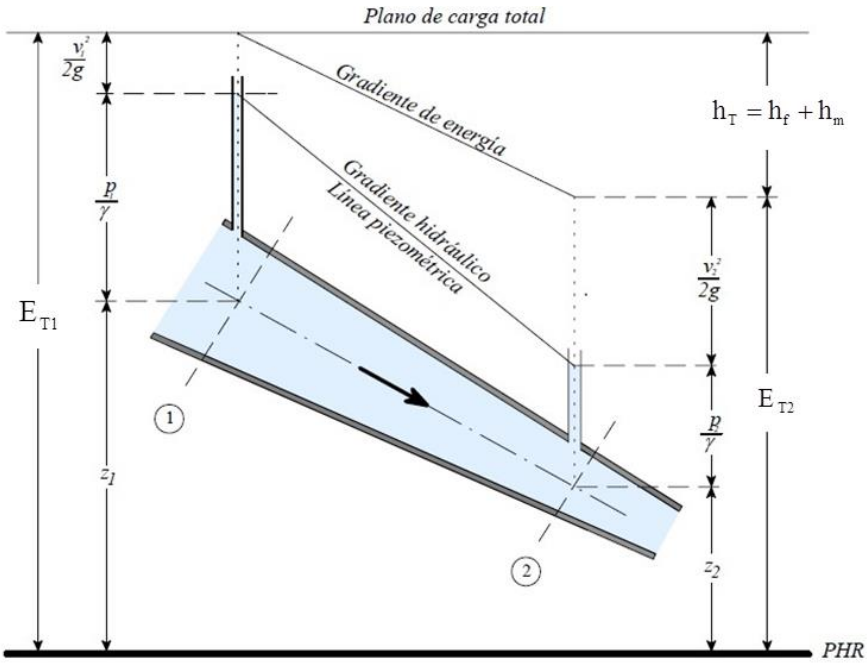


Ilustración 10. Energía entre dos puntos de una conducción

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_2^2}{2g} + \sum (h_f + h_m)$$ **Ecuación 17**

Donde:

z = Altura con respecto a un nivel de referencia.

V = Velocidad media en la sección transversal.

$\frac{P}{\gamma}$ = Presión en el eje del tubo.

α = coeficiente de corrección de la energía cinética, al considerar distribuciones uniformes de velocidad en un flujo turbulento, $\alpha = 1$.

$h_T = \sum (h_f + h_m)$ = sumatoria de las pérdidas de energía producidas por fricción y accesorios.

5. RESULTADOS

5.1 PRIMER PERIODO: ANÁLISIS CRONOLÓGICO DE LAS FÓRMULAS DE PÉRDIDAS DE CARGA. (Desde los experimentos de Couplet hasta los realizados por Darcy).

5.1.1 Claude Antoine Couplet (1642 – 1722)

Biografía sucinta

Ingeniero francés, nació en *Paris* (Francia), fue primero Abogado, pero su pasión por las Matemáticas y en particular por la Mecánica (Hidráulica), le hizo abandonar aquella profesión. Fue estudiante del ingeniero y astrónomo del rey *Jacques Buot* (o *Buhot*), y posteriormente se casó con su hija.

En aquella época se fundó la Academia de Ciencias de París (22 de diciembre de 1666) de la cual *Buhot* fue miembro fundador y Couplet fue introducido a llevar a cabo las funciones de tesorero. Fue supervisor del equipo de recogida y recibió un apartamento en el Observatorio Real.

En el año 1670 compró a *Buhot* la Cátedra de Matemáticas (Profesor de la *Mathematique* de la *Grande Écurie*).

Su reputación empezó a crecer por las obras de construcción de la red de agua en parques privados y ciudades, entre las que se cuenta la ciudad de *Coulanges-la-Vineuse* en *Borgoña*, que por el imponente fuego que surgió, sufrió la falta de agua y construyó una red de agua en tres meses con un costo relativamente bajo, lo que aumentó aún más su reputación como ingeniero. También mejoró en la ocasión, el suministro de agua en *Auxerre* y *Courson*. En 1720, sufrió un derrame cerebral y murió dos años más tarde.

Aportaciones a la Hidráulica

Según fuentes de la Academia de Ciencias de París, las primeras experiencias encontradas en relación con la Hidráulica Experimental, enfocadas a determinar las

pérdidas de carga en tuberías, fueron realizadas por *C.A Couplet* en 1712, sobre las conducciones de agua de *Versalles* (Pérez Franco, 2001).

Desafortunadamente había mucho desconocimiento sobre estos temas, debido a la falta de experiencias que arrojasen luces sobre los mismos.

De las observaciones más notables, producto de sus reflexiones señalaremos las siguientes reglas:

1.- Las velocidades del agua son como las raíces cuadradas de las alturas desde donde cae.

Couplet observó que la cantidad de agua calculada en las conducciones era de hasta 20 o 30 veces menor que la que esta regla prometía, por lo que se desconocía el valor de esta extraña disminución que viene del rozamiento del agua con las tuberías en gran parte.

2.- El efecto del rozamiento es mayor cuando las conducciones son más largas, los diámetros de las tuberías más pequeños, las curvas o codos más frecuentes, los ángulos de las curvas más agudos y las velocidades más altas.

Él dijo al respecto que sería difícil saber, aunque solo fuera aproximadamente, los valores de estas disminuciones y de los resultados de sus combinaciones.

Estas revelaciones inducen a pensar que no solo existía un gran desconocimiento sobre las leyes del flujo de agua en las tuberías de conducción, sino que también se creía que sería difícil o imposible descubrirlas algún día.

Couplet hizo sus observaciones sobre las experiencias realizadas en las conducciones en servicio de *Versalles*, con varios años de uso.

En total fueron 7 las experiencias realizadas:

- 6 con tubos de 0,135 m de diámetro y una longitud de 2.280 m.
- 1 con tubos de 0,490 m de diámetro y una longitud de 1.169 m.

5.1.2 Antoine de Chézy (1718 – 1798)

Biografía sucinta

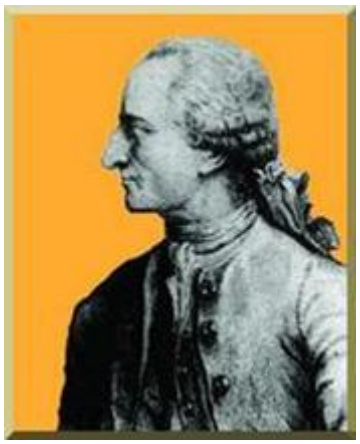


Ilustración 11. Retrato de Antoine de Chézy

Ingeniero francés, nació en *Chalon-sur-Marne* (Francia), conocido internacionalmente por su contribución a la Hidráulica de los canales abiertos, en particular por la llamada ecuación o fórmula de *Chézy* (Riaño Valle, 2016).

Uno de los problemas más graves de París desde principios del siglo XVIII era el abastecimiento de aguas, que comparado con el de Inglaterra en la misma época, dejaba mucho que desear, y que, según escritos de *Voltaire* desde Inglaterra, señalaba como todas sus casas recibían agua. Es por ello por lo que el cálculo de las pérdidas de carga en tuberías y de la velocidad de circulación en conducciones de lámina libre se convierte en un objetivo a resolver.

Tal como comentamos anteriormente, *Claude Antonio Couplet* realizó las primeras investigaciones que quedaron registradas. *Cornelius Velsen* en Australia (1749) publicó un artículo donde llegaba a la conclusión de que la "velocidad de circulación en un canal abierto era proporcional a la raíz cuadrada de su pendiente", pero a pesar de la efectividad de dicho planteamiento, su fundamento no era correcto por estar basado en una aplicación equivocada del teorema de *Torricelli* sobre la circulación del agua (Riaño Valle, 2016).

Simultáneamente el alemán *Albert Brahan* plasmaba en uno de sus escritos lo siguiente: “La deceleración provocada por el cauce en el flujo uniforme de un canal, era proporcional al cuadrado de la velocidad” (Riaño Valle, 2016), pero no llega a formular una relación de resistencia.

Esta era la sensación de incertidumbre que se respiraba a mediados del siglo XVIII, en relación con el diseño de canales, en la que aún no se había encontrado una relación en la que intervinieran el valor de la velocidad del agua y el caudal en función de la pendiente del canal y las características de la sección.

En este escenario es en el que tiene lugar las sobresalientes contribuciones de *Chézy* a la Hidráulica Experimental.

Chézy, de familia acomodada, estudió y fue maestro de una escuela parroquial local.

A los 30 años comienza sus estudios en la que más adelante seria la escuela de Caminos y Puentes de París, fundada en 1746 y que llegó a ganar con el tiempo reconocimiento internacional.

Chézy se graduó con honores, y bajo la dirección de *Jean Rodolphe Perrone*, su primer director, realizó trabajos en la construcción en inspección de puentes y calles de París, llegando a formar parte del claustro.

Debido a la falta de suministro a la ciudad de París, se crea en 1760 una comisión, mediante consulta a la Academia de Ciencias por la Administración.

Entre las muchas y variadas propuestas y recomendaciones, la más viable era la de utilizar el río *Ivette* como fuente adicional de abastecimiento, aprovechando que el mismo corre a una cota de lámina superior a la de la ciudad. Esta idea partió en 1747 de *Deparcieux*, miembro de la Academia de Ciencias, pero no se hizo nada hasta la creación de la Comisión en 1760. En 1768 le encargan a *Perronet* y a *Chézy* iniciar el proyecto (Riaño Valle, 2016).

Perronet le encargó a *Chézy* la parte más delicada de la tarea, la de diseñar la sección transversal del canal y el caudal circulante.

La confianza que *Perronet* depositó en *Chézy* estaba justificada porque este último obtuvo las máximas calificaciones como egresado de la Escuela de Caminos y Puentes de París y, sobre todo, porque *Perronet* se había creado muchos enemigos y se frotarían las manos si a la hora de inaugurar el canal resultara sobre-diseñado o insuficiente para llevar el caudal requerido.

La falta de información técnica relacionada con el diseño de canales lo impulsa a iniciar sus propias investigaciones.

En la tercera etapa de su vida, *Chézy* vivió en la mayor pobreza. Se jubiló en 1790 con un salario tan bajo que no podía cubrir las necesidades más básicas de su familia. Su miseria llegó hasta tal extremo que tuvo que vender el relleno de su colchón de dormir.

Gracias a las gestiones realizadas por sus exalumnos, reingresa al claustro de la Escuela de Caminos y Puentes donde es auxiliado con alimentos y abrigo. Su exalumno *Prony* logró que se le designara poco tiempo antes de su muerte en 1978 el cargo de director de la escuela.

Aportación y desarrollo de su experiencia

El planteamiento de *Chézy*, extraído de un reporte conservado en los archivos de la Escuela de Caminos y Puentes es el siguiente:

"Cuando uno tiene que transportar un flujo de agua para suministrar a algún lugar donde no hay o drenar un terreno donde hay demasiada, uno está casi siempre obligado a lograr el mayor flujo de agua con la menor pendiente posible" (Riaño Valle, 2016).

Después, teniendo diseñado el canal (geometría) y teniendo bien ajustado y regulada su pendiente es muy importante conocer si el canal será suficiente para el gasto que se desee que circule. Para ello es necesario conocer la velocidad del agua que fluye por el canal, el cual uno asume que tiene pendiente uniforme.

Este no es un problema del valor de la velocidad inicial e instantánea la cual puede ser muy grande si es causada por una carga de agua, o muy pequeña si resulta de alguna otra causa que no sea la pendiente del canal. Cualquiera que sea la velocidad inicial, ésta disminuye o aumenta suficientemente rápido para convertirse en una velocidad uniforme y constante, la cual es debida a la gravedad y a la pendiente del canal, cuyo efecto es contenido por la resistencia de la fricción contra los contornos del canal. Esta es la velocidad que hay que conocer, al menos aproximadamente (Riaño Valle, 2016).

El problema entonces propuesto, presenta por sí mismo la solución, es evidente que la velocidad debida a la gravedad actúa continuamente (se excluye que pueda venir de cualquier otra causa y en todo caso será pronto destruida y no intervendrá en el problema) es solamente uniforme cuando no hay aceleraciones y la gravedad no cesa de acelerar hasta que su acción se hace igual a la resistencia ocasionada por los bordes del canal y esta resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad al considerar el número y la fuerza de las partículas chocando en un tiempo dado, esto es en la parte del perímetro de la sección de flujo que toca los contornos del canal. Se desprecia la resistencia del aire contra la superficie libre.

Entonces llamando V al valor de la velocidad y a aquella parte del perímetro P, la resistencia debida a la fricción será entonces $V^2 \times P$.

Por otra parte, el efecto de la gravedad actúa contra el área de la sección de la corriente y la pendiente del canal o la altura que desciende en cada tramo de longitud. Llamando entonces al área de la sección transversal A y a la pendiente del canal H, el efecto de la gravedad será AH.

Chézy en su escrito sigue diciendo: sean dos canales, con características V, P, A, H y v, p, a, h respectivamente, tendremos la igualdad:

$$\frac{V^2 P}{A H} = \frac{v^2 p}{a h} \qquad \textbf{Ecuación 18}$$

Y, por tanto, despejando

$$V = v\sqrt{\frac{A.H.p}{a.h.P}}$$ **Ecuación 19**

Luego, si se han medido las características del segundo canal, así como la pendiente H, el "área mojada" A y el "perímetro mojado" P del primero, y se escribe:

$$C = v.\sqrt{\frac{p}{a.h}}$$ **Ecuación 20**

La fórmula (Ecuación 19) se hace:

$$V = v\sqrt{\frac{A.H.p}{a.h.P}} = v\sqrt{\frac{p}{a.h.}}\sqrt{\frac{A.H}{P}} = C\sqrt{R.H}$$ **Ecuación 21**

$$V = C\sqrt{R.H}$$ **Ecuación 22**

Analizando las dimensiones se tiene:

$[LT^{-1}] = [1]\,[L]^{1/2}\,[1]^{1/2} = [L]^{1}$

$[LT^{-1}] \neq [L]$

La ecuación no es dimensionalmente homógenea, lo que indica que el coeficiente de *Chezy* C deberá tener dimensiones.

Las dimensiones de C se deducen de la siguiente manera:

$[LT^{-1}] = [C]\,[L]^{1/2}\,[1]^{1/2}$

$[C] = [LT^{-1}]\,[L]^{-1/2} = [L^{1/2}T^{-1}]$

$[C] = [L^{1/2}T^{-1}]$

Esto significa que C deberá tener dimensiones de $[L^{1/2}T^{-1}]$ para que la ecuación de *Chezy* sea dimensionalmente homogénea.

Donde se ha indicado con R = A/P el "radio hidráulico", cociente del área mojada entre el perímetro mojado.

Se aprecia que para hacer uso de esta fórmula se requiere de observaciones en las cuales todo es conocido.

“Podría también ser interesante tener datos sobre diferentes corrientes, pero es importante señalar que todas esas observaciones requieren del mayor cuidado, lo cual dificulta hacerlo con suficiente precisión y que uno debería contar solo con aquellas hechas por gentes para darle la más escrupulosa atención.” (Riaño Valle, 2016).

Hasta aquí la traducción del contenido del informe.

Si se analiza el escrito, puede observarse que la ecuación tiene como fundamento las fuerzas de resistencia al movimiento del fluido y la fuerza de gravedad propias del régimen uniforme. Es la primera vez que se establece el parámetro radio hidráulico, que consiste en dividir el área mojada entre el perímetro mojado. Esta relación caracteriza la geometría de las secciones y que permite que pueda ser usada tanto en conducciones libres como forzadas.

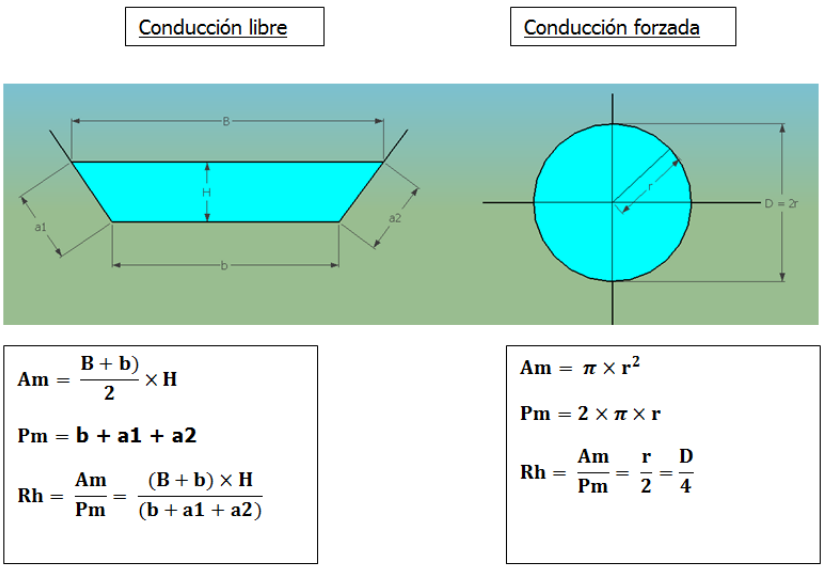


Ilustración 12. Conducción libre y conducción forzada

La formulación original considera una simple comparación entre dos corrientes de agua circulando en régimen uniforme y con similares características (Riaño Valle, 2016).

Parece que fue posteriormente cuando se redujo el término $v\sqrt{\frac{p}{a.h.}}$ a una constante para simplificar los cálculos.

En definitiva, esta sencilla fórmula permite calcular la velocidad media de una corriente en flujo uniforme, conociendo la pendiente del cauce y el radio hidráulico.

El principio "la resistencia al avance del líquido es directamente proporcional al perímetro mojado P e inversamente al área mojada A, y por tanto inversamente proporcional al radio hidráulico (Rh = A/P) se debe a *Euler* y el de "la proporcionalidad entre la resistencia y el cuadrado de la velocidad, es probablemente del propio *Chézy*" (Riaño Valle, 2016).

Para utilizar la fórmula es necesario determinar el valor de C, midiendo las características de un canal similar al que se está calculando y reemplazarlas en la fórmula relacionada con el caudal que se está calculando.

Es importante definir la pendiente más conveniente, de tal manera que la velocidad no afecte a los taludes de un canal de tierra, por lo tanto, hay que limitar la velocidad en el diseño.

Según *Chézy* lo más razonable es escoger la menor pendiente posible.

Para poner en práctica su fórmula *Chézy* realizó un estudio sobre el canal de *Courpalette*, situado en el bosque de *Orleans*, y en el que observó que trabajaba satisfactoriamente a pesar de su reducida pendiente, que el mismo se encargó de nivelar cuidadosamente, siendo su valor de 0,0355 por mil (Levi, 2001).

Para determinar C, mide la velocidad del canal de *Gibonniere*, de sección más regular, revestido de madera y rectilíneo. Midió la velocidad por medio de una bola de cera soltada en el centro de la corriente, así como el área y perímetro mojados.

Lo de medir la velocidad en el centro de la corriente indica que intuitivamente conocían la forma de la curva de la ley de velocidades en una sección dada, en la que la velocidad de una partícula en la superficie, debido solo al rozamiento del aire

era mayor que la de la partícula en contacto con el lecho del canal, por lo tanto, la medición había que hacerla en la mitad del calado del canal.

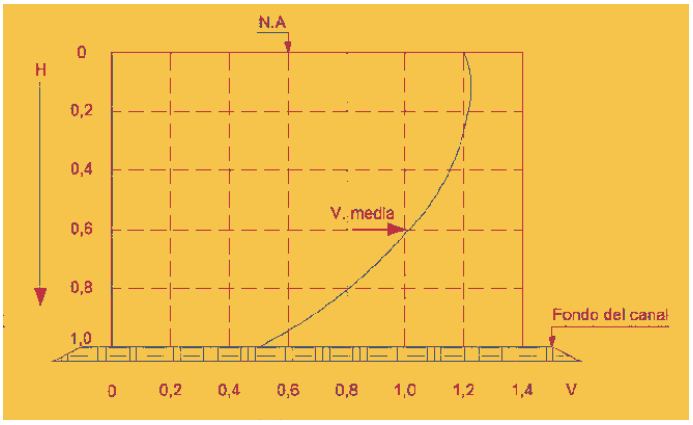


Ilustración 13. Curva representativa de la velocidad en una sección de un canal

Para este canal, obtuvo el valor en medidas métricas equivalente a C = 31.

Del canal revestido de madera pasa al opuesto, escoge un tramo de 1.330 toesas (1 toesa =1,949 m) en el río *Sena*, unos 2.592 metros, donde deduce que tiene una pendiente de 0,144 por mil, que, con las características geométricas de la sección mojada y la medición de la velocidad de la corriente, obtiene un valor de C = 44 en medidas métricas.

Con estos resultados, los del canal de *Gibonniere* y los del río *Sena*, adopta el valor de C = 44 para calcular la velocidad y el caudal que resultaría para el canal de *Courpalette*.

Chézy concluye con la siguiente frase: "Las circunstancias de estas dos observaciones son tan diferentes, que no se, creí deber sacar conclusiones de una para la otra; y hay que sorprenderse de que el resultado de la fórmula no se aleje más de lo observado." (Riaño Valle, 2016). *Chezy* sugiere que el valor de C varía con las características del cauce.

La ecuación pasó al olvido por más de 30 años y a inicios del siglo XIX fue dada a conocer por los ingenieros *Girard* y *Prony*. Despierta mucho interés en Alemania donde fue usada por este último por primera vez en el año 1801 donde sugiere

erróneamente que C era una constante universal, surgieron dudas en los hidráulicos debido a lo que de ella *Prony* escribió:

"Las primeras que conozco sobre el movimiento del agua en los canales, teniendo en cuenta la resistencia, son las del difunto *Chézy*, mi predecesor en la dirección de la Escuela de Puentes y Calzadas, uno de nuestros ingenieros más hábiles y que puede incluirse en el pequeño número de esos hombres que son superiores a su reputación… Obtuvo una fórmula muy simple… que puede, por medio de una única experiencia, hacerse aplicable a todas las corrientes" (Levi, 2001)

El proyecto de *Ivette* no llegó a realizarse, por lo que la Memoria de *Chézy*, redactada en 1775 para *Perronet* desapareció misteriosamente, y no se supo nada de ella a partir de 1803.

Alguien se debió llevar el escrito por lo interesante y novedoso del tema. Más tarde, un ingeniero americano llamado *Clements Herchel*, gran admirador de *Chézy* descubrió un borrador de la Memoria, del cual provienen las citas antes transcritas, y a partir de finales del siglo XIX alcanza popularidad por las traducciones y divulgaciones de *Clements* en América (Riaño Valle, 2016).

La ecuación de *Chézy* tiene el gran mérito de ser la primera ecuación conocida para el cálculo de las pérdidas de carga. Sus conclusiones siguen teniendo total vigencia hoy día. Marcó tendencia con su fórmula para la representación de las ecuaciones de pérdidas de carga, dado que todas las fórmulas pueden expresarse como casos particulares de la expresión general:

$$V = C R^{x} J^{y}$$ **Ecuación 23**

Donde

C = Coeficiente de fricción.

X = Exponente del radio hidráulico o del diámetro.

Y = Exponente de la rasante hidráulica.

Aunque inicialmente la fórmula se utilizó para calcular la velocidad del agua en conducciones libres, *Chezy* la usó para el cálculo de flujo en tuberías, en la que el radio hidráulico, a tubo lleno, es la cuarta parte del diámetro de la tubería.

Posterior a *Chézy*, muchos investigadores como los casos de *Ganguillet*, *Kutter*, *Darcy*, *Bazin*, *Manning* y *Strickler*, enfocaron sus trabajos para encontrar una expresión para el coeficiente C capaz de caracterizar la influencia de la rugosidad de las paredes de las conducciones, ya fueran a lámina libre o para conducciones forzadas.

Valores del coeficiente C de Chézy según diversos investigadores.

Ganguillet y Kutter.

En 1869 los ingenieros suizos propusieron la expresión del valor de C (Franquet Bernis, 2003):

$$C = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0,00155}{J}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{J}\right)\frac{n}{\sqrt{R_h}}}$$ **Ecuación 24**

Donde:

n: Coeficiente de rugosidad de las paredes.

R_h: Radio hidráulico.

J: Pendiente hidráulica.

Para deducir C, basaron sus experiencias en torrentes alpinos y en el estudio de las realizadas por *Darcy* y *Bazin*, así como las de *Humphreys* y *Abbot* en el río *Mississipi*.

El valor de n es un coeficiente que depende de la rugosidad de las paredes y resulta casi idéntico al de *Manning*.

Se ha comprobado que esta fórmula es válida para tubos de fundición en servicio, dándole a n un valor de 0,011 ó 0,012, que resulta ser un promedio de 1/n = 88.

Para comprobar la veracidad de esta afirmación se ha efectuado en esta tesis doctoral un sencillo ejemplo:

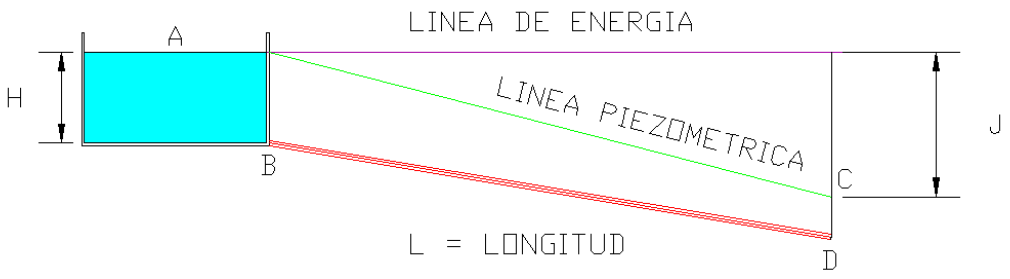


Ilustración 14. Esquema del problema hidráulico.

Un depósito de agua tiene un nivel de H = 5,00 m, en el que arranca una tubería de fundición de L = 1000 m de longitud, diámetro 200 mm.

Desde el fondo del depósito hasta el extremo final de la conducción hay un desnivel de 5 m ($Z_B – Z_D$). ¿Cuál es el caudal máximo que puede desaguar la tubería?

Para empezar, se utiliza el programa CALTUB, que nos dará con los datos suministrados, el caudal solicitado.

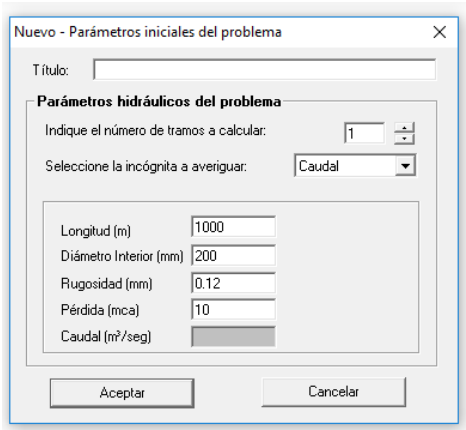


Ilustración 15. Datos para el programa CALTUB.

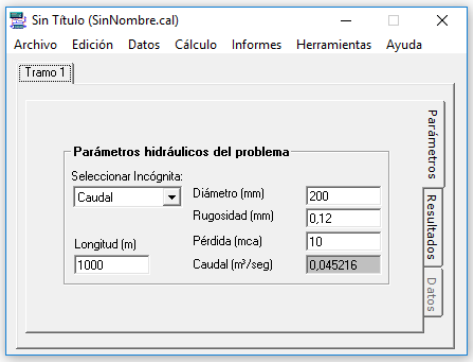


Ilustración 16. Resultados del programa CALTUB.

Se ha utilizado una rugosidad absoluta para material de fundición de 0,12 mm.

El caudal arrojado por el programa es de 45,00 l/s.

Para resolver el ejemplo con la fórmula de *Chezy* utilizando el coeficiente de *Gangullet* y *Kutte*r, se parte de los siguientes datos:

n = Coeficiente de rugosidad = 0,012 (*Manning*)

J = H = Pendiente hidráulica = 10/1000 = 0.01 m/m.

Rh = Radio hidráulico = R/2 = 50 mm = 0,050 m.

Sustituyendo en la fórmula, se obtiene C = 47,48, que sustituido en la de *Chezy* (Ecuación 22), se obtiene la velocidad y el caudal:

$V=C\sqrt{R.H}$ = 1,19 m/s, al que le corresponde un caudal de 37,50 l/s.

Este caudal supone un 85% del calculado con el programa CALTUB, es decir, un caudal 15% inferior sobre el valor real de caudal. Es por ello por lo que hoy día, igual que en el caso anterior, se tiene preferencias por fórmulas actuales más precisas para el cálculo de pérdidas de carga en tuberías a presión.

Robert Manning.

Manning, ingeniero irlandés, 20 años después, en 1889 propuso el siguiente valor de C:

$$C=\frac{R_h^{1/6}}{n}$$ **Ecuación 25**

Actuando de forma similar en el ejemplo anterior se obtiene:

Sustituyendo en la fórmula, se obtiene C = 55,18, que sustituido en la de *Chezy* (Ecuación 22), se obtiene la velocidad y el caudal:

$V=C\sqrt{R.H}$ = 1,23 m/s, al que le corresponde un caudal de 38,76 l/s.

Este caudal supone un 86,13 % del calculado con el programa CALTUB, es decir, un caudal 13,86 % inferior sobre el valor real de caudal, idéntico a los resultados anteriores.

Análisis y comprobación de la fórmula de Chézy

En la presente tesis se va a realizar un análisis de la fórmula de *Chézy* de forma similar a como él lo haría, para analizar el grado de aproximación a los valores reales de las características del flujo en un canal:

Supongamos que queremos saber la velocidad y el caudal que deberá discurrir por un canal de denominaremos *Courpallette*, el cual tiene una pendiente de p = 0,0355 en tanto por mil = 0,000036 m/m y la siguiente sección en un tramo de 300 metros (ver canal).

Siguiendo su procedimiento de buscar y estudiar un canal de características similares, escogeremos un tramo de canal al que denominamos río *Sena*, con una pendiente de p = 0,144 en tanto por mil = 0,000144 m/m.

Para desarrollar dicho análisis, en vez de medir la velocidad tal como hubiese hecho *Chézy* con una bola de cera en la mitad de la corriente, modelizaremos el segundo canal que nos servirá para deducir posteriormente el coeficiente C de *Chézy* y también el primero (el de diseño) para comparar los resultados de la velocidad y caudal con dicha fórmula. Ambas modelizaciones las haremos con el programa de HEC-RAS.

HEC-RAS (*Hydrological Engineering Center-River Analysis System)* es un programa de modelización hidráulica unidimensional compuesto por 4 tipos de análisis en ríos:

- Modelización de flujo en régimen permanente (nuestro caso)
- Modelización de flujo no permanente
- Modelización de transporte de sedimentos
- Análisis de calidad de aguas

Nos permite simular flujos en cauces naturales o canales artificiales para determinar el nivel de agua.

Los datos para introducir en la aplicación son los siguientes:

<u>Canal río Sena</u>

P = Pendiente = 0,000144 m/m

L = 300 m

Q = 300 m^3/s

Las secciones se consideran idénticas en todo el tramo y la primera sección aguas arribas tendrá de coordenadas:

PUNTO	X	Y
1	0	109
2	200	105
3	250	100
4	950	100
5	1000	105
6	1200	108

Tabla 1. Coordenadas de la primera sección transversal del rio Sen

DETALLE

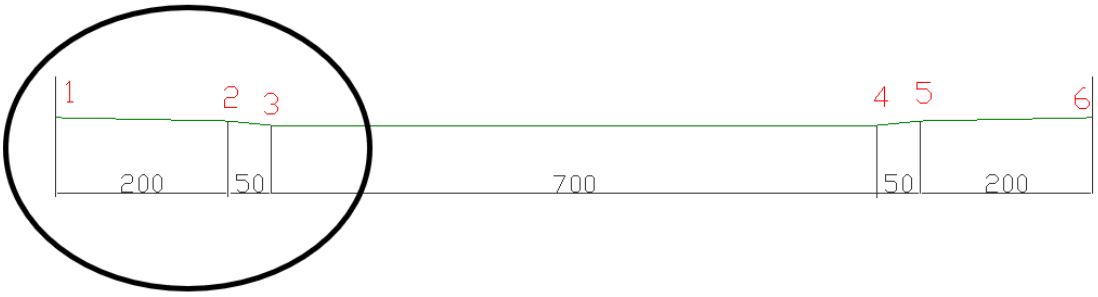


Ilustración 17. Sección transversal rio Sena

Detalle sección:

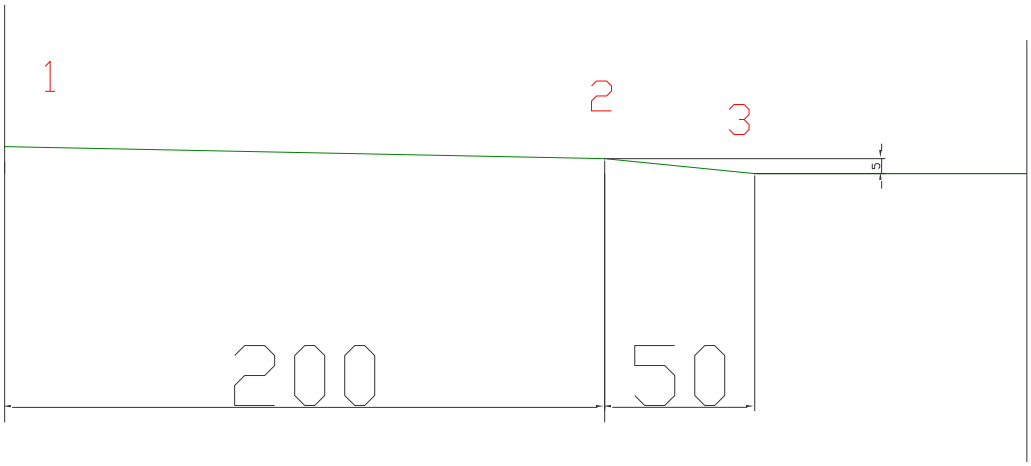


Ilustración 18. Detalle Sección transversal rio Sena

Para la cota base del lecho se adopta Y = 100 m.

Para introducir las secciones en HEC-RAS se introducen cada 100 metros, y se etiqueta con el mayor número la primera que está aguas arriba, en definitiva, son 3 tramos:

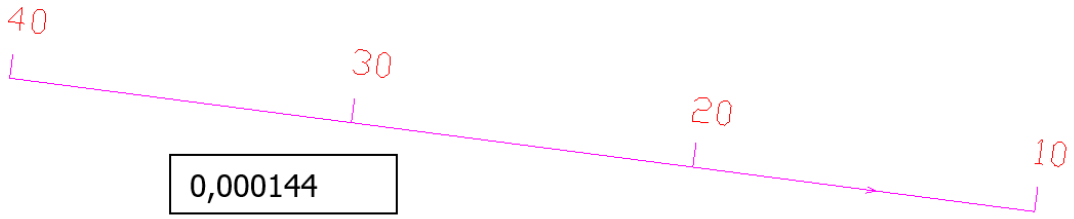


Ilustración 19. Detalle Sección longitudinal río Sena para HEC-RAS

Las coordenadas del resto de las siguientes secciones las dará el propio software al introducir la pendiente del cauce, y se mostraran al final después de la modelización.

Al ser la pendiente muy pequeña la modelización se realizará en régimen sub-crítico o régimen lento.

El coeficiente de rugosidad que utiliza el programa es el de *Manning*, para lo que utilizaremos n = 0,050 (pasto alto).

Se ha elegido como dato inicial para modelizar el cauce un caudal de 300 m3/s teórico, que normalmente se deduce de la lluvia caída en la cuenca receptora para periodos de retorno de 100 a 500 años, y se trata del caudal que llegaría a un punto de estudio de dicho cauce, para diseñar una presa, un paso de puente, etc.

Este caudal dará como resultado una altura o tirante, una sección y un perímetro mojados, que con la pendiente se puede deducir el coeficiente C de *Chézy*.

Los resultados arrojados por el programa son los siguientes:

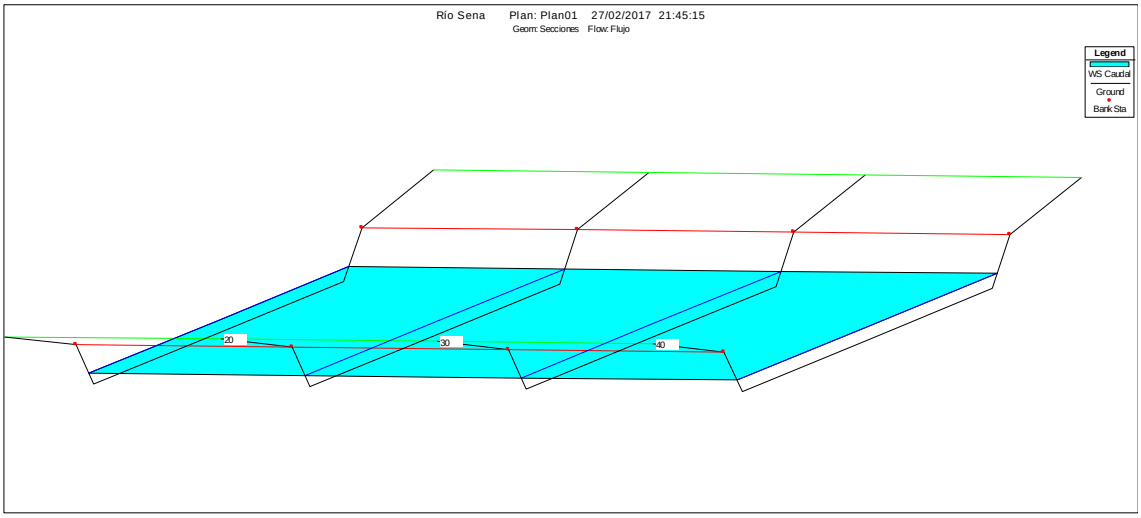


Ilustración 20. Vista tridimensional cauce río Sena después de la modelización.

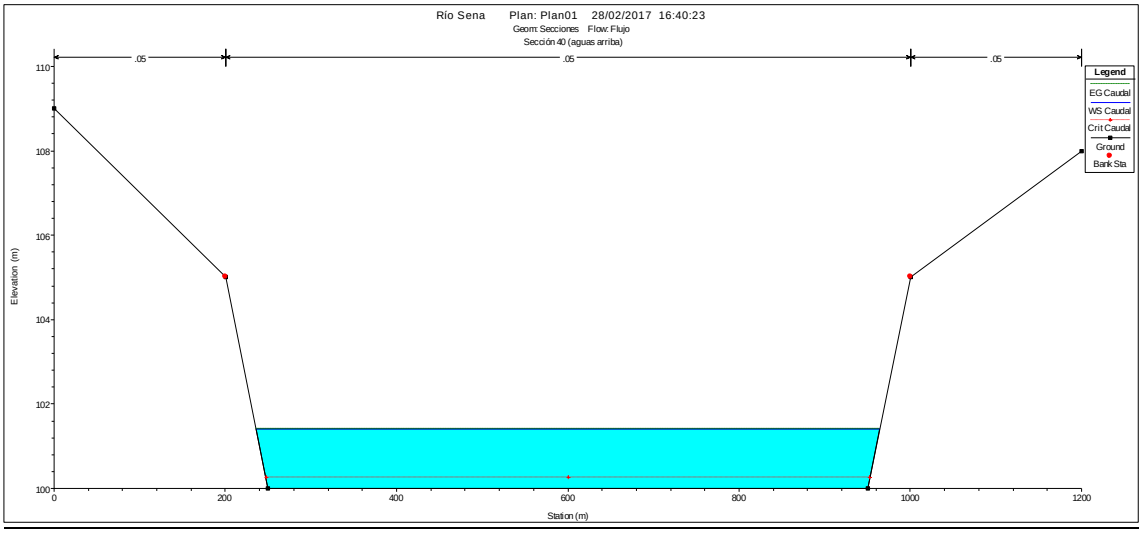


Ilustración 21. Primera sección aguas arriba del río Sena después de la modelización.

Cross Section Output

File Type Options Help

River: Río Sena Profile: Caudal

Reach Un Tramo RS: 40 Plan: Plan01

Plan: Plan01 Río Sena Un Tramo RS: 40 Profile: Caudal

		Element	Left OB	Channel	Right OB
E.G. Elev (m)	101.42				
Vel Head (m)	0.00	Wt. n-Val.		0.050	
W.S. Elev (m)	101.41	Reach Len. (m)	100.00	100.00	100.00
Crit W.S. (m)	100.26	Flow Area (m2)		1007.67	
E.G. Slope (m/m)	0.000144	Area (m2)		1007.67	
Q Total (m3/s)	300.00	Flow (m3/s)		300.00	
Top Width (m)	728.22	Top Width (m)		728.22	
Vel Total (m/s)	0.30	Avg. Vel. (m/s)		0.30	
Max Chl Dpth (m)	1.41	Hydr. Depth (m)		1.38	
Conv. Total (m3/s)	25022.2	Conv. (m3/s)		25022.2	
Length Wtd. (m)	100.00	Wetted Per. (m)		728.36	
Min Ch El (m)	100.00	Shear (N/m2)		1.95	
Alpha	1.00	Stream Power (N/m s)		0.58	
Frctn Loss (m)	0.01	Cum Volume (1000 m3)		302.18	
C & E Loss (m)	0.00	Cum SA (1000 m2)		218.46	

Errors, Warnings and Notes

Tabla 2. Resultados de la primera sección aguas arriba después de la modelización.

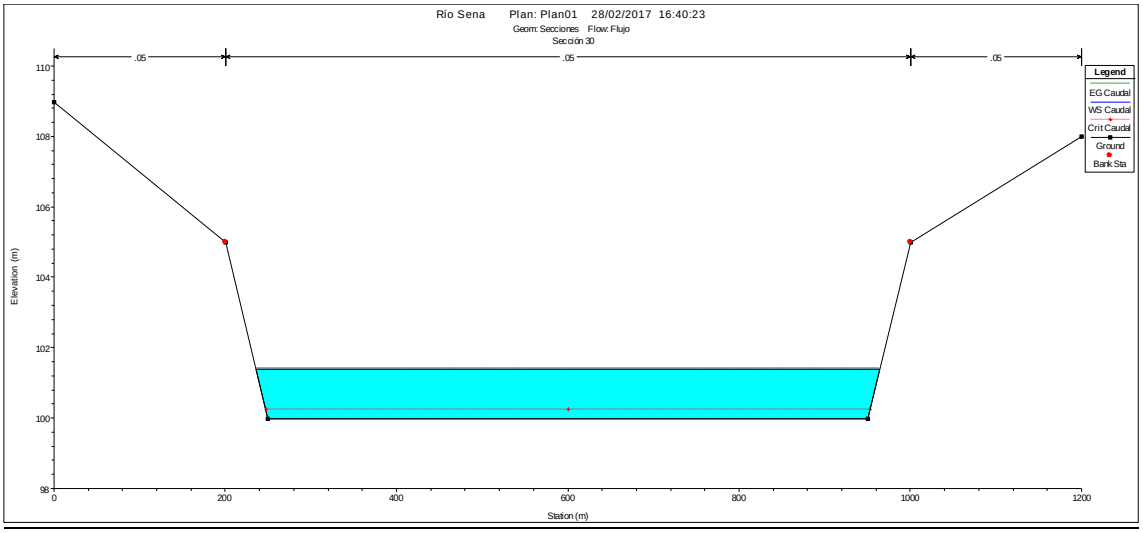


Ilustración 22. Segunda sección aguas arriba del río Sena después de la modelización.

Cross Section Output

File Type Options Help

River: Río Sena Profile: Caudal

Reach Un Tramo RS: 30 Plan: Plan01

Plan: Plan01 Río Sena Un Tramo RS: 30 Profile: Caudal

		Element	Left OB	Channel	Right OB
E.G. Elev (m)	101.40				
Vel Head (m)	0.00	Wt. n-Val.		0.050	
W.S. Elev (m)	101.40	Reach Len. (m)	100.00	100.00	100.00
Crit W.S. (m)	100.25	Flow Area (m2)		1007.41	
E.G. Slope (m/m)	0.000144	Area (m2)		1007.41	
Q Total (m3/s)	300.00	Flow (m3/s)		300.00	
Top Width (m)	728.21	Top Width (m)		728.21	
Vel Total (m/s)	0.30	Avg. Vel. (m/s)		0.30	
Max Chl Dpth (m)	1.41	Hydr. Depth (m)		1.38	
Conv. Total (m3/s)	25011.7	Conv. (m3/s)		25011.7	
Length Wtd. (m)	100.00	Wetted Per. (m)		728.36	
Min Ch El (m)	99.99	Shear (N/m2)		1.95	
Alpha	1.00	Stream Power (N/m s)		0.58	
Frctn Loss (m)	0.01	Cum Volume (1000 m3)		201.43	
C & E Loss (m)	0.00	Cum SA (1000 m2)		145.64	

Errors, Warnings and Notes

Tabla 3. Resultados de la segunda sección aguas arriba después de la modelización.

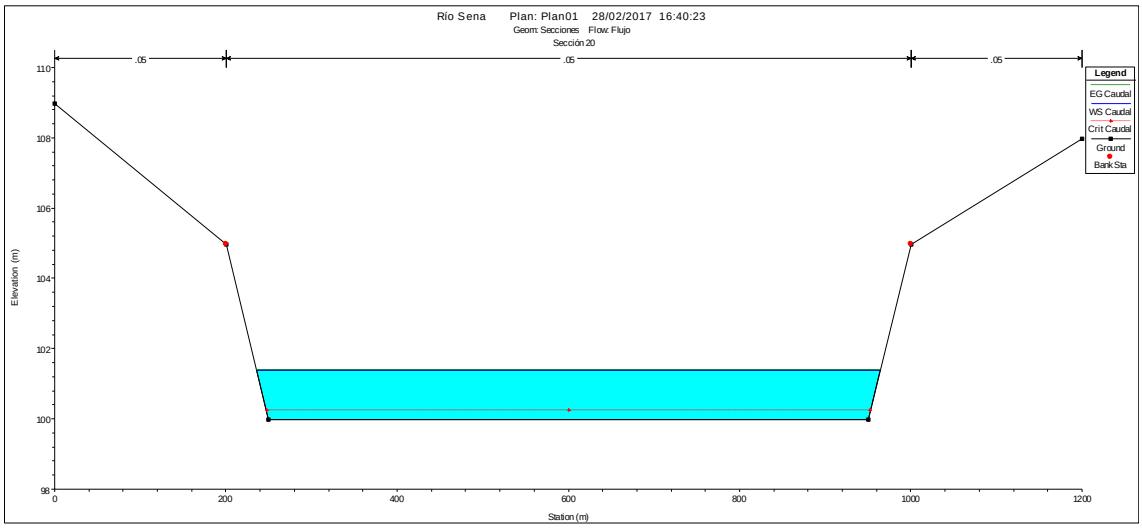


Ilustración 23. Tercera sección aguas arriba del río Sena después de la modelización.

Cross Section Output

File Type Options Help

River: Río Sena Profile: Caudal

Reach Un Tramo RS: 20 Plan: Plan01

Plan: Plan01 Río Sena Un Tramo RS: 20 Profile: Caudal

E.G. Elev (m)	101.39	Element	Left OB	Channel	Right OB
Vel Head (m)	0.00	Wt. n-Val.		0.050	
W.S. Elev (m)	101.38	Reach Len. (m)	100.00	100.00	100.00
Crit W.S. (m)	100.24	Flow Area (m2)		1007.13	
E.G. Slope (m/m)	0.000144	Area (m2)		1007.13	
Q Total (m3/s)	300.00	Flow (m3/s)		300.00	
Top Width (m)	728.21	Top Width (m)		728.21	
Vel Total (m/s)	0.30	Avg. Vel. (m/s)		0.30	
Max Chl Dpth (m)	1.41	Hydr. Depth (m)		1.38	
Conv. Total (m3/s)	25000.4	Conv. (m3/s)		25000.4	
Length Wtd. (m)	100.00	Wetted Per. (m)		728.35	
Min Ch El (m)	99.97	Shear (N/m2)		1.95	
Alpha	1.00	Stream Power (N/m s)		0.58	
Frctn Loss (m)	0.01	Cum Volume (1000 m3)		100.70	
C & E Loss (m)	0.00	Cum SA (1000 m2)		72.82	

Errors, Warnings and Notes

Tabla 4. Resultados de la tercera sección aguas arriba después de la modelización.

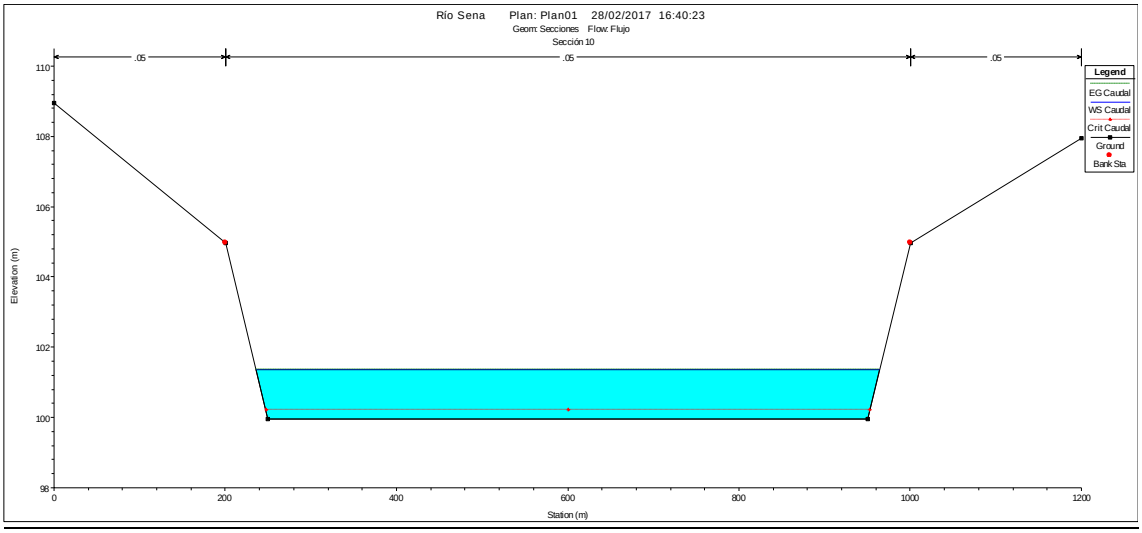


Ilustración 24. Cuarta sección final del río Sena después de la modelización.

Cross Section Output

File Type Options Help

River: Río Sena Profile: Caudal

Reach Un Tramo RS: 10 Plan: Plan01

Plan: Plan01 Río Sena Un Tramo RS: 10 Profile: Caudal

			Left OB	Channel	Right OB
E.G. Elev (m)	101.37	Element			
Vel Head (m)	0.00	Wt. n-Val.		0.050	
W.S. Elev (m)	101.37	Reach Len. (m)			
Crit W.S. (m)	100.22	Flow Area (m2)		1006.85	
E.G. Slope (m/m)	0.000144	Area (m2)		1006.85	
Q Total (m3/s)	300.00	Flow (m3/s)		300.00	
Top Width (m)	728.20	Top Width (m)		728.20	
Vel Total (m/s)	0.30	Avg. Vel. (m/s)		0.30	
Max Chl Dpth (m)	1.41	Hydr. Depth (m)		1.38	
Conv. Total (m3/s)	24988.8	Conv. (m3/s)		24988.8	
Length Wtd. (m)		Wetted Per. (m)		728.34	
Min Ch El (m)	99.96	Shear (N/m2)		1.95	
Alpha	1.00	Stream Power (N/m s)		0.58	
Frctn Loss (m)		Cum Volume (1000 m3)			
C & E Loss (m)		Cum SA (1000 m2)			

Errors, Warnings and Notes

Tabla 5. Resultados de la cuarta sección final después de la modelización.

Perfil Longitudinal del tramo

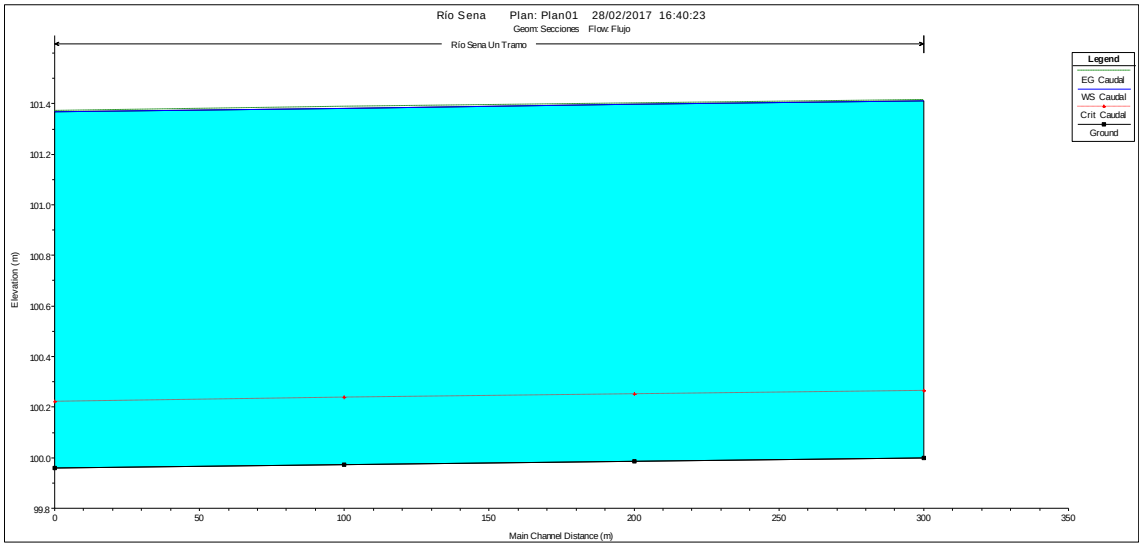


Ilustración 25. Perfil Longitudinal del tramo del río Sena después de la modelización.

Canal Courpalette

P = Pendiente = 0,000036 m/m

L = 300 m

Q = 100 m3/s

Las secciones se consideran idénticas en todo el tramo y la primera sección aguas arribas tendrá de coordenadas:

PUNTO	X	Y
1	0	106
2	10	106
3	15	100
4	75	100
5	80	106
6	90	106

Tabla 6. Coordenadas de la primera sección transversal del río Courpalete

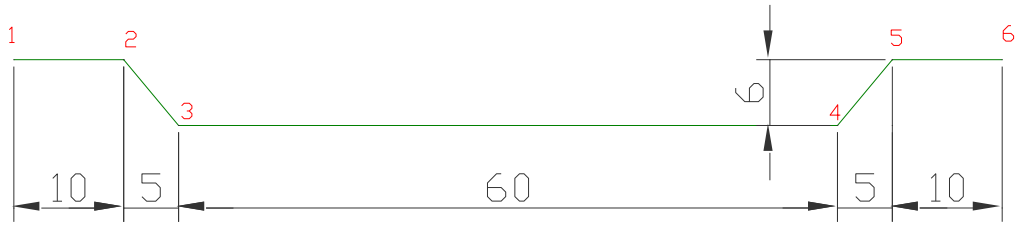


Ilustración 26. Sección transversal río Courpalete.

Para la cota base del lecho se adopta Y = 100 m.

Las coordenadas del resto de las siguientes secciones las dará el propio software al introducir la pendiente del cauce, y se mostraran al final después de la modelización.

Al ser la pendiente muy pequeña la modelización se realizará en régimen sub-crítico o régimen lento.

El coeficiente de rugosidad que utiliza el programa es el de *Manning*, para lo que utilizaremos n = 0,050 (pasto alto).

Para introducir las secciones en HEC-RAS se introducen cada 100 m, y se etiqueta con el mayor número la primera que está aguas arriba, en definitiva, son 3 tramos (Ilustración 27).

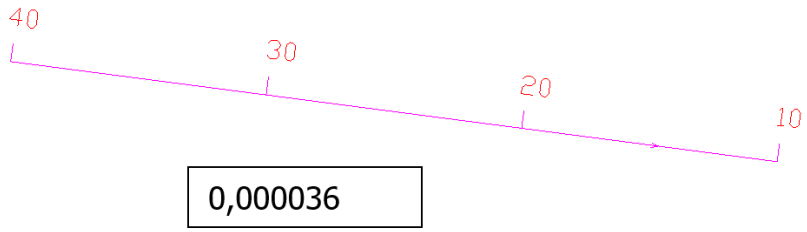


Ilustración 27. Detalle Sección longitudinal río Courpalete para HEC-RAS.

Los resultados arrojados por el programa son los siguientes:

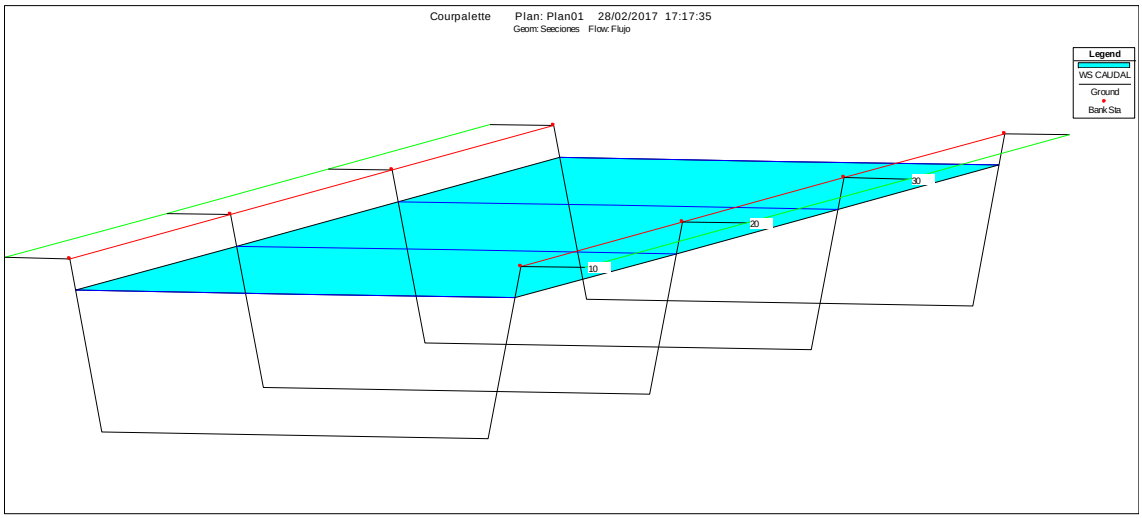


Ilustración 28. Vista tridimensional cauce río Courpalete después de la modelización.

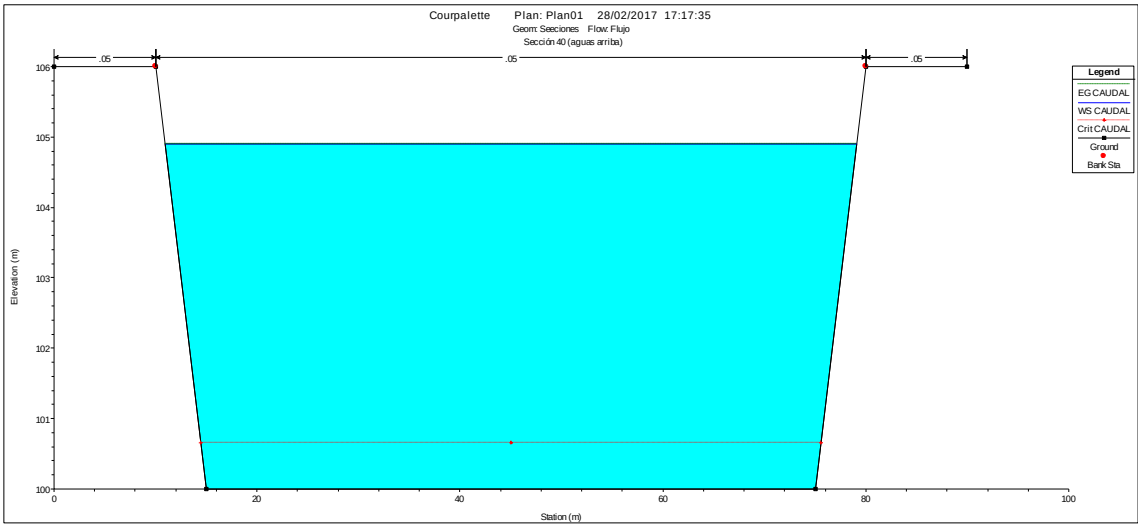


Ilustración 29. Primera sección aguas arriba del río Courpalete después de la modelización.

Cross Section Output

File Type Options Help

River: Canal Courpalett Profile: CAUDAL

Reach Un tramo RS: 40 Plan: Plan01

Plan: Plan01 Canal Courpalett Un tramo RS: 40 Profile: CAUDAL

E.G. Elev (m)	104.91	Element	Left OB	Channel	Right OB
Vel Head (m)	0.01	Wt. n-Val.		0.050	
W.S. Elev (m)	104.90	Reach Len. (m)	100.00	100.00	100.00
Crit W.S. (m)	100.65	Flow Area (m2)		314.13	
E.G. Slope (m/m)	0.000036	Area (m2)		314.13	
Q Total (m3/s)	100.00	Flow (m3/s)		100.00	
Top Width (m)	68.17	Top Width (m)		68.17	
Vel Total (m/s)	0.32	Avg. Vel. (m/s)		0.32	
Max Chl Dpth (m)	4.90	Hydr. Depth (m)		4.61	
Conv. Total (m3/s)	16657.4	Conv. (m3/s)		16657.4	
Length Wtd. (m)	100.00	Wetted Per. (m)		72.76	
Min Ch El (m)	100.00	Shear (N/m2)		1.53	
Alpha	1.00	Stream Power (N/m s)		0.49	
Frctn Loss (m)	0.00	Cum Volume (1000 m3)		94.25	
C & E Loss (m)	0.00	Cum SA (1000 m2)		20.45	

Errors, Warnings and Notes

Tabla 7. Resultados de la primera sección aguas arriba después de la modelización.

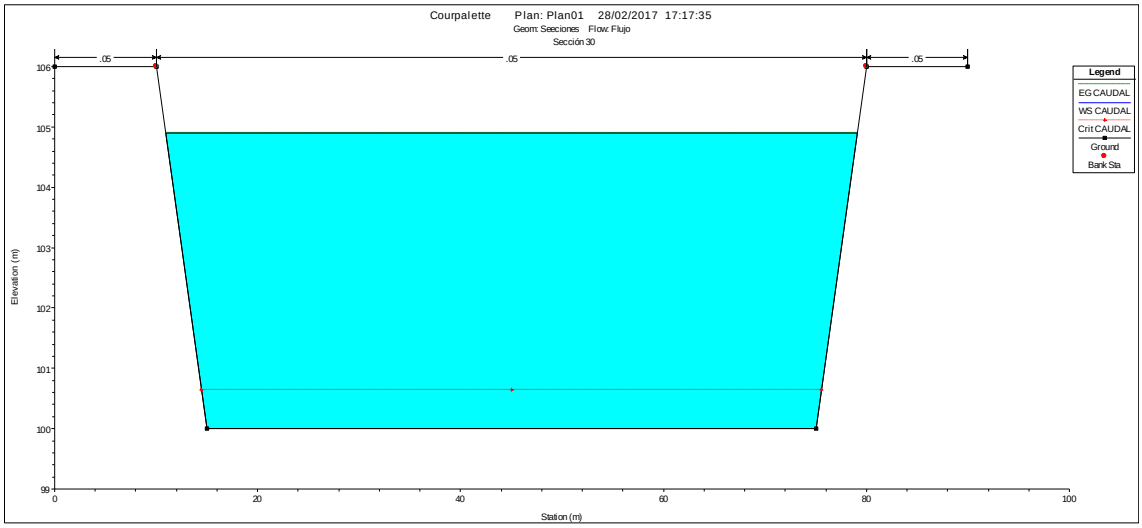


Ilustración 30. Segunda sección aguas arriba del río Courpalete después de la modelización.

Cross Section Output

File Type Options Help

River: Canal Courpalett Profile: CAUDAL

Reach Un tramo RS: 30 Plan: Plan01

Plan: Plan01 Canal Courpalett Un tramo RS: 30 Profile: CAUDAL

E.G. Elev (m)	104.90	Element	Left OB	Channel	Right OB
Vel Head (m)	0.01	Wt. n-Val.		0.050	
W.S. Elev (m)	104.90	Reach Len. (m)	100.00	100.00	100.00
Crit W.S. (m)	100.65	Flow Area (m2)		314.15	
E.G. Slope (m/m)	0.000036	Area (m2)		314.15	
Q Total (m3/s)	100.00	Flow (m3/s)		100.00	
Top Width (m)	68.17	Top Width (m)		68.17	
Vel Total (m/s)	0.32	Avg. Vel. (m/s)		0.32	
Max Chl Dpth (m)	4.90	Hydr. Depth (m)		4.61	
Conv. Total (m3/s)	16659.5	Conv. (m3/s)		16659.5	
Length Wtd. (m)	100.00	Wetted Per. (m)		72.76	
Min Ch El (m)	100.00	Shear (N/m2)		1.53	
Alpha	1.00	Stream Power (N/m s)		0.49	
Frctn Loss (m)	0.00	Cum Volume (1000 m3)		62.84	
C & E Loss (m)	0.00	Cum SA (1000 m2)		13.63	

Errors, Warnings and Notes

Tabla 8. Resultados de la segunda sección aguas arriba después de la modelización.

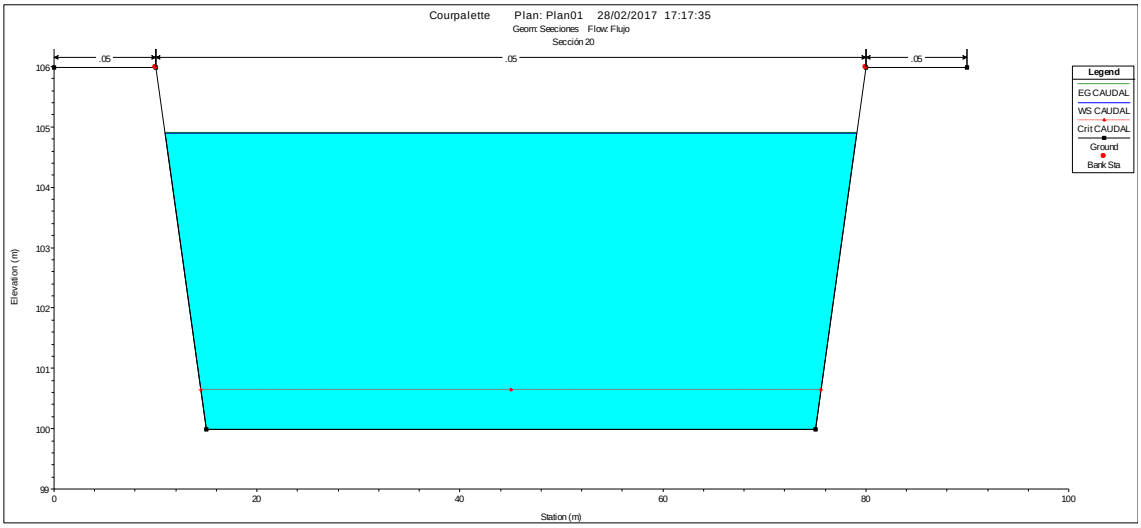


Ilustración 31. Tercera sección aguas arriba del río Courpalete después de la modelización.

Cross Section Output

File Type Options Help

River: Canal Courpalett Profile: CAUDAL

Reach Un tramo RS: 20 Plan: Plan01

Plan: Plan01 Canal Courpalett Un tramo RS: 20 Profile: CAUDAL

E.G. Elev (m)	104.90	Element	Left OB	Channel	Right OB
Vel Head (m)	0.01	Wt. n-Val.		0.050	
W.S. Elev (m)	104.89	Reach Len. (m)	100.00	100.00	100.00
Crit W.S. (m)	100.64	Flow Area (m2)		314.18	
E.G. Slope (m/m)	0.000036	Area (m2)		314.18	
Q Total (m3/s)	100.00	Flow (m3/s)		100.00	
Top Width (m)	68.17	Top Width (m)		68.17	
Vel Total (m/s)	0.32	Avg. Vel. (m/s)		0.32	
Max Chl Dpth (m)	4.90	Hydr. Depth (m)		4.61	
Conv. Total (m3/s)	16661.5	Conv. (m3/s)		16661.5	
Length Wtd. (m)	100.00	Wetted Per. (m)		72.76	
Min Ch El (m)	99.99	Shear (N/m2)		1.53	
Alpha	1.00	Stream Power (N/m s)		0.49	
Frctn Loss (m)	0.00	Cum Volume (1000 m3)		31.42	
C & E Loss (m)	0.00	Cum SA (1000 m2)		6.82	

Errors, Warnings and Notes

Tabla 9. Resultados de la tercera sección aguas arriba después de la modelización.

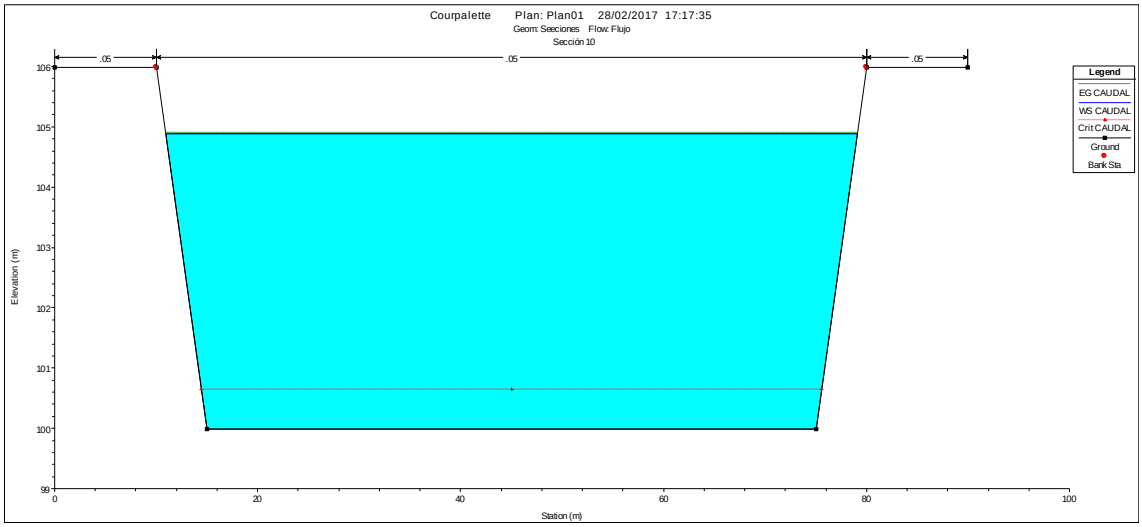


Ilustración 32. Cuarta sección final del río Courpalete después de la modelización.

Cross Section Output

File Type Options Help

River: Canal Courpalett Profile: CAUDAL

Reach Un tramo RS: 10 Plan: Plan01

Plan: Plan01 Canal Courpalett Un tramo RS: 10 Profile: CAUDAL

E.G. Elev (m)	104.90	Element	Left OB	Channel	Right OB
Vel Head (m)	0.01	Wt. n-Val.		0.050	
W.S. Elev (m)	104.89	Reach Len. (m)			
Crit W.S. (m)	100.64	Flow Area (m2)		314.20	
E.G. Slope (m/m)	0.000036	Area (m2)		314.20	
Q Total (m3/s)	100.00	Flow (m3/s)		100.00	
Top Width (m)	68.17	Top Width (m)		68.17	
Vel Total (m/s)	0.32	Avg. Vel. (m/s)		0.32	
Max Chl Dpth (m)	4.90	Hydr. Depth (m)		4.61	
Conv. Total (m3/s)	16663.5	Conv. (m3/s)		16663.5	
Length Wtd. (m)		Wetted Per. (m)		72.76	
Min Ch El (m)	99.99	Shear (N/m2)		1.53	
Alpha	1.00	Stream Power (N/m s)		0.49	
Frctn Loss (m)		Cum Volume (1000 m3)			
C & E Loss (m)		Cum SA (1000 m2)			

Errors, Warnings and Notes

Tabla 10. Resultados de la cuarta sección final después de la modelización.

Si nos apoyamos en los resultados del canal del río *Sena* para deducir el coeficiente C de *Chézy* se obtiene lo siguiente:

$$C = v\sqrt{\frac{p}{a.h}} \qquad \text{(Ecuación 20)}$$

p = Perímetro mojado = 728,26 m

a = Área mojada = 1007,41 m2

Rh = a/p = 1,38 m

v = 0,30 m/s

Sustituyendo valores C = 21,26

Ahora se puede deducir con la fórmula de *Chezy* el valor de la velocidad y del caudal circulante en el canal de *Courpalette*:

P = Perímetro mojado = 72,76 m

A = Área mojada = 314,15 m^2

Rh = Am/Pm = 4,32 m

H = Pendiente del canal = 0,000036 m/m

Sustituyendo valores en las ecuaciones (Ecuación 22) y (Ecuación 7) se obtienen la velocidad y el caudal:

$$V = C\sqrt{R\,H} = 21,26.\sqrt{4,32 \times 0,000036} = 0,27\ {}^{m}\!/_{s}$$

Q = V A = 314,15 (m^2) x 0,27(m/s) = 84,82 m^3/s

Valor bastante aproximado al deducido por la aplicación HEC-RAS, de valor 0,32 m/s.

El error cometido es del 16% aproximadamente, que se considera bastante aceptable si se considera el orden de magnitud.

No obstante, como apuntaba *Chézy*, la observación del contorno de la conducción que se vaya a utilizar como comparativo para el diseño juega un papel importante a la hora de diseñar el canal en función de la velocidad y del caudal que queramos llevar.

5.1.3 Charles Bossut (1730 – 1814)

Biografía sucinta

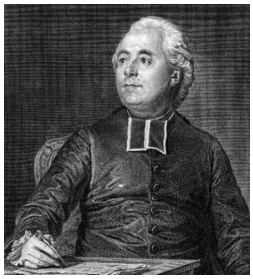


Ilustración 33. Retrato de Charles Bossut

Bossut, matemático francés y colega de los enciclopedistas, nació en *Tartaras, Loyre*. A los seis meses de nacer se quedó huérfano de padre y fue enviado a un orfanato, en él vivió hasta los seis años, ya que el hermano de su padre lo llevó a su casa. Fue educado en el Colegio Jesuita de *Lyon* donde ingresó a los catorce años.

Allí comenzó su formación en M atemáticas con el reconocido maestro *Père Béraud*, para luego continuar sus estudios religiosos convirtiéndose en el *Abbè Charles Bossut*.

Clairaut y *D´Alembert*, dos prestigiosos matemáticos detectaron su gran talento, convirtiéndose en alumno directo de este último, por lo que con tan solo 22 años fue designado profesor de Matemáticas en la escuela de ingeniería militar de *Mézières*. Con *D'Alambert* colaboró en la parte matemática de la "*Encyclopédie*".

Borda y *Coulomb* fueron sus alumnos. Bossut fue famoso por la escritura de libros de texto de matemáticas que fueron usados en toda Francia. El más famoso fue "*Cours complet de mathematiques*" escrito en 1765 y "*Mecánica en général*" (1792).

Con *Euler* y *Bernoulli* compartió distinciones con ellos como matemático brillante. Con *Euler* un premio de la Academia de Ciencias de París por su trabajo en la mecánica aplicada a los buques y sobre la resistencia al movimiento planetario, un libro de memorias de 1762 en el que ganó *Bossut* el premio de la Academia de

Ciencias por el trabajo sobre "*La resistencia de los fluidos al movimiento de los planetas*", y con *Bernoulli* otro de la Academia de *Lyon*. En 1768 fue nombrado miembro de la Academia de Ciencias y ocupó la cátedra en Hidrodinámica en el *Louvre* creada para él.

En el periodo de la Revolución *Bossut* perdió posición y propiedades que nunca logró recuperar en su totalidad, y se retiró de la vida pública abandonando el sacerdocio temporalmente.

Quizás su contribución más importante a la Hidráulica fue como maestro. En su etapa de profesor en *Mézières* declaró que su responsabilidad era "enseñar a los jóvenes ingenieros la Mecánica de Fluidos, la cual es necesaria para su profesión" (Riaño Valle, 2016). Es así el primero que introduce esta disciplina en los estudios de ingeniería.

En 1771 escribió un "*Tratado elemental de hidrodinámica*" en dos volúmenes el cual fue ampliado y publicado en dos ocasiones. Este fue dividido en tres partes: Hidrostática, Hidráulica Teórica y la Hidráulica Experimental. En esta última estudia con profundidad el flujo de agua por orificios y destaca la importancia de considerar el rozamiento contra sus paredes. También estudia el movimiento del agua en canales y ríos. Aunque su título es "Hidrodinámica" en realidad los aspectos tratados son de Hidráulica.

En 1775 participó con *D'Alembert* y *Condorcet* en experimentos sobre la resistencia de fluidos.

El primer volumen trataba sobre el ordenamiento y tratamiento de los temas, y brindaba su visión particular, de forma original, sobre la hidráulica de su tiempo. La novedad del segundo volumen estribaba en sus comentarios sobre la dificultad de los experimentos a gran escala contra la falsedad de aquellos a escala demasiado pequeña, y que hoy día tienen total vigencia. Consideraba que la teoría y la experimentación debían de ir aparejadas como guías principales, ya que se apoyaban una a la otra.

Bossut, junto a *D`Alembert* y *Condorcet*, dirigió diferentes estudios acerca de la resistencia de los fluidos sobre cuerpos de diferentes formas. Los objetivos de estas investigaciones estaban dirigidos a mejorar el sistema de navegación dentro del país. Eran tomados en cuenta tanto la forma como las proporciones de la sección transversal. Las investigaciones fueron hechas en tanques de ensayo de 100 pies de largo, 50 pies de ancho y siete pies de profundidad. La principal conclusión a la que llegaron fue que la resistencia sobre los cuerpos aumenta en la medida en que los canales son más estrechos. Esto ya había sido demostrado por *Benjamín Franklin* en tanques de prueba en miniatura.

En 1802, es publicado un nuevo libro de *Bossut* en dos volúmenes, "*General History of Mathematics from the Earliest Times tothe Middle of the Eighteenth Century*" (Historia general de las Matemáticas desde los primeros tiempos hasta la mitad del siglo XVIII.) donde, en su capítulo V, hace un interesante estudio sobre la famosa disputa entre *Newton* y *Leibniz* sobre la invención del Cálculo Diferencial.

Los últimos años de su vida los pasó solo y alejado de la familia. Nunca se casó ni tuvo hijos. A pesar de que fue reacio a la compañía de la gente fue reconocido por su trabajo en muchas academias científicas. Fue miembro de la Academia de Ciencias de *San Petersburgo*, *Turín* y *Bolonia*. Falleció en el año de 1814, en París (Riaño Valle, 2016).

Análisis y comprobaciones sobre su experiencia y teoría

Bossut realizó una gran variedad de experimentos sobre el movimiento del agua en los canales y tuberías. De particular importancia fueron sus experiencias acerca del comportamiento de 26 tuberías nuevas de hojalata con diámetros entre 1 y 2 pulgadas parisinas (una pulgada parisina equivale a 2,707 cm) donde establece las siguientes teorías y leyes (Mariano Vallejo, 1833):

1.- La velocidad media U, es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la rasante hidráulica J, es decir, que las pérdidas de carga por unidad de longitud son proporcionales al cuadrado de la velocidad. (Pérez Franco, 2001)**.**

Observó que el efecto que puede tener la fricción y las sinuosidades en las tuberías es tan considerable que la cantidad de agua descargada puede ser de hasta veinte o treinta veces menor que lo que daría la teoría.

2.- Cuando disminuye la altura de un reservorio o depósito de agua, la disminución en la descarga del agua es menos sensible.

M. Bossut demostró que, cuando disminuyen los niveles de agua de un depósito, la disminución en la descarga del agua es menos sensible.

Para corroborar dicha ley, en esta tesis se analiza una red que consiste en un embalse de altura variable de 0 a 10 m, una conducción de fundición de diámetro 100 mm con una longitud de 1.100 m y un depósito de descarga de cota de solera fija.

Se estudia la red en los casos en que el embalse sube su lámina de cada metro y se observan los caudales resultantes de descargas y las pérdidas de carga ocasionadas.

Para ello se utiliza la aplicación de EPANET (modelizador de redes), utilizando un coeficiente de fricción de *Hazen Williams* igual a 140.

Esquema de cálculo es el siguiente:

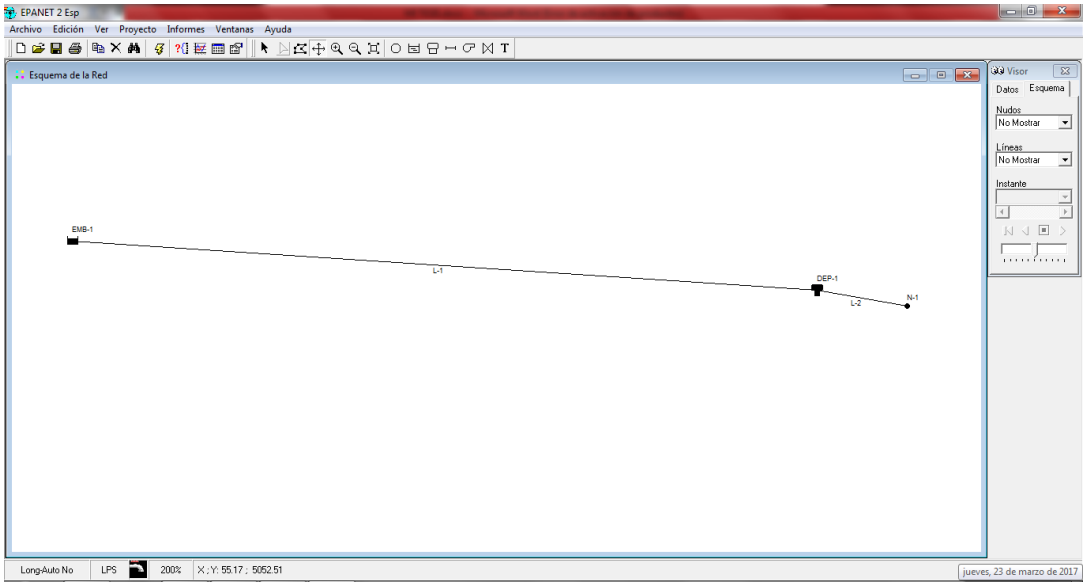


Ilustración 34. Esquema de cálculo para modelizar red

Los resultados arrojados en cada caso vienen reflejados en la siguiente tabla:

COTA EMBALSE (m)	COTA DEPOSITO (m)	CAUDAL Q (l/s)	VELOCIDAD V (m/seg)	Perd. Carga unit. m/Km	Perd. Carga Perd. Carga
100	91	7,18	0,91	0,021	9,00
101	91	7,60	0,97	0,021	9,01
102	91	8,00	1,02	0,021	9,02
103	91	8,39	1,07	0,021	9,03
104	91	8,76	1,12	0,021	9,04
105	91	9,12	1,16	0,021	9,05
106	91	9,46	1,20	0,021	9,06
107	91	9,80	1,25	0.020	9,07
108	91	10,13	1,29	0.020	9,08
109	91	10,44	1,33	0.020	9,09
110	91	10,75	1,33	0.020	9,10

Tabla 11. Resultados de la modelización utilizando EPANET.

De la tabla anterior se deduce que por cada metro que se suba la cota del embalse, el incremento del caudal descargado es relativamente pequeño con lo cual las velocidades y las pérdidas de carga unitarias apenas cambian. La descarga por metro de diferencia de altura del embalse varia en un 3% y en 10 m varia un 26%. Visto, al contrario, cuando se disminuye la altura del nivel del depósito de metro en metro, la descarga va siendo poco sensible, es decir no hay una gran variación en la descarga.

Si la descarga se hace a la atmósfera con los mismos datos de embalse y conducción, se tiene que, para un incremento de 1 m de lámina, el caudal pasaría de 6,36 l/s a 6,2 l/s, lo cual supone un 2,58 % en la disminución de descarga, y si fuera de 10 m, se tendría un 24,35 %.

3.- La descarga de agua disminuye a medida que el tubo se hace más largo, o cuando el número de sus curvaturas se incrementa.

Se estudia la red manteniendo la lámina de agua del embalse y aumentamos la longitud del tubo cada 100 metros, utilizando el caso anterior, manteniendo la cota del depósito de descarga.

Los resultados arrojados en cada caso vienen reflejados en la siguiente tabla:

COTA EMBALSE	COTA DEPOSITO	LONGITUD	CAUDAL Q	VELOCIDAD V	Perd. Carga unit.	Perd. Carga
(m)	(m)	(m)	(l/s)	(m/seg)	m/Km	Perd. Carga
100	91	1000	7,18	0,91	0,021	9,00
100	91	1100	6,82	0,87	0,021	8,18
100	91	1200	6,51	0,83	0,021	7,50
100	91	1300	6,23	0,79	0,021	6,92
100	91	1400	5,99	0,76	0,021	6,43
100	91	1500	5,77	0,76	0,022	6,00
100	91	1600	5,57	0,73	0,022	5,63
100	91	1700	5,39	0,71	0,022	5,29
100	91	1800	5,23	0,69	0,022	5,00
100	91	1900	5,08	0,67	0,022	4,74
100	91	2000	4,94	0,65	0,022	4,50

Tabla 12. Resultados de la modelización aumentando longitudes con EPANET

De la tabla anterior se deduce que, manteniendo las cotas del embalse y depósito, y el diámetro de la conducción, el caudal de descarga disminuye, a la vez que la velocidad y la pérdida de carga total en cada caso.

4.- En un canal abierto la fricción disminuye la velocidad en los canales rectangulares.

Para hacer esta comprobación calcularemos un mismo canal, pero con dos versiones en la que solo cambiaremos el coeficiente de rugosidad, en la que el primero tendrá menos asperezas que el segundo.

Para ello se utilizará la aplicación HCANAL y se comparan los resultados para comprobar esta ley de Bossut.

El canal tendrá unas dimensiones geométricas de 0,50 metros de ancho por 1,00 de altura y una pendiente del 5 %.

Hacemos circular un caudal de 10 m3/s en cada canal, de tal manera que el primero tendrá una rugosidad de Manning de n = 0,012 (revestimiento con cemento pulido) y el segundo de n = 0,025 (mampostería), para posteriormente comparar sus velocidades.

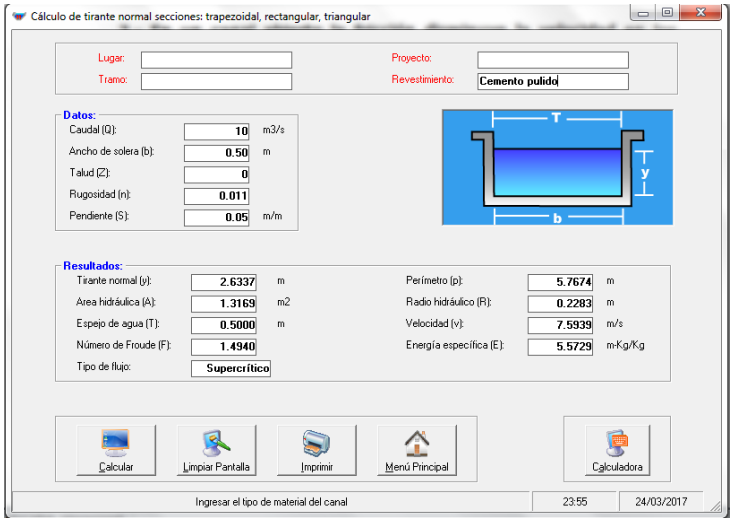


Ilustración 35. Resultados al transportar 10 m3/s en un canal revestido de cemento pulido.

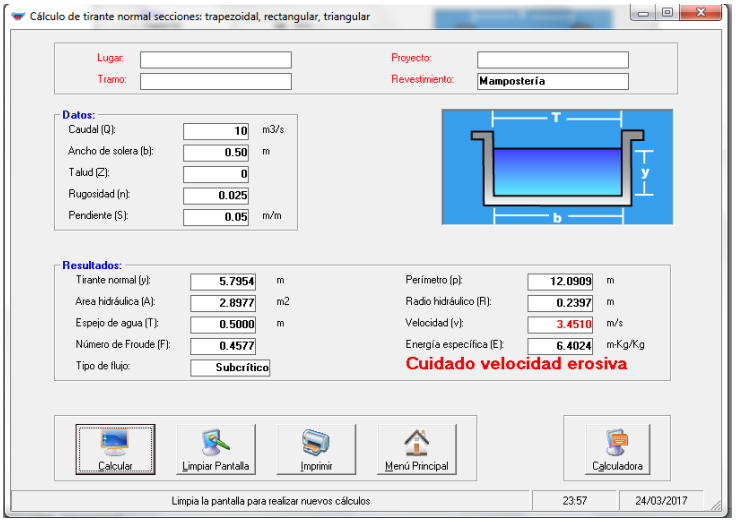


Ilustración 36. Resultados al transportar 10 m3/s en un canal de mampostería

Las paredes y el lecho del canal de mampostería generan más fricción que las del canal revestido de cemento pulido, por lo tanto, se comprueba según los resultados arrojados que al aumentar la fricción disminuye la velocidad.

Canal revestido de cemento → n = 0, 012 → menor fricción → V = 7,59 m/seg

Canal mampostería → n = 0, 025 → mayor fricción → V = 3,45 m/seg

Aquí queda demostrada la ley de Bossut, en la que, en el canal revestido de cemento, la fricción al ser menor la velocidad es mayor, pasando a ser un régimen supercrítico, en la que el número de Froude es F >1, con lo que el calado es más pequeño a igualdad de caudal. En el segundo canal, el régimen es subcrítico, es decir, un régimen lento en la que el calado es mayor y el número de Froude F < 1.

5.- En una tubería, con la misma altura del reservorio, con cualquier declive y longitud, hay una variación muy notable en las descargas.

Se ha visto en la Ley 2, como con el reservorio a la misma altura y aumentando las longitudes, las descargas iban disminuyendo sensiblemente. Con las pendientes pasa, al contrario, lo cual para ello se irá disminuyendo la cota del punto receptor de la descarga y se observan los resultados.

Suponiendo que se mantiene la lámina del depósito inicial y el punto de entrada a la tubería, y variamos la cota del punto de descarga, lo cual aumentamos las pendientes, se calcula el caudal descargado para cada caso. Con el mismo esquema de dicho apartado se han calculado las descargas.

Los resultados arrojados por la aplicación calctub del paquete SEPHIA son los siguientes:

COTA INICIAL	COTA FINAL	LONGITUD	PENDIENTE	CAUDAL Q	VELOCIDAD V	Perd. Carga unit.	Perd. Carga
(m)	(m)	(m)	%	(l/s)	(m/seg)	m/Km	Perd. Carga
120	100	1000	2	10,15	1,29	20	20
120	98	1000	2,2	10,66	1,36	22	22
120	96	1000	2,4	11,15	1,42	24	24
120	94	1000	2,6	11,62	1,48	26	26
120	92	1000	2,8	12,08	1,54	28	28
120	90	1000	3	12,51	1,6	30	30

Tabla 13. Resultados de la modelización aumentando pendientes con EPANET

En ellos se puede observar como al aumentar la pendiente del 2% al 3%, aumenta el caudal descargado, sin embargo, las velocidades no aumentan en la misma proporción.

5.1.4 Charles Augustin Coulomb (1736 – 1806)

Biografía sucinta

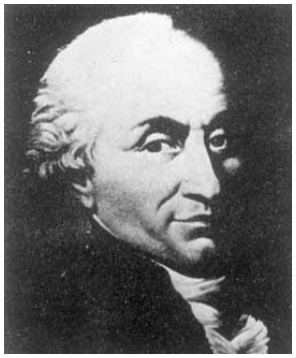


Ilustración 37. Retrato de Charles Augustin Coulomb

Coulomb, físico francés que se inmortalizó por sus aportes en el campo de la electrostática. Se le recuerda por haber descrito de manera matemática la ley de atracción entre cargas eléctricas.

Realizó importantes aportes a la Hidráulica y ocupó importantes responsabilidades públicas relacionadas con este ámbito, poco conocido injustamente. Trabajó de consultor para la construcción de canales y superintendente general para las aguas y fuentes de Francia y finalmente inspector general de Instrucción Pública.

Nació en *Angoulême*, Francia, en el seno de una familia acomodada. Fue educado en el colegio de *Mazarin* donde alcanzó una formación sólida en Lenguaje, Literatura y Filosofía. Recibió también la mejor de la enseñanza disponible en Matemática, Astronomía, Química y Botánica. Fue educado en la *École du Génie en Mézieres* y se graduó en 1761 como ingeniero militar con el grado de primer teniente. Fue alumno de *Bossut*.

Coulomb sirvió en las Indias Occidentales durante nueve años, donde supervisó la construcción de fortificaciones en la Martinica como ingeniero militar, para regresar a Francia con la salud bastante deteriorada. Tras el estallido de la Revolución francesa fue sustituido de sus cargos y se retiró a su pequeña propiedad

en la localidad de *Blois*, donde se consagró a la investigación científica en compañía de su amigo *Borda* con quien había colaborado en el comité para el establecimiento de un nuevo sistema de pesos y medidas.

Su contribución no solo se limitó a sus trabajos sobre Electricidad y Magnetismo, contribuyó también al desarrollo del campo de la ingeniería civil aportando investigaciones en la Resistencia de Materiales, Mecánica de Suelos y las fuerzas sobre vigas. De esta manera contribuyó al desarrollo de la ingeniería civil.

Algunos autores al referirse a sus aportes a la Hidráulica lo ubican en el siglo XIX, a pesar de que su vida transcurre casi en su totalidad en el siglo XVIII, debido a que su mayor contribución está contenida en su memoria publicada en 1800 con el título «*Expériences destinées à déterminer la cohérence des fluides et les lois de leur résistancedans les mouvements tres lents*» (Experiencias destinadas a determinar la coherencia de los fluidos y las leyes de su resistencia en los movimientos muy lentos).

En esta obra describe los resultados de las pruebas que realizó sobre diferentes cuerpos sumergidos suspendidos de un alambre de torsión de latón. Correlaciona la disminución de la amplitud de la oscilación con la resistencia usando líquidos de diferentes viscosidades y discos de diferentes rugosidades.

Analiza el resultado de las mediciones realizadas y con ella expone una expresión de la forma $\mathbf{av + bv^2}$, que fue atribuida a Newton, no obstante, el dio su propia justificación.

Explica que existen dos clases de resistencias:

- Una debida a la coherencia de las moléculas que se separan unas de otras en un tiempo dado y proporcional a su velocidad.
- La otra debida a la inercia de las moléculas arrastradas que chocan con las irregularidades siendo entonces proporcional a su número y a su velocidad y consecuentemente al cuadrado de esa velocidad.

Hizo una observación muy interesante al respecto, en la que dijo que el cambio en la viscosidad del fluido afecta solo al primer coeficiente y el segundo se mantiene constante para un cuerpo dado. En 1801 lo nombran presidente del Instituto de Francia (antiguamente la Academia de Ciencias de París) y en 1806 murió.

El nombre de este importante físico se encuentra grabado en la Torre *Eiffel* con el número 44, junto con otras 71 personalidades importantes. Un cráter de la Luna lleva el nombre de *Coulomb* en su honor (Riaño Valle, 2016).

Aportación y desarrollo de su experiencia

A continuación, se expone en esta tesis doctoral experimentos y análisis de estos que llevaron tanto a *Newton* como a *Coulomb* a sus conclusiones (Libes, 1821).

El planteamiento inicial es el de suponer un cuerpo que se mueve en un fluido encuentra continuamente en su recorrido moléculas que ofrecen resistencia para ser desalojadas. Estas moléculas resisten como si fueran otro cuerpo, en virtud de su inercia, y, por otro lado, en virtud de la fuerza de cohesión que une las pequeñas partículas del fluido, ya que un cuerpo en su movimiento dentro del fluido deberá emplear una fuerza para vencer la que une a estas mismas moléculas, intentando separarlas.

Para evaluar la resistencia que nace de la inercia de los fluidos se deberá estudiar esta en función de la superficie exterior del móvil, dado que la resistencia de los fluidos parece aumentar, en igualdad de circunstancias, proporcional a esta superficie.

Como demostración y experimento, si se toma un molinillo de cuatro alas, a las que se les da diversas inclinaciones mientras que por él pasa el aire, después de ponerse en movimiento con la misma fuerza, se observa que el número de vueltas es tanto menor cuando las alas presentan mayor superficie.

De este simple experimento, se deduce que cuanta mayor superficie presenta un cuerpo al fluido en el que se mueve, tanto mayor número de moléculas del fluido desalojará en el mismo tiempo, y por consiguiente experimenta mayor resistencia.

Asimismo, en igualdad de circunstancias la resistencia es proporcional a su densidad, debido a que el número de moléculas que ha de desalojar el cuerpo que se mueve dentro del fluido aumenta en razón de la densidad del fluido.

Un segundo experimento consiste en hacer oscilar varios péndulos de la misma longitud y diámetros en el aire, y puede observarse como todos harán el mismo número de oscilaciones por experimentar todos la misma resistencia.

Newton realizó experimentos parecidos para estudiar el movimiento de los péndulos de plomo, hierro y madera, de diferentes diámetros, en el aire, agua y mercurio, en los que la variación de los arcos de oscilación llevó a Newton a concluir lo siguiente:

"La resistencia de los fluidos es proporcional a su densidad, al cuadrado de los diámetros de los péndulos y al cuadrado de sus velocidades".

Newton obtuvo los mismos resultados haciendo los experimentos con bolas de plomo cubiertas de cera para darle densidades diferentes, con el objeto de comparar el tiempo que empleaban en caer por un tubo de una altura dada lleno de fluidos de diferente densidad.

Los numerosos experimentos realizados por *Desaquilliers* y *Hauxhee* confirmaron los resultados obtenidos por *Newton*, para ello dejaron caer de lo alto de la cúpula de la iglesia de san Pablo de Londres, bolas de diferentes diámetros y diversas densidades, y observaron que el tiempo de su descenso era tanto mayor cuando en igualdad de volumen eran más ligeras, es decir, a menor densidad, y, por otro lado, a igualdad de densidad si tenían mayor diámetro.

La altura de la cúpula es de 89 metros (cerca de 272 pies).

A continuación, los datos y resultados de ese experimento:

Peso de las balas en centígramos.	*Diámetros en centímetros.*	*Tiempo de la caída.*
Centígramos.	*Centímetros.*	*Segundos.*
517,7	14,234	22,125
526,35	14,0717	21,625
679,68	14,3423	19,375
730,12	14,4235	18,75
828,36	14,0527	17,25
7909,2	13,8011	7,125
8071,2	14,8835	7,
9558,	14,6670	6,5
13859,1	15,0180	6,125
15452,1		6

Tabla 14. Resultados experimentos de Desaquilliers y Hauxbee.

Por otro lado, y coincidiendo con *Newton*, *Lambert* apoyándose en los resultados de la tabla anterior dedujo que la resistencia de los fluidos era proporcional a su densidad, a los cuadrados de los diámetros de las balas y a los cuadrados de las velocidades de los cuerpos.

El razonamiento de porque la resistencia que un fluido opone en virtud de su inercia es, en igualdad de circunstancias, proporcional al cuadrado de la velocidad del objeto que se mueve a través del fluido, se puede ver con el planteamiento de que un cuerpo que tenga mayor velocidad recorre más espacio en igual tiempo, por lo que en su trayectoria encontrará mayor número de moléculas de fluido, y desde este punto de vista la resistencia es proporcional a la velocidad. Pero si el móvil tiene mayor velocidad tiene también mayor fuerza, por lo que choca con mayor fuerza contra cada molécula del fluido que encuentra, perdiendo fuerza debido al número de moléculas que desaloja, lo que hace que la resistencia del fluido este en razón del cuadrado de la velocidad.

El célebre matemático *Euler* contradecía tal afirmación, por lo que indujo a *Schulgar* a realizar nuevos experimentos con relación al ascenso y descenso de una bala de plomo arrojada por una escopeta de viento. Sus resultados fueron los siguientes:

Altura del mercurio correspondiente á la presion del aire.	Duracion de la subida y de la bajada.
Centrímetros.	Segundos.
23,75	12,5
22,88	12
17,108	11
12,321	10
6,173	7,5

Tabla 15. Resultados experimentos de Schulgar

Lambert utilizando estos datos y aplicando el cálculo, confirmó la deducción que la resistencia que se origina de la inercia era proporcional al cuadrado de las velocidades, conclusión a la que también habían llegado *Desaquilliers* y *Hauxhee* con sus experimentos hechos en la Iglesia de San Pablo en Londres.

A continuación, se expone como *Coulomb* llegó a determinar que la resistencia a que da lugar la cohesión de las moléculas de un fluido es proporcional a la velocidad (Coulomb, 1800).

En los movimientos rápidos esta resistencia no es comparable a la que proviene de la inercia, pero en su movimiento lento, cuando un cuerpo se mueve en un fluido separa sus moléculas sin transmitirles una velocidad sensible, la resistencia que proviene de la cohesión del fluido puede igualar e incluso superar la que nace de la inercia si el cuerpo se mueve con extrema lentitud.

El aparato del que se ha servido para sus experimentos es un vaso de 8 dm de diámetro, y de 4 dm de altura (Ilustración 38); este vaso está lleno de agua, y en ella oscila por medio de la fuerza de torsión del hilo de suspensión **ag**, el cuerpo cuya resistencia se quiere evaluar.

En la parte superior del apoyo **NLK** hay un pequeño círculo fe agujereado en su centro en el que hay una clavija que termina en **a** unas pequeñas pinzas.

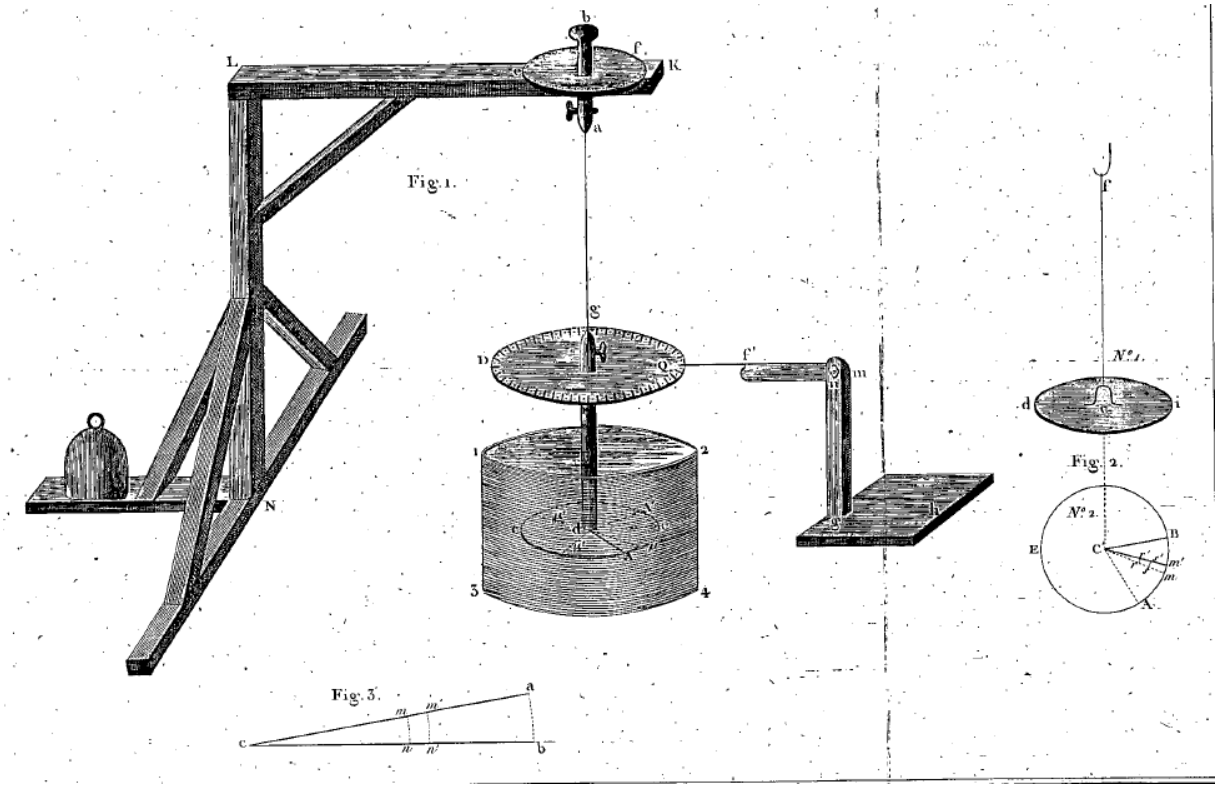


Ilustración 38. Péndulo de torsión de Coulomb.

La extremidad superior **a** del hilo de suspensión **ag** está cogida por estas pinzas, la inferior del mismo hilo lo está por otras **g** que corresponden en el centro del disco **DQ**. Estas pinzas están colocadas en el extremo superior de un cilindro de cobre **g** cuyo diámetro es de 10 a 12 mm; este cilindro atraviesa al disco perpendicularmente a su plano; el eje del cilindro es el mismo que el del disco; la extremidad inferior del cilindro se sumerge 4 ó 5 cm en el agua.

El disco **DQ** se halla así suspendido horizontalmente encima de la superficie del agua, y la circunferencia de este disco está dividida en 480 grados. Cuando se halla en quietud, lo que sucede cuando la torsión del hilo es nula se coloca el indicador **fQ** sobre el punto o de la división del disco. La pequeña regla **f`m** puede elevarse ó alargarse a discreción alrededor de su eje **n**, y el pie **fmg`h** se transporta alrededor del disco al punto en que esté el **o**.

Se colocan debajo del cilindro **gd** los planos y los cuerpos cuya resistencia se intente examinar; y se hace volver ligeramente el disco **DQ** sosteniéndole con las dos

manos hasta a una ligera distancia del indicador, sin desarraigar la posición vertical del hilo de suspensión.

Se abandona en seguida el disco a sí mismo; la fuerza de torsión lo hace oscilar, y se observa la sucesiva disminución de las oscilaciones.

Coulomb se sirve para estos experimentos de la fuerza de torsión (llámese fuerza de torsión el esfuerzo que hace un hilo para volver a su primer estado habiendo sido torcido) de un hilo de latón. Esta fuerza es proporcional al ángulo de torsión; porque si se suspende un cuerpo cualquiera de un hilo de metal, se halla que por grandes que sean las oscilaciones que hace el cuerpo al rededor del eje vertical formado por el hilo de suspensión, la duración de cada oscilación es siempre igual: de lo que se sigue que el momento de la fuerza de torsión es siempre proporcional a la torcedura.

Partiendo de este principio, *Coulomb* logra con el auxilio de la experiencia la fuerza de torsión representada por un peso conocido; lo que le conduce a determinar por el cálculo el momento de la fuerza de torsión, lo cual compara en seguida en los movimientos oscilatorios con la resistencia de los fluidos.

La ley que la teoría parece indicar, y que está efectivamente confirmada por la experiencia, consiste en que cuando un cuerpo en movimiento choca con las moléculas de un fluido experimenta dos especies de resistencia; una que proviene de la inercia del fluido, y que como se ha dicho anteriormente es proporcional al cuadrado de la velocidad; la otra que proviene de la cohesión, la que es proporcional a la simple velocidad.

Si por la naturaleza de los experimentos que se ejecutan, el término proporcional al cuadrado de velocidad se desvanece, como cuando un plano se mueve en la dirección de su superficie muy lentamente, la fórmula se reduce a un solo término que es proporcional a la simple velocidad.

Primer experimento. *Coulomb* fijó horizontalmente por medio de un tornillo debajo del cilindro en **d**, un círculo de hojalata de 195 mm de diámetro. El sistema

suspendido por el hilo de latón se componía del disco, del cilindro **gd**, del platillo de hojalata **AA'c**, e hizo cuatro oscilaciones en 97s.

Primer ensayo. Fijado el punto de escape a 192º del punto o de torsión, la amplitud de las oscilaciones, después de diez se halló reducida a 52° ,5.

Segundo ensayo. El escape a 13º, 8 después de diez oscilaciones a 3°,3.

Utilizó la fórmula:

$$\frac{\log a - \log b}{10} = \mathrm{K}$$ **Ecuación 26**

El primer ensayo da por la fórmula:

$$\frac{\log 192 - \log 52{,}5}{10} = 0{,}0565$$

El segundo ensayo da por la fórmula:

$$\frac{\log 13{,}8 - \log 3{,}3}{10} = 0{,}05571$$

En el primer ensayo el punto de escape estaba a 192º del punto o; en el segundo no estaba más que a 13°8 del mismo punto: así la amplitud de la oscilación en el primer ensayo era cerca de catorce veces mayor que en el segundo; y no obstante esto se halla que después de diez oscilaciones la diferencia de los logaritmos de las amplitudes dividida por el número de oscilaciones es casi exactamente la misma (valor K). De aquí se puede deducir que la resistencia fue proporcional a la velocidad, y que el término que expresa la parte de la resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad no alteró sensiblemente el movimiento del plano.

Segundo experimento. Conforme al proceder del antecedente experimento Coulomb fijó bajo el cilindro un disco de hojalata de 140 mm de diámetro; hizo cuatro oscilaciones en 92 s. Muchos otros experimentos hechos desde 200° hasta 8º le han manifestado que la diferencia de los logaritmos de las amplitudes de diez oscilaciones sucesivas, dividida por 10 era cualquiera que fuera la amplitud de la oscilación igual a 0,021.

Tercer experimento. *Coulomb* fijó bajo el mismo cilindro por su centro un círculo de hoja de lata de 119 mm de diámetro. El sistema hacia cuatro oscilaciones en 91 s, Coulomb obtuvo por diferencia de las amplitudes de las oscilaciones, después de diez oscilaciones divididas por 10, la cantidad 0,0135.

Estos experimentos que *Coulomb* emplea en seguida para determinar el coeficiente de la velocidad en la fórmula que representa la parte de la resistencia del fluido proporcional a la simple velocidad, le conducen a inferir que la resistencia de los fluidos en los movimientos lentos es representada por dos términos el uno proporcional a la simple velocidad, y el otro al cuadrado de la velocidad.

Coulomb quiso investigar si: ¿Cuándo un cuerpo se halla en movimiento dentro de un fluido, la naturaleza de la superficie influye en la resistencia?

Para resolver esta cuestión, *Coulomb* cubrió la superficie de un circulo de hojalata de una capa de sebo, cual después saco en parte a fin de que no aumentara sensiblemente el espesor del círculo; hizo oscilar este círculo en agua de la misma manera que en los experimentos precedentes: observó con cuidado la sucesiva disminución de las oscilaciones, y halló exactamente la misma por los mismos grados de amplitudes de oscilaciones, que cuando la superficie no tenía tal capa.

Por medio de un tamiz esparció sobre la capa de sebo arenilla en polvo, la que quedó adherida a la superficie; y halló un aumento casi insensible en la resistencia de la misma superficie, por lo tanto, confirma que la resistencia no se incrementa sensiblemente aumentando la rugosidad de la superficie.

Coulomb dedujo de este experimento que **la parte de la resistencia proporcional a la simple velocidad se debe a la cohesión de las moléculas del fluido entre sí, y no a la adherencia de estas con la superficie del cuerpo**: porque a la verdad, cualquiera que sea su calidad, está sembrado de una infinidad de desigualdades en que se alojan y fijan moléculas de los fluidos. Es decir, que, en movimientos extremadamente lentos, la parte proporcional al cuadrado de la velocidad es insensible, y por lo tanto la resistencia es proporcional solamente a la velocidad simple.

Asimismo, *Coulomb* quiso determinar si la mayor o menor presión de un fluido sobre un cuerpo sumergido aumentaba la resistencia. Para ello realizó experimentos que prueban que cuando un cuerpo se mueve sumergido en un fluido, la presión o la altura del fluido encima del cuerpo no aumentan sensiblemente la resistencia, y de consiguiente que la porción de esta resistencia proporcional a la velocidad en nada es comparable al roce de los cuerpos sólidos, el que siempre es proporcional a la presión.

Muchas de las fórmulas propuestas eran en general monómicas, pero *Coulomb* con sus experimentos sentó un precedente para otros investigadores tales como *Prony*, *Eytelwein*, *J.F. d'Aubuisson* de *Voisins* y *J Weisbach* en las que propusieron fórmulas binómicas para expresar las pérdidas de carga o resistencias en tuberías tipo:

$$r.J = a.U + b.U^2$$ **Ecuación 27**

R = Radio interior de la tubería

J = Rasante hidráulica

U = Velocidad media de la circulación

5.1.5 Pierre Louis Georges Dubuat (1734 – 1809)

Biografía sucinta

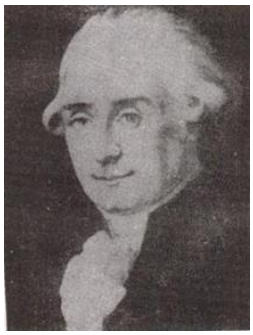


Ilustración 39. Retrato de Pierre Louis Georges Du Buat

Nació en *Tortizambert*, *Normandy*, Francia, en la casa de *Buttenval*, segundo hijo de un noble, educado en París, donde se convirtió en un ingeniero militar a la edad de diecisiete años. En 1787 ascendió al rango coronel, del que renunció para aceptar el nombramiento como teniente. Sus primeras tareas estuvieron relacionadas con canales, costas, puertos y las obras de fortificación en el Norte de Francia.

En 1758 se casó con una nativa de *Condé*, cerca de Valenciennes, en la frontera con Bélgica, con la que tuvo 11 hijos. Al morir su hermano mayor en 1787, heredó de su difunto padre el título nobiliario de conde; pero con la llegada de la Revolución perdió sus títulos y propiedades, viéndose obligado en 1793 a huir con su familia a Bélgica, Holanda y finalmente a Alemania. En 1802 regresó a *Vieux-Condé* en donde una parte de su herencia le fue restaurada.

La parte analítica de los escritos de *Dubuat*, fue quizás más efectiva que las de los contemporáneos como *Jean Charles Borda* y *Charles Bossut*, porque se ocupó ampliamente de las cuestiones relacionadas con la resistencia límite, velocidad, flujo inferior, desbordamiento y remanso. Pero fue en sus trabajos experimentales en los que destacó. Los resultados de sus cerca de 200 experimentos sobre el flujo en tuberías, canales artificiales y los arroyos naturales estaban concebidos para que fueran utilizados por los ingenieros de las siguientes generaciones (Riaño Valle, 2016).

también realizó 100 mediciones sobre la distribución de la presión alrededor de los cuerpos y buscó, a través de sus hallazgos desarrollar una nueva forma similar a la de *Henri Pitot*.

El aporte que hizo *Dubuat* a la Hidráulica en general y al estudio de las pérdidas de carga por rozamiento, es extraído de su obra "*Principes d'hydraulique*" (Principios de la Hidráulica). Para ello realizó experimentos con tubos nuevos de hojalata de una a dos pulgadas parisinas (1 pulgada parisina = 2,707 cm) en forma de sifón.

Murió en *Vieux-Condé*, *Flanders* (ahora parte del norte de Francia), el 17 de octubre de 1809.

En las investigaciones anteriores realizadas por *Bossut*, no se deduce ningún principio general o fórmula de la que se podría obtener la cantidad de agua descargada por tuberías o canales. Para poder resolver este tipo de problemas ingenieriles, los casos tenían que estar comprendidos en los límites de los contenidos de sus tablas, escasos de por sí, dado que sus experimentos no fueron lo suficientemente numerosos ni variados como para sentar las bases de cualquier norma general, y muchísimo menos para llevar a la perfección a la Hidráulica (Biography, 2008).

Aportación y desarrollo de su experiencia

En la parte histórica de esta tesis, se va a mostrar de forma lo más completa posible la procedencia de los trabajos realizados por *Chevalier Dubuat*, mostrando su criterio para interpretar su visión sobre la determinación de la resistencia por fricción al paso de un fluido por una conducción y la fórmula general que obtuvo para expresar en todos los casos la velocidad del agua, tanto en la circulación por un canal como por una tubería.

Se procederá a dar una visión general de las etapas por las que se obtuvo esta fórmula y se aplicará a un ejemplo práctico, utilizando dicha fórmula con los métodos actuales de resolución, ya que en esa época se resolvían apoyándose en copiosas tablas, las cuales se mostrarán a modo de curiosidad e información.

Posteriormente se mostrarán también los experimentos realizados por *Dubuat* con sifones, para el estudio de la resistencia que opone el rozamiento cuando circula el agua en las conducciones que componen dichos sifones.

Once años después de que *Chezy* expresara en su fórmula que la resistencia de fricción es proporcional a la velocidad media de la corriente, *Dubuat* en sus obras clásicas "*Principes d' Hydraulique*" lo explicaba como sigue: "Las resistencias a la fricción serán proporcionales al cuadrado de las velocidades del agua, porque tales resistencias se pueden considerar producidas por el choque del agua contra las asperezas del fondo; y se sabe que el choque del agua es proporcional a la caída debida a la velocidad y, por tanto al cuadrado de la velocidad. La palabra "fondo" sugiere que *Dubuat* pensaba en canales, pero aceptaba el mismo principio para tuberías.

Para una mejor explicación del criterio de *Dubuat* en relación con la pérdida de carga por fricción, se tienen las siguientes (Ilustración 40) e (Ilustración 41):

Si se tiene un tubo CD de longitud L, que lleva agua con una velocidad media U, donde la diferencia de nivel entre la superficie del agua del depósito A que alimenta el tubo y la salida de este, que puede desembocar a la atmósfera libre o en otro depósito B tiene un valor h, este se puede considerar como la carga total (desnivel 1-5 entre láminas de agua).

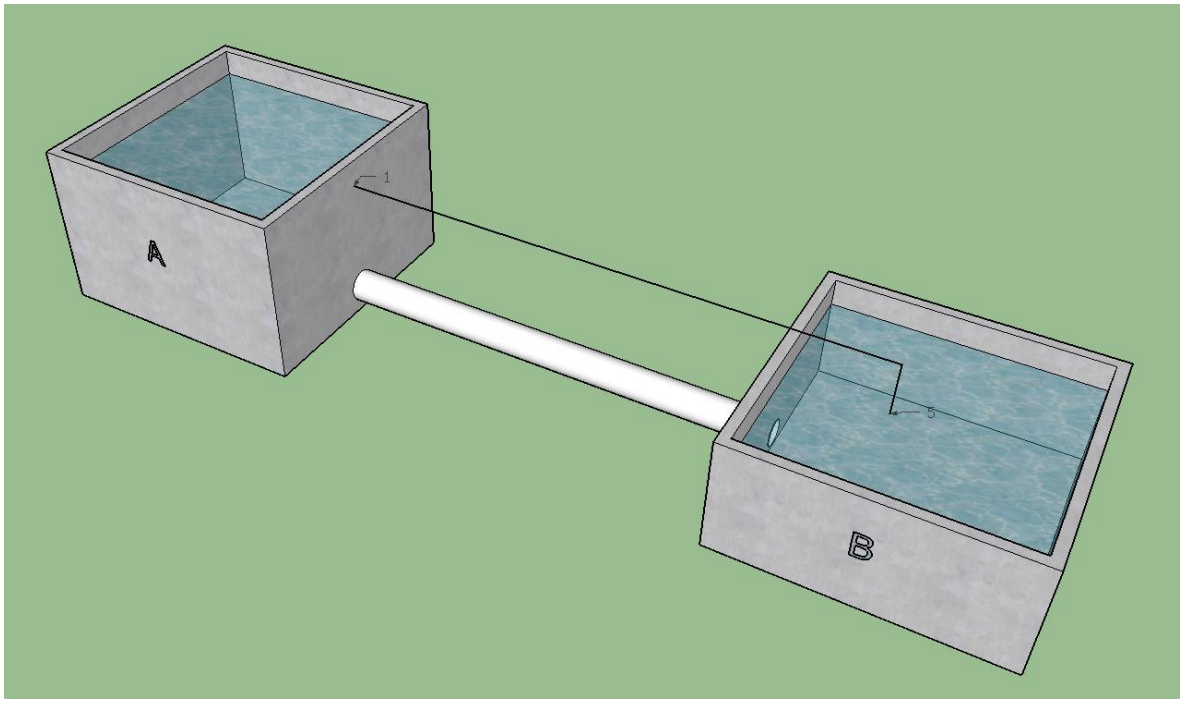


Ilustración 40. Croquis para el planteamiento de las pédidas de carga según Dubuat en 3D.

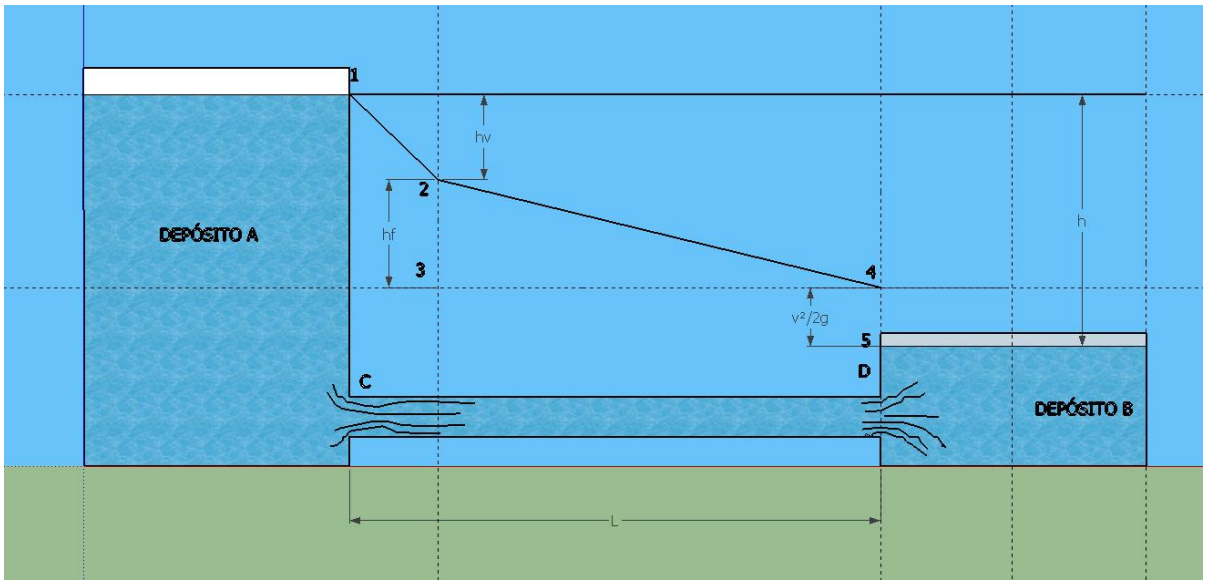


Ilustración 41 Croquis para el planteamiento de las pédidas de carga según Dubuat en 2D.

Según *Dubuat*, esta carga h es una fuerza motriz que puede considerarse dividida en dos partes a saber:

- hv que se emplea para imprimir la velocidad del fluido.
- hf que se emplea para vencer la resistencia que resulta del movimiento en toda la longitud de la conducción.

Si la entrada C del tubo hubiese tenido una conformación abocinada, que acompañara a la corriente, la pérdida de carga provocada seria $U^2/2g$, pero como Dubuat utilizaba una entrada recta con respecto a la pared del depósito, esta provocaba una contracción de vena considerable, y por lo tanto la pérdida de carga resultante era mayor. Según ensayos realizados por *Bossut* anteriormente, con orificios de salida en depósitos y aditamientos cilíndricos, la velocidad de salida teórica $\sqrt{2gh}$, debería reducirse multiplicándola por el factor $\eta = 13/16$, por lo que Dubuat consideró que, para vencer la inercia del fluido que esta dentro del tubo, se requiere de la carga $U^2/2g\eta^2$, lo que quiere decir que la pérdida de carga provocada por esa entrada recta tendría ese valor. Como la carga que induce la velocidad U es $U^2/2g$, la parte de carga sobrante a saber es (desnivel 1-2):

$$h_v = \frac{1}{\eta^2}\frac{U^2}{2g} - \frac{U^2}{2g} = \left(\frac{1}{\eta^2} - 1\right)\frac{U^2}{2g}$$

$$h_v = \left(\frac{1}{\eta^2} - 1\right)\frac{U^2}{2g}$$ **Ecuación 28**

se habría gastado en producir torbellinos, como consecuencia inevitable de la expansión brusca de la vena después de su contracción.

La carga total h seria:

$$h = \frac{1}{\eta^2}\frac{U^2}{2g} - \frac{U^2}{2g} + h_f + \frac{U^2}{2g}$$ **Ecuación 29**

La segunda parte de la carga a saber, despejando hf seria la necesaria para vencer la resistencia de la pared del tubo al avance de la corriente:

$$h_f = h - \frac{1}{\eta^2}\frac{U^2}{2g}$$ **Ecuación 30**

El cociente $S = {h_f}/{L}$, *Dubuat* lo escribía de la forma ${1}/{S}$ y consideraba como pendiente ficticia, válida tanto para conductos cerrados como para canales, y es un factor que multiplicado por el peso del fluido contenido en un tramo de tubo de longitud unitaria, da la fuerza que equilibra la resistencia de las paredes en ese tramo.

Suponiendo que la resistencia por fricción h_f sea proporcional a U^2, la relación $S = {h_f}/{L}$, sugiere que ha de existir una proporcionalidad directa entre U y $\sqrt{S}$, de donde , con un razonamiento parecido al de *Chézy*, se llega a concluir que su fórmula es válida también para conducciones cerradas.

Para deducir la fórmula del cálculo de la velocidad, *Dubuat* tuvo en cuenta las siguientes consideraciones:

Utilizó la pulgada como unidad de longitud y el segundo como la unidad de tiempo, y expresó el declive de un canal o tubería con el término 1/S, en el que supuso que en la longitud una tubería o canal hay una caída de 1 pulgada.

Intentó encontrar la pendiente de un tubo de conducción cuando se conoce la altura del depósito y el lugar de descarga, por lo que pensó que se debía restar de la altura del depósito, la altura o carga de agua H debido a la velocidad real.

Basó su fundamento apoyándose en los experimentos que realizó *Bossut* con tubos de dos pulgadas de largo, con diferentes diámetros adicionados al orificio de salidas de descargas de depósitos y bajo diferentes columnas de agua.

Sus resultados los reflejó en la siguiente tabla:

Constant altitude of the water above the orifice.		Diameter of the tube.		No. of cubic inches discharged in a minute.
Feet.	Inches.	Lines.		
3	10	6	The tube not filled with the issuing fluid.	1689
		10		4703
		6		1293
		10		3598
		6		1222
2	0	10		3402
		6		935
		10		2603

Tabla 16. Contiene las cantidades de agua descargada por tubos cilíndricos de dos pulgadas de largo, con diferentes diámetros y bajo diferentes columnas de agua.

A partir de estos resultados concluyó lo siguiente:

1. Que los vertidos por diferentes tubos adicionales bajo la misma carga de agua son prácticamente proporcionales a las áreas de los orificios, o a los cuadrados de los diámetros de los orificios.

2. Que los vertidos de tubos adicionales del mismo diámetro bajo diferentes cargas de agua son casi proporcionales a las raíces cuadradas de las columnas de agua.

De ello deduce, a partir de los dos corolarios precedentes, en general, que las descargas durante el mismo tiempo, diferentes tubos adicionales, y bajo diferentes cargas de agua en el depósito, están el uno al otro casi en proporción compuesta de los cuadrados de los diámetros de los tubos, y las raíces cuadradas de las columnas de agua.

Para llegar a la conclusión del primer corolario, hizo los siguientes tanteos con las fórmulas:

$$Q = K \times D^n \qquad \text{Ecuación 31}$$

Introduciendo valores de n = 1,2…n, y despejando el valor de la constante K, para comprobar la proporcionalidad, llega a la conclusión de que n =2.

Para comprobarlo nos apoyaremos en la hoja de cálculo Excel, utilizando los datos y resultados de su experiencia (ver Tabla 16):

ALTURA CONSTANTE DEL AGUA SOBRE EL ORIFICIO	ALTURA CONSTANTE DEL AGUA SOBRE EL ORIFICIO EN PULGADAS.	DIAMETRO EN PULGADAS.	DIAMETRO AL CUADRADO	CAUDAL Q DESAGUADO EN PULG./MIN	$K = Q/D^2$	$K = Q / \sqrt{H}$
3 PIES Y 10 PULG.	46	6	36	1689	46,92	249,03
3 PIES Y 10 PULG.	46	10	100	4703	47,03	693,42
3 PIES Y 10 PULG.	46	6	36	1293	35,92	190,64
3 PIES Y 10 PULG.	46	10	100	3598	35,98	530,50
2 PIES	24	6	36	1222	33,94	249,44
3 PIES	46	6	36	1689	46,92	249,03
2 PIES	24	10	100	2603	26,03	531,34
3 PIES	46	10	100	3598	35,98	530,50

Tabla 17. Deducción del valor de proporcionalidad K para la demostración del primer y segundo corolario.

Como puede observarse en las dos últimas columnas, con el cuadrado de los diámetros, a igualdad de altura de agua, la proporcionalidad prácticamente se mantiene, y a diferentes alturas, la proporcionalidad se mantiene a igualdad de diámetros.

Dedujo, que la velocidad en pulgadas inglesas es:

$$V = 22{,}47.\sqrt{H} \qquad \textbf{Ecuación 32}$$

para tubos adicionales, por lo tanto

$$H = \frac{V^2}{22{,}47^2} = \frac{V^2}{505} \qquad \textbf{Ecuación 33}$$

es el resto que surge después de esta sustracción la considerada como un declive que se distribuye por toda la longitud del tubo. Al examinar teóricamente el cambio que experimentan las resistencias por un aumento de la velocidad, observó que aumentan en proporción a los cuadrados de la velocidad; mientras que los impulsos en todas las pequeñas asperezas se incrementan en la proporción de la velocidad; el número de partículas que impulsan también se aumenta en la misma proporción.

Dubuat, por lo tanto, supone la resistencia igual a $\frac{V^2}{m}$, siendo m una cantidad constante a ser determinada por experimento. Si g expresa la velocidad adquirida

por un cuerpo pesado al final de un segundo, $\frac{g^2}{s}$ será la fuerza aceleradora en relación con la pendiente 1/s. Pero desde el axioma fundamental, que cuando una corriente se mueve de manera uniforme, la resistencia es igual a la fuerza aceleradora obtuvo:

$$\frac{V^2}{m} = \frac{g^2}{s}$$ **Ecuación 34** y $$V.\sqrt{s} = \sqrt{m}.g$$ **Ecuación 35**

es decir, en el mismo tubo o el canal, el producto de la velocidad por el recíproco de la raíz cuadrada de la pendiente es una cantidad constante; y la fórmula principal para todas las velocidades uniformes es:

$$V = \frac{\sqrt{m}.g}{\sqrt{s}}$$ **Ecuación 36**

Dubuat procedió a examinar la ecuación anterior experimentalmente, a fin de determinar si $V.\sqrt{s}$ es en realidad una cantidad constante. Después de comparar juntos los resultados de muchos experimentos precisos, se encuentra con que los valores de $V.\sqrt{s}$, aunque tomada en el mismo tubo o canal, no son exactamente iguales, porque ellos aumentan un poco en la proporción con el aumento de velocidades; y por lo tanto llega a la conclusión, que las resistencias están en una proporción menor que el cuadrado de las velocidades. De ahí que el término $\sqrt{s}$ debería ser disminuido.

La fracción de la pendiente que *Dubuat* encontró para hacer $\sqrt{m}.g$ una cantidad constante, fue $\sqrt{s} - \log\sqrt{s+1{,}6}$, en el empleo de los logaritmos hiperbólicos. Sea x esta fracción; entonces tendremos:

$$VX = \sqrt{m}g$$ **Ecuación 37,** por la misma tubería o canal.

En tubos cilíndricos, la sección es el área de un círculo; y el perímetro de la sección es la circunferencia del círculo; y el cociente resultante de dividir el uno por el otro

es siempre una mitad del radio; o una media del radio multiplicado por la circunferencia es siempre igual al área de la sección. En canales rectangulares e irregulares, todavía hay una cierta línea, que, multiplicado por el perímetro de la sección, dará un área igual al área de la sección del canal. Esta línea, que puede ser llamado d, ha sido nombrada el radio medio de *Dubuat*.

Dado que las resistencias aumentan a medida que la relación del perímetro de la sección para el área de la sección crece, de modo que la cantidad m debe ser proporcional a d; y consecuentemente $\sqrt{m}.g$ debe ser proporcional a $\sqrt{d}$ para diferentes canales; y $\frac{\sqrt{m}.g}{\sqrt{d}}$ debería en todo caso ser una cantidad constante.

En el examen, mediante un experimento, si esto era realmente el caso, *Dubuat* encontró, que no era ni $\sqrt{m}g$ proporcional a $\sqrt{d}$, ni a ninguna potencia de d, sino que se incrementa cada vez menos a medida que aumenta $\sqrt{d}$. En canales muy amplios $\sqrt{m}g$ pasa a ser razonablemente proporcional a $\sqrt{r}$ pero en canales pequeños la velocidad disminuye mucho más que los valores de $\sqrt{r}$.

Dubuat atribuye este efecto a la viscosidad del agua, y se encontró que sus experimentos han sido completamente representados por la disminución de $\sqrt{d}$ por la décima parte de una pulgada, es decir, mediante el uso de $\sqrt{d}$ -1 en lugar de $\sqrt{d}$; y por lo tanto $\frac{\sqrt{m}.g}{\sqrt{d}-1}$ es siempre una cantidad constante, la cual *Dubuat* encontró, de muchos experimentos, para que sea igual a 297.

Ahora, entonces $\frac{\sqrt{m}.g}{\sqrt{d}-1} = 297$ **Ecuación 38.**

Despejando m se obtiene:

$m = \frac{297^2}{g}.\left(\sqrt{d}-1\right)^2 = \frac{88209}{362}.\left(\sqrt{d}-1\right)^2 = 243{,}7.\left(\sqrt{d}-1\right)^2$, o haciendo n = 243,7 en:

$$m = n.\left(\sqrt{d} - 1\right)^2$$ **Ecuación 39**

Pero las resistencias se expresaron por $\frac{V^2}{m}$, en consecuencia, ahora se expresarán por

$$\frac{V^2}{n.(\sqrt{d} - 1)^2}$$

También tenemos $\sqrt{m}\, g = \sqrt{n}\, g(\sqrt{d} - 1)$, **Ecuación 40**

y desde $V\,X = \sqrt{m}\, g$ **Ecuación 41**,

obtenemos

$$V = \frac{\sqrt{n}.g.\left(\sqrt{d} - 1\right)}{X} = 297.\frac{\sqrt{d} - 1}{X}$$ **Ecuación 42**

que es una expresión de la velocidad V para cualquier canal, siendo X una cantidad variable, que *Dubuat* a continuación procedió a determinar.

Tras el supuesto de que el valor de la X debe ser notablemente proporcional a $\sqrt{s}$ cuando s es grande; que siempre debe ser inferior a $\sqrt{s}$; que debe apartarse, a partir de la proporción de $\sqrt{s}$, tanto más $\sqrt{s}$ que es más pequeña; que no debe desaparecer cuando la velocidad es infinita; y que debe estar de acuerdo con una serie de experimentos para cada variedad de canales o tuberías y la pendiente, *Dubuat* encontró, que estas condiciones serían realizadas si se toma

$$X = \sqrt{s} - \mathrm{Ln}\sqrt{s + 1.6}$$ **Ecuación 43**

por lo tanto

$$V = \frac{297.\left(\sqrt{d} - 1\right)}{\sqrt{s} - \mathrm{Ln}\sqrt{s + 1.6}}$$ **Ecuación 44**

Dubuat después supuso, que hay una parte constante de la fuerza aceleradora empleada en el vencimiento de la viscosidad, y la producción de la separación mutua de los filamentos adyacentes; y él expresa aquella parte de la fuerza

aceleradora por una parte 1/s de aquella pendiente que constituye la totalidad de esta. Si esta no fuera empleada en la procedencia de una resistencia, esta produciría una velocidad, que realmente es pérdida; de modo que, en el razonamiento sobre la verdadera velocidad, su valor será:

$$V = \frac{\sqrt{n}g.\left(\sqrt{d}-1\right)}{\sqrt{s}-\mathrm{Ln}\sqrt{s+1.6}}$$ **Ecuación 45**

Una cantidad que siempre deberán ser restadas de la velocidad ya establecida. De ahí el valor de V será

$$V = \frac{\sqrt{n}g.\left(\sqrt{d}-1\right)}{\sqrt{s}-\mathrm{Ln}\sqrt{s+1.6}} - \frac{\sqrt{n}g.\left(\sqrt{d}-1\right)}{\sqrt{s}-\mathrm{Ln}\sqrt{s}}$$ **Ecuación 46**

Que sacando factor común quedaría:

$$V = \left(\sqrt{d}-1\right).\left[\frac{\sqrt{n}g}{\sqrt{s}-\mathrm{Ln}\sqrt{s+1.6}} - \frac{\sqrt{n}g}{\sqrt{s}-\mathrm{Ln}\sqrt{s}}\right]$$ **Ecuación 47**

Pero como el término:

$V = \frac{\sqrt{n}g}{\sqrt{s}-\mathrm{Ln}\sqrt{s}}$ **Ecuación 48**, se compone de cantidades constantes, puede ser expresada en un solo número. El valor fue determinado por muchos experimentos para ser de 0,3 pulgadas. Por lo tanto, sustituyendo este valor, obtenemos:

$$V = \frac{\sqrt{n}g.\left(\sqrt{d}-1\right)}{\sqrt{s}-\mathrm{Ln}\sqrt{s+1.6}} - 0{,}3\left(\sqrt{d}-1\right)$$ **Ecuación 49** (fórmula general)

$$V = \frac{297.\left(\sqrt{d}-1\right)}{\sqrt{s}-\mathrm{Ln}\sqrt{s+1.6}} - 0{,}3\left(\sqrt{d}-1\right)$$ **Ecuación 50** (en unidades francesas)

$$V = \frac{307.\left(\sqrt{d} - 1\right)}{\sqrt{s} - \mathrm{Ln}\sqrt{s} + 1.6} - 0{,}3\left(\sqrt{d} - 1\right)$$ **Ecuación 51** (en unidades inglesas)

En estas expresiones Los siguientes son los valores de las letras empleadas.

V representa la velocidad media en pulgadas por segundo de cualquier movimiento actual en un canal de longitud indefinida, de las cuales las secciones de la pendiente son constantes.

d es el radio medio o profundidad media hidráulico, o una cantidad que, cuando se multiplica por el perímetro de la sección del canal, da un área igual al área de la sección. En tubos circulares d es igual a la mitad del radio.

n es un número abstracto y constante, que se encuentra por experimento para ser igual a 243,7.

g es la velocidad en pulgadas, adquirida por un cuerpo que cae en el extremo de un segundo de tiempo, siendo siempre igual a 32,174.

s es el denominador de una fracción que expresa la pendiente del canal o tubería, el numerador se supone que es la unidad.

Log denota el logaritmo hiperbólico de la cantidad a la que está prefijado, y puede ser obtenido multiplicando el logaritmo común por 2,302581.

Los resultados de su fórmula convertida al Sistema Métrico tienen la compleja forma (Rouse and Ince 1957) de la ecuación:

$$V = \frac{49\sqrt{R} - 0{,}8}{\sqrt{\frac{1}{S}} - \ln\sqrt{\frac{1}{S}} + 16} - 0{,}05\sqrt{R}$$ **Ecuación 52**

R = Radio hidráulico

s = Pendiente del canal o tubería

La rugosidad de la superficie de la conducción es ignorada en dicha fórmula.

Con el fin de mostrar el acuerdo de la anterior fórmula con el experimento, *Dubuat* elaboró la siguiente tablas (Tabla 18) y (Tabla 19), que contiene las velocidades observadas como se deduce de los experimentos de *Bossut*, y desde muchos nuevos experimentos realizados por el propio *Dubuat*, y también las velocidades calculadas a partir de la fórmula.

En la primera serie de experimentos en tubos, columna. 1. contiene el número del experimento; columna. 2. la longitud de la tubería; columna. 3. la altura del depósito; columna. 4. los valores de la velocidad v como se deduce de la columna 2 y 3; la columna 5 las velocidades observadas; y la columna 6 las velocidades calculadas.

Experiments by the Chevalier Du Buat.

Pipe ⅔ of a Line in Diameter, placed Vertically and $\sqrt{d} = 0.117851$.

No.	Length of Pipe.	Height of Reservoir.	Values of s.	Observed Velocities.	Calculated Velocities.
	Inches.	Inches.	Inches.	Inches.	Inches
1	12	16.166	0.75636	11.704	12.006
2	12	13.125	0.9307	9.753	10.576
Pipe 1½ Line Diameter, placed Vertically, and $\sqrt{d} = 0.176776$ *Inch.*					
3	34.166	42.166	0.9062	45.468	46.210
4	Do.	38.333	0.9951	43.156	43.721
5	Do.	36.666	1.0396	42.385	42.612
6	Do.	35.333	1.07805	41.614	41.714
The same Pipe Horizontal.					
7	34.166	14.583	2.5838	26.202	25.523
8	Do.	9.292	4.0367	21.064	19.882
9	Do.	5.292	7.03597	14.642	14.447
10	Do.	2.083	17.6378	7.320	2.351
Pipe 2 Lines Diameter, placed Vertically, and $\sqrt{d} = 0.204124$.					
11	36.25	51.250	0.854509	67.373	64.945
12	Do.	45.250	0.963382	59.605	60.428
13	Do.	41.916	1.038080	57.220	57.838
14	Do.	38.750	1.120473	54.186	55.321
Same Pipe with a slope of $\frac{1}{1.3024}$.					
15	36.25	33.500	1.291741	51.151	50.983
Same Pipe Horizontal.					
16	36.25	15.292	2.79005	33.378	33.167
17	Do.	8.875	4.76076	25.430	24.553
18	Do.	5.292	7.89587	19.940	18.314
19	Do.	2.042	20.016366	10.620	10.492

5 Q 2

Tabla 18. Comparación de las velocidades calculadas mediante la fórmula con las observadas en los experimentos de *Bossut* y *Dubuat*.

Pipe 2 $\frac{9}{10}$ Lines Diameter, placed Vertically, and $\sqrt{d} = 0.245798$.

No.	Length of Pipe.	Height of Reservoir.	Values of v.	Observed Velocities.	Calculated Velocities.
	Inches.	Inches.	Inches.	Inches.	Inches.
20	36.25	53.250	0.952348	85.769	85.201
21	Do.	50.250	1.006424	82.471	82.461
22	Do.	48.333	1.044400	81.646	80.698
23	Do.	48.333	1.044400	79.948	
24	Do.	47.916	1.052952	81.027	80.318
25	Do.	44.750	1.124052	76.079	77.318
26	Do.	41.250	1.215688	73.811	73.904
	Same Pipe with the Slope $\frac{1}{1.3044}$.				
27	36.25	37.500	1.332332	70.822	70.138
	Same Pipe Horizontal.				
28	36.25	20.166	2.43034	51.956	50.140
29	Do.	9.083	5.26858	33.577	32.442
30	Do.	7.361	6.45033	28.658	28.801
31	Do.	5.000	9.35730	23.401	23.195
32	Do.	4.916	9.50972	22.989	22.974
33	Do.	4.833	9.66522	25.679	22.754
34	Do.	3.708	12.4624	19.587	19.550
35	Do.	2.713	16.3135	16.631	16.324
36	Do.	2.083	21.6639	14.295	14.003
37	Do.	1.625	27.5102	12.680	12.115
38	Do.	0.833	52.3427	7.577	8.215
	Pipes sensibly Horizontal $\sqrt{d} = 0.5$, *or 1 Inch Diameter.*				
39	117	36.000	5.65926	84.945	85.524
40	117	26.666	7.48002	71.301	72.617
41*	138.5	20.950	10.32149	58.808	60.034
42	117	18.000	10.78798	58.810	58.472
43*	138.5	6.000	33.19623	29.341	29.653
44*	737	23.700	33.66578	28.669	29.412
45	Do.	14.600	54.26340	21.856	22.056
46	Do.	13.700	57.77718	20.970	21.240
47	Do.	12.320	64.15725	19.991	19.950
48	Do.	8.96	87.86790	16.625	16.543
49*	Do.	8.96		16.284	
50*	Do.	7.780	101.0309	15.112	15.232
51*	Do.	5.930	132.1617	13.315	13.005
52*	Do.	4.20	186.0037	10.671	10.656
53*	Do.	4.20		10.441	
54*	138.5	0.700	257.8663	8.689	8.824
55*	737	0.500	1540.76	3.623	3.218
56	737	0.150	5113.42	1.589	1.647

Experiments of the Abbé Bossut.

Horizontal Pipe 1 Inch Diameter $\sqrt{d} = 0.5$.

No.	Length of Pipe.	Height of Reservoir.	Values of v.	Observed Velocities.	Calculated Velocities.
	Inches.	Inches.	Inches.	Inches.	Inches.
57	600	12	54.5966	22.282	21.975
58	600	4	161.3120	12.223	11.756
	Horizontal Pipe $1\frac{1}{3}$ *Inch Diameter* $\sqrt{d} = 0.57735$.				
59	360	24	19.0781	48.534	49.515
60	720	24	33.6166	34.473	35.130
61	360	12	37.0828	33.160	33.106
62	1080	24	48.35416	28.075	28.211
63	1440	24	64.1806	24.004	24.023
64	720	12	66.3020	23.360	23.345
65	1800	24	78.05318	21.032	21.182
66	2160	24	92.9474	18.896	19.096
67	1080	12	95.87567	18.943	18.749
68	1440	12	125.6007	16.128	15.991
69	1800	12	155.4015	14.066	14.119
70	2160	12	185.2487	12.560	12.750
	Horizontal Pipe 2.01 Inch Diameter $\sqrt{d} = 0.7089458$.				
71	360	24	21.47087	58.903	58.803
72	720	24	35.80824	43.	43.136
73	366	12	41.27586	40.322	39.587
74	1080	24	50.41193	35.765	35.096
75	1440	24	65.1448	30.896	30.096
76	720	12	70.14263	29.215	28.796
77	1800	24	79.84866	27.470	26.639
78	2160	24	94.79006	27.731	24.079
79	1080	12	99.4979	23.806	23.400
80	1440	12	129.0727	20.707	20.076
81	1800	12	158.75116	18.304	17.788
82	2160	12	188.5179	16.377	16.097
	Couplet's *Experiments at Versailles.*				
	Pipe 5 Inches Diameter $\sqrt{d} = 1.118034$.				
83	84.240	25	3378.26	5.323	5.287
84	Do.	24	3518.98	5.215	5.168
85	Do.	21.083	4005.66	4.806	4.887
86	Do.	16.750	5041.61	4.127	4.225
87	Do.	11.333	7450.42	3.154	3.388
88	Do.	5.583	15119.96	2.0107	2.254
	Pipe 18 Inches Diameter $\sqrt{d} = 2.12132$.				
89	43.200	145.083	304.9734	39.159	40.510

* In the experiments marked with an asterisk, the pipe discharged itself into water. In all the other experiments it discharged itself in the air.

Tabla 19. Comparación de las velocidades calculadas mediante la fórmula con las observadas en los experimentos de *Bossut* y *Dubuat* (continuación).

Debido a la dificultad practica de manejar dicha fórmula, dada su complejidad, se crearon con posterioridad unas tablas basadas en su fórmula, para poder aplicar en un amplio margen las velocidades de las conducciones.

Las tablas (Tabla 20), (Tabla 21), (Tabla 22), (Tabla 23), (Tabla 24) y (Tabla 25) vienen incluidas en la Enciclopedia de Edimburgo (1830) y a continuación se

reproducen en esta tesis, ya que se abordará un problema clásico utilizando la fórmula de *Dubuat* (Brewster, 1832).

TABLE I.

Containing values of $\sqrt{s}$—Hyp. Log. $\sqrt{s+1.6}$, *the Denominator of the Fraction* $\frac{307(\sqrt{d}-0.1}{\sqrt{s}-\text{Hyp. Log.}\sqrt{s+1.6}}$ *for every Value of the Slope s.*

Slope of the Pipe, or s.	$\sqrt{s}$—Hyp. Log $\sqrt{s+1.6}$ Numbers.	Logarithms.	Log. Differ.	Slope of the Pipe, or s.	$\sqrt{s}$—Hyp. Log $\sqrt{s+1.6}$ Numbers.	Logarithms.	Log. Differ.	Slope of the Pipe, or s.	$\sqrt{s}$—Hyp. Log. $\sqrt{s+1.6}$ Numbers.	Logarithms.	Log. Differ.
1.0	0.52224	9.71787		6.0	1.43542	0.15698	422	20	2.93519	0.46772	1345
1.1	0.55218	9.74208	2421	6.1	1.44921	0.16113	415	21	3.02360	0.48052	1280
1.2	0.58063	9.76390	2182	6.2	1.46292	0.16522	409	22	3.10979	0.49273	1221
1.3	0.60782	9 78378	1988	6.3	1.47655	0.16925	403	23	3.19446	0.50440	1167
1.4	0.63391	9.80203	1825	6.4	1.49008	0.17321	396	24	3.27768	0.51557	1117
1.5	0.65904	9 81891	1688	6.5	1.50358	0.17713	392	25	3.35954	0.52628	1071
1.6	0.68334	9.83463	1572	6.6	1.51698	0.18098	385	26	3.44011	0.53657	1029
1.7	0.70688	9.84935	1472	6.7	1.53031	0.18478	380	27	3.51945	0.54647	990
1.8	0.72975	9 86318	1383	6.8	1.54356	0.18852	374	28	3.59762	0.55601	954
1.9	0.75202	9.87623	1305	6.9	1.55675	0.19222	370	29	3.67466	0.56522	921
2.0	0.77375	9 88860	1237	7.0	1.56987	0.19586	364	30	3.75064	0.57411	889
2.1	0.79497	9.90035	1175	7.1	1.58292	0.19946	360	31	3.82561	0.58270	859
2.2	0.81574	9.91155	1120	7.2	1.59591	0.20302	356	32	3.89959	0.59102	832
2.3	0.83609	9.92225	1070	7.3	1.60883	0.20651	349	33	3.97263	0.59908	806
2.4	0.85605	9 93250	1025	7.4	1.62168	0.20997	346	34	4.04478	0.60689	781
2.5	0.87565	9.94233	983	7.5	1.63448	0.21338	341	35	4.11606	0.61448	759
2.6	0 89491	9.95178	945	7.6	1.64721	0.21675	337	36	4.18650	0.62185	737
2.7	0.91386	9.96088	910	7.7	1.65988	0.22008	333	37	4.25614	0.62902	717
2.8	0.93252	9.96966	878	7.8	1.67250	0.22336	328	38	4.32500	0.63599	697
2.9	0.95090	9.97813	847	7.9	1.68505	0.22661	325	39	4.39311	0.64277	678
3.0	0.96902	9.98633	820	8.0	1.69755	0.22982	321	40	4.46050	0.64938	661
3.1	0.98690	9.99427	794	8.1	1.70999	0.23299	317	41	4.52720	0.65583	645
3.2	1.00455	0.00197	770	8.2	1.72237	0.23613	314	42	4.59321	0.66212	629
3.3	1.02197	0.00944	747	8.3	1.73470	0.23923	310	43	4.65857	0.66825	613
3.4	1.03919	0.01669	725	8.4	1.74699	0.24229	306	44	4.72330	0.67424	599
3.5	1.05621	0.02375	706	8.5	1.75921	0.24532	303	45	4.78740	0.68010	586
3.6	1.07304	0.03061	686	8.6	1.77139	0.24831	299	46	4.85091	0.68582	572
3.7	1.08968	0.03730	669	8.7	1.78353	0.25128	297	47	4.91384	0.69142	560
3.8	1.10616	0.04382	652	8.8	1.79558	0.25420	292	48	4.97621	0.69690	548
3.9	1.12247	0.05017	635	8.9	1.80760	0.25710	290	49	5.03802	0.70226	536
4.0	1.13862	0.05638	621	9.0	1.81957	0.25997	287	50	5.09931	0.70751	525
4.1	1.15461	0.06244	606	9.1	1.83150	0.26281	284	51	5.16007	0.71266	515
4.2	1.17046	0.06836	592	9.2	1.84338	0.26561	280	52	5.22083	0.71770	504
4.3	1.18617	0.07415	579	9.3	1.85521	0.26839	278	53	5.28009	0.72264	494
4 4	1.20174	0.07981	566	9.4	1.86699	0.27114	275	54	5.33938	0.72749	485
4.5	1.21781	0.08535	554	9.5	1.87873	0.27387	273	55	5.39820	0.73225	467
4.6	1.23249	0.09078	543	9.6	1.89043	0.27656	269	56	5.45655	0.73692	467
4.7	1.24767	0.09610	532	9.7	1.90208	0.27923	267	57	5.51145	0.74150	458
4.8	1.26274	0.10131	521	9.8	1.91369	0.28187	264	58	5.57194	0.74601	451
4.9	1.27769	0.10643	512	9.9	1.92525	0.28449	262	59	5.62900	0.75043	442
5.0	1 29253	0.11144	501	10.0	1.93677	0.28708	259	60	5.68564	0.75478	435
5.1	1 30726	0.11636	492	11.0	2.04978	0.31171	2463	61	5.74187	0.65905	427
5.2	1.32190	0.12120	484	12.0	2.15907	0.33427	2256	62	5.79970	0.76326	421
5.3	1.33641	0.12594	474	13.0	2.26304	0.35508	2081	63	5.85315	0.76739	413
5.4	1.35084	0.13060	466	14.0	2.36802	0.37439	1931	64	5.90821	0.77146	407
5.5	1 36516	0.13518	458	15.0	2.46828	0.39239	1800	65	5.96290	0.77546	400
5.6	1.37939	0.13960	451	16.0	2.56605	0.40927	1688	66	6.01723	0.77940	394
5 7	1 39353	0·14412	443	17.0	2.66152	0.42513	1586	67	6.07120	0.78327	387
5 8	1.40758	0 14847	435	18.0	2.75488	0.44010	1497	68	6.12483	0.78709	382
5.9	1.42154	0.15276	429	19.0	2.84625	0.45427	1417	69	6.17811	0.79086	377

Tabla 20. Tabla I basada en las fórmulas de *Dubuat*.

TABLE I. *continued.—Values of* $\sqrt{s}$—Hyp. Log. $\sqrt{s+1.6}$, *the Denominator of the Fraction* $\frac{307(\sqrt{d}-0.1)}{\sqrt{s}-\text{Hyp. Log. }\sqrt{s+1.6}}$ *for every Value of the Slope s.*

Slope of the Pipe, or s.	$\sqrt{s}$—Hyp. Log. $\sqrt{s+1.6}$ Numbers.	Logarithms.	Log. Differ.	Slope of the Pipe, or s.	$\sqrt{s}$—Hyp. Log. $\sqrt{s+1.6}$ Numbers.	Logarithms.	Log. Differ.	Slope of the Pipe, or s.	$\sqrt{s}$—Hyp. Log. $\sqrt{s+1.6}$ Numbers.	Logarithms.	Log. Differ.
70	6.23105	0.79456	370	410	17.23843	1.23650	599	1200	31.09531	1.49269	2046
71	6.28367	0.79821	365	420	17.47187	1.24234	584	1300	32.46984	1.51148	1879
72	6.33596	0.80181	360	430	17.70269	1.24804	570	1400	33.79888	1.52884	1736
73	6.38794	0.80536	355	440	17.93097	1.25360	556	1500	35.07969	1.54497	1613
74	6.43963	0.80886	350	450	18.15680	1.25904	544	1600	36.31062	1.56003	1506
75	6.49096	0.81231	345	460	18.38026	1.26435	531	1700	37.51139	1.57416	1413
76	6.54220	0.81571	340	470	18.60142	1.26955	520	1800	38.67820	1.58747	1331
77	6.59270	0.81907	336	480	18.82034	1.27463	508	1900	39.81576	1.60004	1257
78	6.64325	0.82238	331	490	19.03711	1.27960	497	2000	40.92165	1.61195	1191
79	6.69345	0.82565	327	500	19.25178	1.28447	487	2100	42.00052	1.62325	1130
80	6.74336	0.82888	323	510	19.46441	1.28924	477	2200	43.05569	1.63403	1078
81	6.79294	0.83206	318	520	19.67506	1.29392	468	2300	44.08763	1.64432	1029
82	6.84227	0.83521	315	530	19.88378	1.29850	458	2400	45.09784	1.65416	984
83	6.89147	0.83831	310	540	20.09064	1.30299	449	2500	46.08761	1.66358	942
84	6.94031	0.84138	307	550	20.29567	1.30740	441	2600	47.05826	1.67264	906
85	6.98889	0.84441	303	560	20.49892	1.31173	433	2700	48.01072	1.68134	870
86	7.03723	0.84740	299	570	20.70045	1.31598	425	2800	48.84605	1.68972	838
87	7.08534	0.85036	296	580	20.90030	1.32015	417	2900	49.86514	1.69780	808
88	7.13315	0.85328	292	590	21.09858	1.32425	410	3000	50.76880	1.70560	780
89	7.18075	0.85617	289	600	21.29510	1.32828	403	3100	51.65781	1.71313	753
90	7.22812	0.85903	286	610	21.49014	1.33224	396	3200	52.53284	1.72043	730
91	7.27525	0.86185	282	620	21.68365	1.33613	389	3300	53.39454	1.72750	707
92	7.32215	0.86464	279	630	21.87567	1.33996	383	3400	54.24352	1.73435	685
93	7.36882	0.86740	276	640	22.06634	1.34373	377	3500	55.08031	1.74100	665
94	7.41527	0.87013	273	650	22.25538	1.34743	370	3600	55.90543	1.74745	645
95	7.46150	0.87283	270	660	22.44313	1.35108	365	3700	56.71937	1.75373	628
96	7.50752	0.87550	267	670	22.62953	1.35467	359	3800	57.52267	1.75984	611
97	7.55332	0.87814	264	680	22.81459	1.35821	354	3900	58.31540	1.76578	594
98	7.59891	0.88075	261	690	22.99835	1.36170	349	4000	59.09832	1.77157	579
99	7.64430	0.88334	259	700	23.18083	1.36513	343	4100	59.87168	1.77722	565
100	7.68948	0.88590	256	710	23.36207	1.36851	338	4200	60.63580	1.78273	551
110	8.13063	0.91012	2422	720	23.54208	1.37184	333	4300	61.39103	1.78810	537
120	8.55408	0.93217	2205	730	23.72089	1.37513	329	4400	62.12754	1.79335	525
130	8.96187	0.95240	2023	740	23.89854	1.37837	324	4500	62.87595	1.79848	513
140	9.35566	0.97107	1867	750	24.07502	1.37157	320	4600	63.60622	1.80350	502
150	9.73683	0.98842	1735	760	24.25038	1.38472	315	4700	64.32872	1.80840	490
160	10.10655	1.00460	1618	770	24.42464	1.38783	311	4800	65.04368	1.81320	480
170	10.46582	1.01977	1517	780	24.59781	1.39090	307	4900	65.75134	1.81790	470
180	10.81550	1.03405	1428	790	24.76991	1.39392	302	5000	66.45192	1.82251	461
190	11.15634	1.04752	1347	800	24.94097	1.39691	299	5100	67.14563	1.82702	451
200	11.48899	1.06028	1276	810	25.11099	1.39986	295	5200	67.83267	1.83144	442
210	11.81403	1.07240	1212	820	25.28001	1.40278	292	5300	68.51323	1.83577	433
220	12.13196	1.08393	1153	830	25.44804	1.40565	287	5400	69.18747	1.84003	426
230	12.44324	1.09493	1100	840	25.61510	1.40849	284	5500	69.85560	1.84420	417
240	12.74829	1.10545	1052	850	25.78120	1.41130	281	5600	70.51773	1.84830	410
250	13.04737	1.11553	1008	860	25.94636	1.41408	278	5700	71.17412	1.85232	402
260	13.34111	1.12519	966	870	26.11060	1.41682	274	5800	71.82470	1.85627	395
270	13.62951	1.13448	929	880	26.27392	1.41952	270	5900	72.46996	1.86016	389
280	13.91296	1.14342	894	890	26.43636	1.42220	268	6000	73.10978	1.86398	382
290	14.19169	1.15203	861	900	26.59791	1.42485	265	6100	73.74456	1.86773	375
300	14.46596	1.16035	832	910	26.75859	1.42746	261	6200	74.37381	1.87142	369
310	14.73596	1.16838	805	920	26.91845	1.43005	259	6300	74.99826	1.87505	363
320	15.00189	1.17615	777	930	27.07745	1.43261	256	6400	75.61785	1.87862	357
330	15.26394	1.18367	752	940	27.23563	1.43514	253	6500	76.23267	1.88214	352
340	15.52237	1.19096	729	950	27.39301	1.43764	250	6600	76.84286	1.88560	346
350	15.77704	1.19803	707	960	27.54957	1.44011	247	6700	77.44847	1.88901	341
360	16.02840	1.20489	686	970	27.70535	1.44256	245	6800	78.04966	1.89237	336
370	16.27647	1.21156	667	980	27.85036	1.44499	243	6900	78.64650	1.89568	331
380	16.52146	1.21805	649	990	28.01460	1.44738	236	7000	79.23905	1.89894	326
390	16.76330	1.22436	631	1000	28.16180	1.44976	238	7100	79.82746	1.90215	321
400	17.00227	1.23051	615	1100	29.66399	1.47223	2247	7200	80.41179	1.90532	317

Tabla 21. Tabla I basada en las fórmulas de *Dubuat* (continuación).

TABLE I. *continued.—Values of* $\sqrt{s}$ — Hyp. Log. $\sqrt{s+1.6}$ *the Denominator of the Fraction* $\frac{307(\sqrt{d}-0.1)}{\sqrt{s}-\text{Hyp. Log.}\sqrt{s+1.6}}$ *for every Value of the Slope s.*

Slope of the Pipe, or s.	√s— Hyp. Log. √s+1.6		Log. Differ.	Slope of the Pipe, or s.	√s— Hyp Log. √+1.6		Log. Differ.	Slope of the Pipe, or s.	√s—Hyp. Log. √s+1.6		Log. Differ.
	Numbers.	Logarithms.			Numbers.	Logarithms.			Numbers.	Logarithms.	
7300	80.99213	1.90844	312	8700	88.73817	1.94811	261	11000	100.22798	2.00099	2147
7400	81.56887	1.91152	308	8800	89.26698	1.95069	258	12000	104.84811	2.02056	1957
7500	82.14112	1.91456	304	8900	89.79281	1.95324	255	13000	109.28109	2.03854	1798
7600	82.70992	1.91756	300	9000	90.31576	1.95576	252	14000	113.54812	2.05518	1664
7700	83.27505	1.92051	295	9100	90.83582	1.95826	250	15000	117.66652	2.07065	1547
7800	83.83658	1.92343	292	9200	91.35306	1.96072	246	16000	121.65088	2.08511	1446
7900	84.39455	1.92631	288	9300	91.86753	1.96316	244	17000	125.51374	2.09869	1358
8000	84.94902	1.92916	285	9400	92.37930	1.96557	241	18000	129.26496	2.11148	1279
8100	85.50009	1.93197	281	9500	92.88831	1.96796	239	19000	132.91434	2.12357	1209
8200	86.04784	1.93474	277	9600	93.39476	1.97032	236	20000	136.46956	2.13504	1147
8300	86.59226	1.93748	274	9700	93.89858	1.97266	234	21000	139.93758	2.14593	1089
8400	87.13343	1.94018	270	9800	94.39982	1.97497	231	22000	143.32475	2.15632	1039
8500	87.67144	1.94286	268	9900	94.89852	1.97726	229	23000	146.63584	2.16624	992
8600	88.20645	1.94550	264	10000	95.39475	1.97952	226	24000	149.87637	2.17573	949

Tabla 22. Tabla I basada en las fórmulas de *Dubuat* (continuación).

TABLE II.

Values of the Numerator 307 ($\sqrt{d}$—0.1) *for every Value of the Hydraulic Mean Depth d, calculated for Pipes, from ¼ of an inch to 18 Inches Diameter; also the Value of the Factor* 0.3 ($\sqrt{d}$—0.1.)

Diameters.	Mean Radius, or Hydraulic mean depth, or values of d.	307 ($\sqrt{d}$—0.1)			0.3 × $\sqrt{d}$—0.1	Diameters.	Mean Radius, or Hydraulic mean depth, or values of d.	307 ($\sqrt{d}$—0.1)			0.3 × $\sqrt{d}$—0.1
		Numbers.	Logarithms.	Log. Differ.				Numbers.	Logarithms.	Log. Differ.	
0¼	0.0625	46.050	1.66323		0.045	9¼	2.3125	436.152	2.63964	637	0.426
0½	0.125	77.841	1.89121	22798	0.076	9½	2.375	442.419	2.64583	619	0.432
0¾	0.1875	102.235	2.00960	11839	0.100	9¾	2.4375	448.604	2.65186	603	0.438
1	0.25	122.800	2.08920	7960	0.120	10	2.5	454.710	2.65773	587	0.444
1¼	0.3125	140.918	2.14897	5977	0.138	10¼	2.5625	460.740	2.66346	573	0.450
1½	0.375	157.298	2.19672	4775	0.154	10½	2.625	466.697	2.66903	557	0.456
1¾	0.4375	172.361	2.23644	3972	0.168	10¾	2.6875	472.583	2.67448	545	0.462
2	0.5	186.382	2.27040	3396	0.182	11	2.75	478.402	2.67979	531	0.467
2¼	0.5625	199.550	2.30005	2965	0.195	11¼	2.8125	484.155	2.68498	519	0.473
2½	0.625	212.005	2.32635	2630	0.207	11½	2.875	489.844	2.69006	508	0.479
2¾	0.6875	223.851	2.34996	2361	0.219	11¾	2.9375	495.471	2.69502	496	0.484
3	0.75	235.170	2.37138	2142	0.230	12	3.	501.040	2.69987	485	0.490
3¼	0.8125	246.026	2.39098	1960	0.240	12¼	3.0625	506.550	2.70462	475	0.495
3½	0.875	256.472	2.40904	1806	0.251	12½	3.125	512.004	2.70927	465	0.500
3¾	0.9375	266.551	2.42578	1674	0.260	12¾	3.1875	517.405	2.71383	456	0.506
4	1.	276.300	2.44138	1560	0.270	13	3.25	522.752	2.71830	447	0.511
4¼	1.0625	285.748	2.45598	1460	0.279	13¼	3.3125	528.049	2.72267	437	0.516
4½	1.125	294.923	2.46971	1373	0.288	13½	3.375	533.295	2.72697	430	0.521
4¾	1.1875	303.846	2.48265	1294	0.297	13¾	3.4375	538.493	2.73118	421	0.526
5	1.25	312.536	2.49490	1225	0.305	14	3.5	543.644	2.73531	413	0.531
5¼	1.3125	321.013	2.50652	1162	0.314	14¼	3.5625	548.750	2.73937	406	0.536
5½	1.375	329.289	2.51758	1106	0.322	14½	3.625	553.811	2.74336	399	0.541
5¾	1.4375	337.380	2.52812	1054	0.330	14¾	3.6875	558.828	2.74728	392	0.546
6	1.5	345.297	2.53819	1007	0.337	15	3.75	563.803	2.75113	385	0.551
6¼	1.5625	353.050	2.54784	965	0.345	15¼	3.8125	568.737	2.75491	378	0.556
6½	1.625	360.650	2.55709	925	0.352	15½	3.875	573.630	2.75863	372	0.561
6¾	1.6875	368.105	2.56597	888	0.360	15¾	3.9375	578.484	2.76229	366	0.565
7	1.75	375.423	2.57452	855	0.367	16	4.	583.300	2.76589	360	0.570
7¼	1.8125	382.611	2.58276	824	0.374	16¼	4.0625	588.078	2.76943	354	0.575
7½	1.875	389.677	2.59070	794	0.381	16½	4.125	592.820	2.77292	349	0.579
7¾	1.9375	396.626	2.59838	768	0.388	16¾	4.1875	597.526	2.77636	344	0.584
8	2.	403.464	2.60580	742	0.394	17	4.25	602.197	2.77974	338	0.588
8¼	2.0625	410.195	2.61299	719	0.401	17¼	4.3125	606.833	2.78307	333	0.593
8½	2.125	416.826	2.61995	696	0.407	17½	4.375	611.437	2.78635	328	0.597
8¾	2.1875	423.359	2.62671	676	0.414	17¾	4.4375	616.007	2.78958	323	0.602
9	2.25	429.800	2.63327	656	0.420	18	4.5	620.545	2.79277	319	0.606

Tabla 23. Tabla II basada en las fórmulas de *Dubuat* (continuación).

TABLE III.

Values of the Numerator 307 ($\sqrt{d}$—0.1) for every Value of the Hydraulic Mean Depth d; also the Values of the Factor 0.3 ($\sqrt{d}$—0.1.)

Mean Radius, or Hydraulic mean depth or values of d.	307 ($\sqrt{d}$—0.1)			0.3 × $\sqrt{d}$—0.1	Mean Radius, or Hydraulic mean depth or values of d.	307 ($\sqrt{d}$—0.1)			0.3 × $\sqrt{d}$—0.1
	Numbers.	Logarithms.	Log. Differ.			Numbers.	Logarithms.	Log. Differ.	
0.1	66.382	1.82206		0.065	5.5	689.279	2.83839	416	0.674
0.2	106.595	2.02774	20569	0.104	5.6	695.795	2.84248	409	0.680
0.3	137.451	2.13815	11041	0.134	5.7	702.253	2.84649	401	0.686
0.4	163.464	2.21342	7527	0.160	5.8	708.654	2.85043	394	0.692
0.5	186.382	2.27040	5698	0.182	5.9	715.000	2.85431	388	0.699
0.6	207.101	2.31618	4578	0.202	6.0	721.293	2.85811	380	0.705
0.7	226.155	2.35441	3823	0.221	6.1	727.534	2.86185	374	0.711
0.8	243.889	2.38719	3278	0.238	6.2	733.724	2.86553	368	0.717
0.9	260.458	2.41588	2869	0.255	6.3	739.864	2.86915	362	0.723
1.0	276.300	2.44138	2550	0.270	6.4	745.955	2.87271	356	0.729
1.1	291.285	2.46432	2294	0.285	6.5	752.000	2.87622	351	0.735
1.2	305.602	2.48516	2084	0.299	6.6	757.997	2.87967	345	0.741
1.3	319.334	2.50425	1909	0.312	6.7	763.950	2.88306	339	0.747
1.4	332.548	2.52185	1760	0.325	6.8	769.856	2.88641	335	0.752
1.5	345.297	2.53819	1634	0.337	6.9	775.723	2.88971	330	0.758
1.6	357.628	2.55343	1524	0.349	7.0	781.545	2.89295	324	0.764
1.7	369.679	2.56771	1428	0.361	7.1	787.327	2.89615	320	0.769
1.8	381.184	2.58113	1342	0.372	7.2	793.068	2.89931	316	0.775
1.9	392.470	2.59381	1268	0.384	7.3	798.768	2.90242	311	0.781
2.0	403.464	2.60580	1199	0.394	7.4	804.430	2.90549	307	0.786
2.1	414.185	2.61719	1139	0.405	7.5	810.054	2.90851	302	0.792
2.2	424.655	2.62804	1085	0.415	7.6	815.641	2.91150	299	0.797
2.3	434.888	2.63838	1034	0.425	7.7	821.190	2.91444	294	0.802
2.4	444.902	2.64826	988	0.435	7.8	826.704	2.91735	291	0.808
2.5	454.710	2.65773	947	0.444	7.9	832.183	2.92022	287	0.813
2.6	464.323	2.66681	908	0.454	8.0	837.627	2.92305	283	0.819
2.7	473.753	2.67555	874	0.463	8.1	843.037	2.92585	280	0.824
2.8	483.003	2.68395	840	0.472	8.2	848.414	2.92861	276	0.829
2.9	492.102	2.69206	810	0.481	8.3	853.758	2.93133	272	0.834
3.0	501.040	2.69987	782	0.490	8.4	859.070	2.93403	270	0.839
3.1	509.829	2.70743	756	0.498	8.5	864.351	2.93669	266	0.845
3.2	518.478	2.71473	730	0.507	8.6	869.601	2.93932	263	0.850
3.3	526.993	2.72180	707	0.515	8.7	874.820	2.94192	260	0.855
3.4	535.380	2.72866	686	0.523	8.8	880.009	2.94449	257	0.860
3.5	543.644	2.73531	665	0.531	8.9	785.169	2.94703	254	0.865
3.6	551.792	2.74177	646	0.539	9.0	890.300	2.94954	251	0.870
3.7	559.826	2.74805	628	0.547	9.1	895.403	2.95202	248	0.875
3.8	567.753	2.75416	611	0.555	9.2	900.447	2.95447	245	0.880
3.9	575.576	2.76010	594	0.562	9.3	905.424	2.95690	243	0.885
4.0	583.300	2.76589	579	0.570	9.4	910.544	2.95930	240	0.890
4.1	590.928	2.77153	564	0.577	9.5	915.537	2.96168	238	0.895
4.2	598.463	2.77704	551	0.585	9.6	920.505	2.96403	235	0.900
4.3	605.909	2.78241	537	0.592	9.7	925.446	2.96635	232	0.904
4.4	613.269	2.78765	524	0.599	9.8	930.362	2.96865	230	0.909
4.5	620.545	2.79277	512	0.606	9.9	935.253	2.97093	228	0.914
4.6	627.742	2.79778	501	0.613	10.0	940.119	2.97318	225	0.919
4.7	634.860	2.80268	490	0.620					
4.8	641.903	2.80747	479	0.627	11	987.504	2.99454	2136	0.965
4.9	648.773	2.81216	469	0.634	12	1032.779	3.01401	1947	1.009
5.0	655.673	2.81675	459	0.641	13	1076.204	3.03189	1788	1.051
5.1	662.604	2.82125	450	0.647	14	1117.989	3.04844	1655	1.092
5.2	669.368	2.82566	441	0.654	15	1158.306	3.06382	1538	1.131
5.3	665.067	2.82999	433	0.661	16	1197.300	3.07820	1438	1.170
5.4	682.704	2.83423	424	0.667	17	1235.093	3.09170	1350	1.207

L PART II. 5 R

Tabla 24. Tabla III basada en las fórmulas de *Dubuat.*

TABLE III. *Continued.*

Values of the Numerator 307 ($\sqrt{d}$—0.1) for every Value of the Hydraulic Mean Depth d ; also the Value of the Factor 0.3 ($\sqrt{d}$—0 1.)

Mean Radius, or Hydraulic mean depth or values of d.	307 ($\sqrt{d}$—0.1)			0.3 × $\sqrt{d}$—0.1	Mean Radius, or Hyraulic mean depth or values of d.	307 ($\sqrt{d}$—0.1).			0.3 × $\sqrt{d}$—0.1
	Numbers.	Logarithms.	Log. Differ.			Numbers.	Logarithms.	Log. Differ.	
18	1271.791	3.10442	1272	1.243	60	2347.312	3.37057	370	2.293
19	1307.482	3.11644	1202	1.278	61	2367.046	3.37421	364	2.313
20	1342.246	3.12783	1139	1.312	62	2386.621	3.37778	357	2.332
21	1376.150	3.13866	1083	1.345	63	2406.037	3.38150	352	2.351
22	1409.258	3.14899	1033	1.377	64	2425.3[illegible]0	3.38477	347	2.370
23	1441.620	3.15885	986	1.409	65	2444.413	3.38817	340	2.389
24	1473.286	3.16829	944	1.440	66	2463.380	3.39153	336	2.407
25	1504.300	3.17733	904	1.470	67	2482.203	3.39484	331	2.426
26	1534.699	3.18602	869	1.500	68	2500.887	3.39809	325	2.444
27	1564.519	3.19438	836	1.529	69	2519.434	3.40130	321	2.462
28	1593.791	3.20243	805	1.557	70	2537.846	3.40446	316	2.480
29	1622.546	3.21020	777	1.586	71	2556.128	3.40758	312	2.498
30	1650.808	3.21770	750	1.613	72	2574.282	3.41066	308	2.516
31	1678.604	3.22496	726	1.640	73	2592.310	3.41369	303	2.533
32	1705.954	3.23197	701	1.667	74	2610.224	3.41668	299	2.551
33	1732.881	3.23877	680	1.693	75	2627.998	3.41962	294	2.568
34	1759.402	3.24536	659	1.719	76	2645.664	3.42253	291	2.585
35	1785.536	3.25177	641	1.745	77	2663.214	3.42541	288	2.602
36	1811.300	3.25799	622	1.770	78	2680.651	3.42824	283	2.619
37	1836.708	3.26404	605	1.795	79	2697.976	3.43104	280	2.636
38	1861.775	3.26993	589	1.819	80	2715.191	3.43380	276	2.653
39	1886.514	3.27566	573	1.843	81	2732.300	3.43653	273	2.670
40	1910.938	3.28125	559	1.867	82	2749.304	3.43922	269	2.687
41	1935.059	3.28669	544	1.891	83	2766.204	3.44188	266	2.703
42	1958.887	3.39201	532	1.914	84	2783.002	3.44451	263	2.720
43	1982.434	3.29720	519	1.937	85	2799.700	3.44711	260	2.736
44	2005.708	3.30227	507	1.960	86	2816.301	3.44968	257	2.752
45	2028.719	3.30722	495	1.982	87	2832.906	3.45223	255	2.768
46	2051.475	3.31207	485	2.005	88	2849.215	3.45473	250	2.784
47	2073.986	3.31681	474	2.027	89	2865.532	3.45721	248	2.800
48	2096.258	3.32144	463	2.048	90	2881.758	3.45966	245	2.816
49	2118.300	3.32599	455	2.070	91	2897.893	3.46208	242	2.832
50	2140.118	3.33044	445	2.091	92	2913.940	3.46448	240	2.847
51	2161.718	3.33480	436	2.112	93	2929.900	3.46685	237	2.863
52	2183.109	3.33908	428	2.133	94	2945.776	3.46920	235	2.879
53	2204.204	3.34328	420	2.154	95	2961.565	3.47152	232	2.894
54	2225.280	3.34738	410	2.175	96	2977.274	3.47382	230	2.909
55	2246.073	3.35142	404	2.195	97	2992.900	3.47609	227	2.925
56	2266.678	3.35539	397	2.215	98	3008.445	3.47834	225	2.940
57	2287.100	3.35928	389	2.235	99	3023.912	3.48057	223	2.955
58	2307.343	3.36311	383	2.255	100	3039.300	3.48277	220	2.970
59	2327.411	3.36687	376	2.274					

Tabla 25. Tabla III basada en las fórmulas de Dubuat (continuación).

Para el análisis de la fórmula se resuelve el siguiente problema:

El agua se pone en Edimburgo por varias tuberías, uno de los cuales es de 5 pulgadas de diámetro. Este tubo es 14.367 pies de largo, y el depósito en *Comiston* es de 44 pies más alto que el depósito en el Castillo-Colina en el que se suministra el agua. Es necesario saber cuántas pintas escocesas la tubería debe entregar en un minuto.

Se parte de la fórmula general de *M. Dubuat* (Ecuación 51):

$$V = \frac{307.\left(\sqrt{d}-1\right)}{\sqrt{s}-\mathrm{Ln}\sqrt{s+1.6}} - 0{,}3\left(\sqrt{d}-1\right)$$ en unidades inglesas,

<u>Calculo del valor d (de *Dubuat*)</u>

Diámetro = 5 pulgadas→ r=5/2 2,5 pulgadas →63,50 mm = 0,0635 m

d = 2,5/2 = 1,25 pulgadas

s = 14367/44 = 326,52

$\sqrt{d} =$ 1,118

$\sqrt{d} - 1 =$ (1,1180 – 0,1)

$\sqrt{s} =$ 18,07

$\sqrt{s}$ +1,6 =18,1141

$\mathrm{Ln}\sqrt{s+1.6}$ = Ln (18,1141) = 2,90

Operando con calculadora, en vez de como se hacía en aquellos tiempos, se obtiene:

$$V = \frac{307.(1{,}018)}{(18{,}07-2{,}90)} - 0{,}3(1{,}018) =$$ 20,30 pulgadas/s = 0,51 m/s

$Q = V.S \;= 20{,}30 \times \pi \times 2{,}5^2 =$ 398,59 pulgadas^3/s = 222,62 pint/min =1,62 l/s

Nota: 1 pint = 105 pulgadas^3

Si utilizamos las tablas diseñadas para resolver la ecuación se obtiene:

Entrando en la tabla I con el valor s = 330 (ligeramente al valor 326,52) se obtiene:

$\sqrt{s} - \mathrm{Ln}\sqrt{s+1.6}$ = 15,26394 – 1,18367 = 14,08027

Entrando en la table II

$307.\left(\sqrt{d} - 1\right) = 312{,}536$

$0{,}30.\left(\sqrt{d} - 1\right) = 0{,}305$

$$V = \frac{312{,}356}{14{,}08} - 0{,}312 = 21{,}89$$

Luego

$$V = \frac{312{,}356}{14{,}08} - 0{,}312 = 21{,}89 \text{ pulgadas/s} = 0{,}55 \text{ m/s}$$

$$Q = V.S \ = 21{,}89 \times \pi \times 2{,}5^2$$

$Q = V.S \ = 21{,}89 \times \pi \times 2{,}5^2$ = 429,81 pulgadas^3/s = 245,60 pint/min =1,74 l/s

Ahora resolveremos el problema con una de las fórmulas más modernas mediante la aplicación CALCTUB, utilizando la fórmula de pérdidas de carga de *Darcy-Weisbach* (1875), en el que el factor f de rozamiento se calculará mediante la fórmula de *Colebrook-White* (que se verá en apartados posteriores a este), considerada como una de las fórmulas más precisas (Ilustración 42).

La rugosidad ε = 0,0015 se corresponde con la de tubería de material latón, muy utilizada en la época.

La comparación que se va a realizar a continuación es muy subjetiva, ya que en la época de *Dubuat* aún no se consideraban la viscosidad ni el número de *Reynolds* cuantitativamente. No obstante, al cambiar diferentes rugosidades, la tubería no es

capaz de suministrar más de 1,23 l/s, con lo cual se puede considerar que es el máximo caudal puede aportar al depósito de Castillo-Colina.

Mediante la siguiente tabla (Tabla 26) se puede apreciar las diferencias calculadas, en las que puede observarse que los resultados arrojados por la fórmula y tabla de *Dubuat* difieren sustancialmente por exceso, de los dados por la fórmula de *Darcy-Weisbach*.

	DUBUAT (Fórmula)	DUBUAT (Tabla)	DARCY-WEISBACH (Colebrook-White)
CAUDALES (L/SEG)	1,62	1,74	1,23
VELOCIDADES (M/SEG)	0,51	0,55	0,39

Tabla 26. Cuadro comparativo de caudales y velocidades

CALCTUB - Cálculo de Tuberías

DATOS GENERALES

Características del Fluido :

Fluido:	**AGUA**
Temperatura:	**20 (ºC).**
Viscosidad cinemática:	**0,0000011 (m²/s).**

Opciones de Cálculo:

Número de Tramos:	**1**		
Tipo de Normalización:	**SUPERIOR**	Toleráncia a la Norm.:	**5 %.**
Fórmula de Cálculo:	**DARCY - WEISBACH (Colebrook - White)**		

RESULTADO DEL CÁLCULO

Tramo 1

Parámetros del problema:

Longitud:	4379,0	m
Dato a resolver:	Caudal	
Diámetro:	63,5	mm
Rugosidad:	0,0015	mm
Pérdida:	13,41	mca
Caudal:	0,001231	m³/seg

Resultados del Cálculo:

Pérdida Unitaria:	0,003062	m/m
Velocidad:	0,39	m/seg
Nº de Reynolds:	22441	
Factor de Fricción:	0,02522	

Datos de la Tubería:

Descripción:		
Presión Nom.:	0	mca
Diámetro Nom.:		mm
Coste:	0	EUR/m

Ilustración 42. Calculo del ejemplo mediante la fórmula de *Darcy-Weisbach* (*Colebrook-White*).

Existe una diferencia grandísima del valor dado por la fórmula de *Dubuat* con respecto a la de *Darcy-Weisbach*, 1,62 – 1,23 = 0,39 l/s que representa un 31,70 % más.

Aunque no es exactamente comparable, ya que la fórmula de *Dubuat* no contempla el rozamiento con las paredes de la conducción, al contrario de la de *Darcy – Weisbach*, es por ello por lo que se ha supuesto una conducción con un material que tuviera una gran rugosidad por las imperfecciones en cuanto a la fabricación de tuberías de la época, no obstante, los demás datos se han mantenido exactamente haciendo las respectivas conversiones de unidades.

Posteriormente *H. Darcy* explicó a que son debidas estas diferencias en los resultados referentes a caudales y velocidades en la fórmula de *Dubuat*.

Actualmente si se diseñara un abastecimiento con la fórmula de *Dubuat*, los resultados de las secciones de las conducciones tendrían un valor inferior al necesario, es decir, volviendo al ejemplo planteado, si se quisiera calcular el diámetro necesario para abastecer al depósito Castillo-Colina con un caudal de 1,60 l/s, el diámetro resultante seria de 63,50 mm teóricos, mientras que si se calcula con la fórmula de *Darcy-Weisbach* mediante el planteamiento de *Colebrook-White* para introducir el factor f de la misma, la sección resultante sería de 70,30 mm como se muestra a continuación en (Ilustración 43).

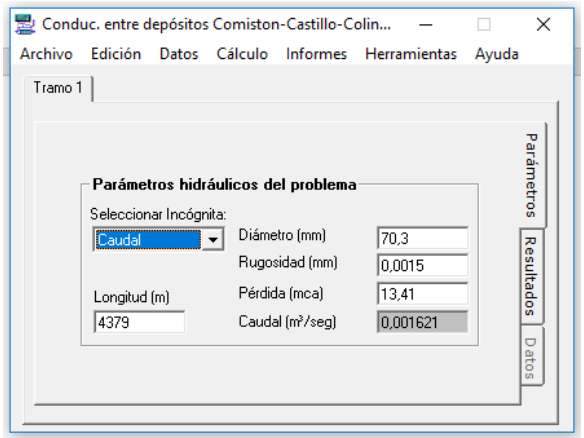


Ilustración 43. Diseño del diámetro de la conducción para un caudal de 1,62 l/s según *Darcy-Weisbach*.

Posteriormente *H. Darcy* explicó a que son debidas estas diferencias en los resultados referentes a caudales y velocidades en la fórmula de Dubuat.

Experimentos de Dubuat para estudiar la resistencia de la superficie de una conducción con respecto a la presión aplicada.

Antes de abordar los experimentos de *Dubuat*, basados en el funcionamiento de un sifón, se va a resumir brevemente su funcionamiento para mejor comprensión de dichos experimentos.

Sifón

El sifón sirve para transferir un líquido de un jarrón a otro jarrón a un nivel inferior; Es un aparato en uso en muchas industrias, puede encontrar su aplicación principalmente en obras hidráulicas.

Consideremos dos depósitos A y B (Ilustración 44) unidos por un tubo doblemente curvado en ángulo recto; este tubo constituye el sifón; supongamos que está cebado, es decir, lleno de líquido; esta operación será fácil si se proporciona un orificio con llave en la rama horizontal del sifón, mediante el cual se introducirá agua que ocupará el lugar del aire, estando los extremos de los dos tubos sumergidos en los tanques cerrados por grifos.

El sifón cargado, las dos válvulas inferiores se abren y el grifo superior se cierra, ¿Qué pasará? En primer lugar, no se producirá un punto de separación entre dos tramos líquidos contiguos del sifón, que determinarían un vacío local que la presión atmosférica exterior tendería inmediatamente a salvar (esto implica que la altura h de la pequeña rama es inferior a la altura del agua que mide la presión atmosférica).

Además, una rebanada líquida de la rama horizontal del sifón está sometida: a la derecha, a una presión igual a la presión atmosférica P disminuida por la altura h; a la izquierda, a una presión igual a la presión atmosférica P disminuida por la altura H; por lo tanto, la rebanada considerada es empujada de derecha a izquierda, es decir del depósito superior al depósito inferior, por una carga igual a la diferencia (H-h) de las alturas de las dos ramas del sifón.

Por lo tanto, habrá flujo de A a B bajo una carga total (H-h), y la velocidad teórica del flujo será:

$$v = \sqrt{2g(H-h)}$$ **Ecuación 53**

Por consiguiente, será tanto mayor la velocidad de salida, cuanto mayor sea la diferencia de nivel entre la superficie liquida A y la B.

La velocidad práctica depende de la resistencia de la tubería; Si l es el desarrollo total del sifón y **r** su radio interior, la ecuación fundamental del movimiento en las tuberías nos da (Debaube, 1875):

$$r(H-h) = b_1 l u^2$$ **Ecuación 54**

Ecuación a partir de la cual deducimos la velocidad media u.

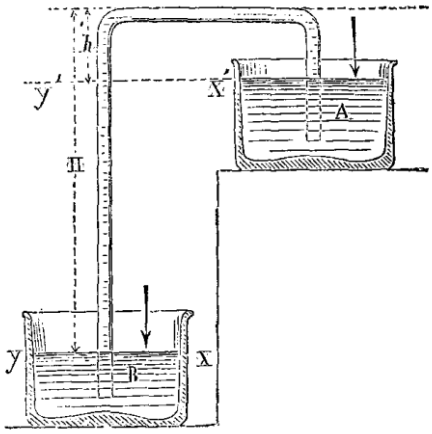


Ilustración 44. Esquema de sifón.

Dubuat basó su estudio considerando que las causas que afectan el movimiento de oscilación del agua en los sifones tienen mucha analogía con los que con las que fijan el movimiento uniforme en las tuberías de conducción. La resistencia que opone el rozamiento altera el movimiento en los sifones hasta aniquilarlo completamente, después de un cierto número de oscilaciones. En el segundo caso, se opone al aumento de la velocidad en el límite.

La causa de que esta aniquilación del movimiento producida es la misma en ambos casos, llevó a *Dubuat* a estudiar las oscilaciones del agua en los sifones.

Dubuat quiso demostrar que **"la presión no afecta a la intensidad de la resistencia en los lechos cuando el agua se mueve"**; es decir que "el frotamiento de los fluidos es relativo sólo a la extensión de la superficie, y no a la altura del fluido".

Los experimentos con sifones le llevaron a esclarecer esta cuestión, basándose en que el agua oscila en los sifones en tiempos iguales a los de un péndulo cuya longitud es igual a la mitad de la columna fluida en movimiento.

Si **Ls** es la longitud de la columna fluida en movimiento y la fórmula del tiempo de oscilación de un péndulo es:

$$T = 2 \times \pi \times \sqrt{\frac{L}{g}}$$ **Ecuación 55**

Siendo $L = Ls/2$ **Ecuación 56**

Así, haciendo oscilar el agua en dos sifones del mismo diámetro y de la misma longitud, pero de figura diferente, de modo que la rama ascendente de uno sea más alta en comparación con las del otro, es evidente que, si la presión aumenta la resistencia al movimiento, este se detendrá antes en el primero, que tiene más presión, que en el segundo.

Según lo anterior, las oscilaciones son iguales para un mismo sifón, que tenga la misma longitud, aunque las proporciones de sus ramas ascendentes, horizontales y descendentes varíen.

Las duraciones de las oscilaciones son iguales para un mismo sifón, la velocidad del fluido oscilante puede estar representada por la longitud de una oscilación, y la resistencia por la pérdida del movimiento en cada uno. De modo que, si las resistencias son como los cuadrados de las velocidades, las pérdidas del

movimiento deben ser proporcionales a los cuadrados de las longitudes de oscilaciones o amplitudes.

Finalmente, *Dubuat* pensó que, si las resistencias son simplemente proporcionales a las superficies, los sifones de igual longitud, pero de diámetros diferentes, deberían perder la misma cantidad de movimiento en tiempos proporcionales a su radio medio, es decir, al cociente de su sección dividida por su pared.

A continuación, se expondrá en esta tesis la forma en que preparó los sifones para llevar a cabo sus experiencias, para ello se ha hecho una conversión de las antiguas medidas francesas al S.I (Sistema Internacional), para facilitar cualquier comprobación posterior (Dubuat, MDCCCXVI (1816)).

Aplicando la fórmula del péndulo, y sustituyendo el valor de la longitud del sifón en dicha fórmula, calculó el periodo de media oscilación, y midió los descensos hasta finalizar los movimientos.

Para medir con precisión el ascenso y descenso de las aguas superficiales alternativo en sifones, se sirvió de un pequeño flotador compuesto de un pedazo de corcho, atravesado por una varilla de madera blanca muy delgada. En el extremo inferior de esta varilla fijó una bola de plomo que servía de lastre, y ponía al flotador en estado de llevar su tallo recto.

Se vertía en el sifón la cantidad de agua necesaria para que la columna de fluido tuviera un desarrollo adecuado; y se colocaba el flotador sobre el agua en una de las ramas ascendentes. Sobre el orificio horizontal de esta rama, colocaba una pequeña escuadra de dibujante, de madera de ébano, perforada en su medio de un hoyo redondo, cuyos bordes fueron bien suavizados; y, habiendo determinado qué elevación se quería tomar por la mitad de la primera oscilación, se hacía, con tinta, una marca muy visible al tallo del flotador, a una altura igual a la elevación, a partir de la cara superior de la escuadra. Además, debía permanecer en los lados del soporte un vacío suficientemente, además de la apertura que dejaba el círculo de la escuadra, para dejar al aire la libertad de entrar en el tubo y salir, siguiendo el movimiento alternativo del agua.

Una vez dispuesto todo, fue colocado verticalmente un pie derecho sobre la escuadra, paralelamente a la varilla del flotador, que servía para medir a ojo la cantidad de pulgadas y de líneas cuya marca hecha al tallo ascendía por encima de la escuadra en cada oscilación.

EXPERIENCIA CXIe. (111)
Sifón, N ° 1; de diámetro, 1 pulgada (0,02707 m).

pi	po	lig.
7	8	7
EQUIVALENCIA EN METROS		
2,27388	0,21656	0,0157906
	Total (m)	**2,506**

Tabla 27. Longitud desarrollada de la columna de agua en el sifón.

pi	po	lig.
0	3	3,5
EQUIVALENCIA EN METROS		
0	0,08121	0,0078953
	Total (m)	0,089

Tabla 28. Elevación de la columna por encima del nivel natural, a partir de la primera oscilación

El agua hizo 18 oscilaciones isócronas en 21 segundos.
Sustituyendo la longitud del sifón L = Ls/2 = 2,506/2 = 1,25 m en la ecuación (Ecuación 55):

$T = 2 \times \pi \times \sqrt{\frac{L}{g}}$ = 2,24 s, pero *Dubuat* utilizó media oscilación T/2 = 1,12 s en sus experiencias.

El movimiento en esta experiencia cesó a los 21 segundos, que dividido entre 1,13 s nos dan 18,75 oscilaciones, que es aproximadamente el valor conseguido por Dubuat.

A continuación, los resultados de la experiencia, tomados de su obra "*Principes d'hidraulique*" y la conversión al Sistema Internacional:

Nombre des oscillations.	Hauteur d'une demi-oscillation. po.	lig.	Nombre des oscillations.	Hauteur d'une demi-oscillation. po.	lig.
0	3	3 $\frac{1}{2}$	10	0	8 $\frac{1}{2}$
2	2	6	12	0	5 $\frac{1}{2}$
4	1	10 $\frac{1}{2}$	14	0	3 $\frac{1}{2}$
6	1	4 $\frac{1}{2}$	16	0	1 $\frac{1}{2}$
8	0	11 $\frac{1}{2}$	18, etc., négligé le reste.		

Tabla 29. Resultados de la experiencia CXIe. (111).

número de oscilaciones		altura de una media-oscilación		altura de una media-oscilación
Nº	pi	po	lig.	m
0	0	3	3,5	0,089
2	0	2	6	0,068
4	0	1	10,5	0,051
6	0	1	4,5	0,037
8	0	0	11,5	0,026
10	0	0	8,5	0,019
12	0	0	5,5	0,012
14	0	0	3,5	0,008
16	0	0	1,5	0,003
18	0	0	0	0,000

Tabla 30. Resultados de la experiencia CXIe. (111) (S.I).

EXPERIENCIA CXIIe.
Sifón, N ° 2; de diámetro, 1 pulgada (0,02707 m).

pi	po	lig.
8	1	5
EQUIVALENCIA EN METROS		
2,59872	0,02707	0,011279
	Total (m)	**2,637**

Tabla 31. Longitud desarrollada de la columna de agua en el sifón.

pi	po	lig.
0	3	3,5
EQUIVALENCIA EN METROS		
0	0,08121	0,0078953
	Total (m)	0,089

Tabla 32. Elevación de la columna por encima del nivel natural, a partir de la primera oscilación.

El agua hizo 14 oscilaciones isócronas en 16 segundos.

Sustituyendo la longitud del sifón L = Ls/2 = 2,637/2 = 1,32 m en la fórmula (Ecuación 55):

$T = 2 \times \pi \times \sqrt{\frac{L}{g}}$ = 2,31 s, pero *Dubuat* utilizó media oscilación T/2 = 1,16 s en sus experiencias.

El movimiento en esta experiencia cesó a los 16 segundos, que dividido entre 1,16 seg nos dan 13,79 oscilaciones, que es aproximadamente el valor conseguido por *Dubuat*.

A continuación, los resultados de la experiencia, tomados de su obra "*Principes d'hidraulique*" y la conversión al Sistema Internacional:

Nombre des oscillations.	Hauteur d'une demi-oscillation. po.	lig.	Nombre des oscillations.	Hauteur d'une demi-oscillation. po.	lig.
0	3	3 ½	8	0	8 ½
2	2	7 ½	10	0	3
4	1	11 ½	12	0	0 ½
6	1	2 ½	14, etc., négligé le reste.		

Tabla 33. Resultados de la experiencia CXIIe.

número de oscilaciones		altura de una media-oscilación		altura de una media-oscilación
Nº	pi	po	lig.	m
0	0	3	3,5	0,089
2	0	2	7,5	0,071
4	0	1	11,5	0,053
6	0	1	2,5	0,033
8	0	0	8,5	0,019
10	0	0	3	0,007
12	0	0	0,5	0,001
14	0	0	0	0,000

Tabla 34. Resultados de la experiencia CXIIe (S.I).

EXPERIENCIA CXIIIe.

Sifón, N ° 3; de diámetro, 2 pulgadas 1 línea (0,056 m).

pi	po	lig.
8	1	5
EQUIVALENCIA EN METROS		
2,59872	0,02707	0,011279
	Total (m)	**2,637**

Tabla 35. Longitud desarrollada de la columna de agua en el sifón.

pi	po	lig.
0	3	3,5
EQUIVALENCIA EN METROS		
0	0,08121	0,0078953
	Total (m)	0,089

Tabla 36. Elevación de la columna por encima del nivel natural, a partir de la primera oscilación.

El agua hizo 26 oscilaciones isócronas en 30 s.

Sustituyendo la longitud del sifón L = Ls/2 = 2,506/2 = 1,25 m en la fórmula (Ecuación 55):

$T = 2 \times \pi \times \sqrt{\frac{L}{g}}$ = 2,24 s, pero *Dubuat* utilizó media oscilación T/s = 1,13 s en sus experiencias.

El movimiento en esta experiencia cesó a los 16 s, que dividido entre 1,13 s nos dan 14,16 oscilaciones, que es aproximadamente el valor conseguido por *Dubuat*.

A continuación, los resultados de la experiencia, tomados de su obra "*Principes d'hidraulique*" y la conversión al Sistema Internacional:

Nombre des oscillations.	Hauteur d'une demi-oscillation. po.	lig.	Nombre des oscillations.	Hauteur d'une demi-oscillation. po.	lig.
0	3	3 ½	18	0	10
2	2	9 ½	20	0	8 ½
4	2	5	22	0	7
6	2	1	24	0	5 ½
8	1	10	26	0	4 ½
10	1	7 ½	28	0	3 ½
12	1	4	30	0	2 ½
14	1	1 ½	32	0	2
16	0	11 ½	34, etc., négligé le reste.		

Tabla 37. Resultados de la experiencia CXIIIe.

número de oscilaciones		altura de una media-oscilación		altura de una media-oscilación
Nº	pi	po	lig.	m
0	0	3	3,5	0,089
2	0	2	9,5	0,076
4	0	2	5	0,065
6	0	2	1	0,056
8	0	1	10	0,050
10	0	1	7,5	0,044
12	0	1	4	0,036
14	0	1	1,5	0,030
16	0	0	11,5	0,026
18	0	0	10	0,023
20	0	0	8,5	0,019
22	0	0	7	0,016
24	0	0	5,5	0,012
26	0	0	4,5	0,010
28	0	0	3,5	0,008
30	0	0	2,5	0,006
32	0	0	2	0,005
34	0	0	0	0,000

Tabla 38. Resultados de la experiencia CXIIIe (S.I).

EXPERIENCIA CXIVe.

Sifón, N ° 4; de diámetro, 2 pulgadas 1 línea (0,056 m).

pi	po	lig.
8	1	5
EQUIVALENCIA EN METROS		
2,59872	0,02707	0,011279
	Total (m)	**2,637**

Tabla 39. Longitud desarrollada de la columna de agua en el sifón.

pi	po	lig.
0	3	3,5
EQUIVALENCIA EN METROS		
0	0,08121	0,0078953
	Total (m)	0,089

Tabla 40. Elevación de la columna por encima del nivel natural, a partir de la primera oscilación.

El agua hizo 30 oscilaciones isócronas en 35 segundos.

Sustituyendo la longitud del sifón L = Ls/2 = 2,637/2 = 1,32 m en la fórmula (Ecuación 55):

$T = 2 \times \pi \times \sqrt{\frac{L}{g}} = 2{,}31$ s, pero *Dubuat* utilizó media oscilación T/2 = 1,16 s en sus experiencias.

El movimiento en esta experiencia cesó a los 16 s, que dividido entre 1,16 s nos dan 30,17 oscilaciones, que es aproximadamente el valor conseguido por *Dubuat*.

A continuación, los resultados de la experiencia, tomados de su obra "*Principes d'hidraulique*" y la conversión al Sistema Internacional:

Nombre des oscillations.	Hauteur d'une demi-oscillation. po.	lig.	Nombre des oscillations.	Hauteur d'une demi-oscillation. po.	lig.
0	3	3 ½	18	0	10
2	2	9 ½	20	0	8 ½
4	2	5	22	0	7
6	2	1	24	0	5 ½
8	1	10	26	0	4 ½
10	1	7 ½	28	0	3 ½
12	1	4	30	0	2 ½
14	1	1 ½	32	0	2
16	0	11 ½	34, etc., négligé le reste.		

Tabla 41. Resultados de la experiencia CXIIIe.

número de oscilaciones		altura de una media-oscilación		altura de una media-oscilación
Nº	pi	po	lig.	m
0	0	3	3,5	0,089
2	0	2	9,5	0,076
4	0	2	5	0,065
6	0	2	1	0,056
8	0	1	10	0,050
10	0	1	7,5	0,044
12	0	1	4	0,036
14	0	1	1,5	0,030
16	0	0	11,5	0,026
18	0	0	10	0,023
20	0	0	8,5	0,019
22	0	0	7	0,016
24	0	0	5,5	0,012
26	0	0	4,5	0,010
28	0	0	3,5	0,008
30	0	0	2,5	0,006
32	0	0	2	0,005
34	0	0	0	0,000

Tabla 42. Resultados de la experiencia CXIIIe (S.I).

EXPERIENCIA CXIVe.

Sifón, N ° 4; de diámetro, 2 pulgadas 1 línea (0,056 m).

pi	po	lig.
8	1	5
EQUIVALENCIA EN METROS		
2,59872	0,02707	0,011279
	Total (m)	**2,637**

Tabla 43. Longitud desarrollada de la columna de agua en el sifón

pi	po	lig.
0	3	3,5
EQUIVALENCIA EN METROS		
0	0,08121	0,0078953
	Total (m)	0,089

Tabla 44. Elevación de la columna por encima del nivel natural, a partir de la primera oscilación.

El agua hizo 30 oscilaciones isócronas en 35 s.

Sustituyendo la longitud del sifón L = Ls/2 = 2,637/2 = 1,32 m en la fórmula (Ecuación 55):

$T = 2 \times \pi \times \sqrt{\frac{L}{g}}$ = 2,31 s, pero *Dubuat* utilizó media oscilación T/2 = 1,16 s en sus experiencias.

El movimiento en esta experiencia cesó a los 16 s, que dividido entre 1,16 s nos dan 30,17 oscilaciones, que es aproximadamente el valor conseguido por *Dubuat*.

A continuación, los resultados de la experiencia, tomados de su obra "*Principes d'hidraulique*" y la conversión al Sistema Internacional:

Nombre des oscillations.	Hauteur d'une demi-oscillation.		Nombre des oscillations.	Hauteur d'une demi-oscillation.	
	po.	lig.		po.	lig.
0	3	4	18	0	7 $\frac{1}{2}$
2	2	10	20	0	5
4	2	4	22	0	4
6	1	10	24	0	3
8	1	6	26	0	2
10	1	2	28	0	1 $\frac{1}{2}$
12	0	11	30	0	1
14	0	9 $\frac{1}{2}$	32	etc.	
16	0	8	34, etc., négligé le reste.		

Tabla 45. Resultados de la experiencia CXIVe.

número de oscilaciones		altura de una media-oscilación		altura de una media-oscilación
Nº	pi	po	lig.	m
0	0	3	4	0,090
2	0	2	10	0,077
4	0	2	5	0,065
6	0	1	10	0,050
8	0	1	6	0,041
10	0	1	2	0,032
12	0	0	11	0,025
14	0	0	9,5	0,021
16	0	0	8	0,018
18	0	0	7,5	0,017
20	0	0	5	0,011
22	0	0	4	0,009
24	0	0	3	0,007
26	0	0	2	0,005
28	0	0	1,5	0,003
30	0	0	1	0,002
32	0	0	1	0,002
34	0	0	0	0,000

Tabla 46. Resultados de la experiencia CXIVe (S.I).

EXPERIENCIA CXVe.

Sifón, N ° 5; de diámetro, 3 pulgadas (0,081m).

pi	po	lig.
8	1	5
EQUIVALENCIA EN METROS		
2,59872	0,02707	0,011279
	Total (m)	**2,637**

Tabla 47. Longitud desarrollada de la columna de agua en el sifón.

pi	po	lig.
1	0	0
EQUIVALENCIA EN METROS		
0,32484	0	0
	Total (m)	0,325

Tabla 48. Elevación de la columna por encima del nivel natural, a partir de la primera oscilación.

El agua hizo 52 oscilaciones isócronas en 60 s y medio.

Sustituyendo la longitud del sifón L = Ls/2 = 2,637/2 = 1,32 m en la fórmula (Ecuación 55):

$T = 2 \times \pi \times \sqrt{\frac{L}{g}}$ = 2,31 s, pero *Dubuat* utilizó media oscilación T/2 = 1,16 s en sus experiencias.

El movimiento en esta experiencia cesó a los 60 s y medio, que dividido entre 1,16 s nos dan 52,15 oscilaciones, que es aproximadamente el valor conseguido por Dubuat.

A continuación, los resultados de la experiencia, tomados de su obra "*Principes d'hidraulique*" y la conversión al Sistema Internacional:

Nota. Tratamos de dar incluso más particularmente en este experimento, toda la precisión que era susceptible.

Nombre des oscillations.	Hauteur d'une demi-oscillation. po.	lig.		Nombre des oscillations.	Hauteur d'une demi-oscillation. po.	lig.	
0	12	0		54	0	9	
2	10	4		56	0	8	
4	9	1		58	0	7	+
6	8	0		60	0	6	+
8	7	1		62	0	5 $\frac{3}{4}$	
10	6	3 $\frac{3}{4}$		64	0	5 $\frac{1}{2}$	
12	5	8 $\frac{1}{2}$		66	0	5	+
14	5	2		68	0	4 $\frac{1}{2}$	
16	4	8		70	0	4	
18	4	3		72	0	3 $\frac{1}{2}$	+
20	3	9 $\frac{1}{2}$		74	0	3 $\frac{1}{4}$	
22	3	5		76	0	3	
24	3	1		78	0	3	—
26	2	9		80	0	2 $\frac{1}{2}$	—
28	2	6		82	0	2 $\frac{1}{3}$	
30	2	3		84	0	2	+
32	2	0 $\frac{1}{2}$		86	0	2	
34	1	10 $\frac{1}{2}$		88	0	1 $\frac{3}{4}$	
36	1	8		90	0	1 $\frac{1}{2}$	+
38	1	6 $\frac{1}{3}$		92	0	1 $\frac{1}{3}$	—
40	1	4 $\frac{1}{2}$		94	0	1 $\frac{1}{4}$	
42	1	3 $\frac{1}{3}$		96	0	1	
44	1	2		98	0	1	—
46	1	1		100	0	0 $\frac{3}{4}$	
48	1	0		102	0	0 $\frac{2}{3}$	
50	0	11		104	0	0 $\frac{1}{2}$	
52	0	10		106	0	0 $\frac{1}{4}$	+

Tabla 49. Resultados de la experiencia CXVe.

Tabla 44. Resultados de la experiencia **CXVe (S.I)**

número de oscilaciones		altura de una media-oscilación		altura de una media-oscilación
Nº	pi	po	lig.	m
0	0	12	0	0,325
2	0	10	4	0,280
4	0	9	1	0,246
6	0	8	0	0,217
8	0	7	1	0,192
10	0	6	3,75	0,171
12	0	5	8,5	0,155
14	0	5	2	0,140
16	0	4	8	0,126
18	0	4	3	0,115
20	0	3	9,5	0,103
22	0	3	5	0,092
24	0	3	1	0,083
26	0	2	9	0,074
28	0	2	6	0,068
30	0	2	3	0,061
32	0	2	0,5	0,055
34	0	1	10,33	0,050

Tabla 50. Resultados de la experiencia CXVe (S.I).

número de oscilaciones		altura de una media-oscilación		altura de una media-oscilación
Nº	pi	po	lig.	m
36	0	1	8	0,041
38	0	1	6,33	0,037
40	0	1	4,5	0,035
42	0	1	3,33	0,032
44	0	1	2	0,029
46	0	1	1	0,027
48	0	1	0	0,025
50	0	0	11	0,023
52	0	0	10	0,020
54	0	0	9	0,018
56	0	0	8	0,016
58	0	0	7	0,014
60	0	0	6	0,013
62	0	0	5,75	0,012
64	0	0	5,5	0,011
66	0	0	5	0,010
68	0	0	4,5	0,009
70	0	0	4	0,008
72	0	0	3,5	0,008
74	0	0	3,5	0,007
76	0	0	3	0,007
78	0	0	3	0,006
80	0	0	2,5	0,006
82	0	0	2,5	0,005
84	0	0	2	0,005
86	0	0	2	0,004
88	0	0	1,75	0,003
90	0	0	1,5	0,003
92	0	0	1,5	0,003
94	0	0	1,25	0,002
96	0	0	1	0,002
98	0	0	1	0,002
100	0	0	0,75	0,001
102	0	0	0,66	0,001
104	0	0	0,5	0,001
106	0	0	0,25	0,000

Tabla 51. Resultados de la experiencia CXVe (S.I) cont.

EXPERIENCIA CXVIe.

Sifón, N ° 6; de diámetro, 3 pulgadas (0,081 m).

pi	po	lig.
32	5	8
EQUIVALENCIA EN METROS		
10,39488	0,13535	0,0180464
	Total (m)	**10,548**

Tabla 52. Longitud desarrollada de la columna de agua en el sifón.

pi	po	lig.
0	3	4
EQUIVALENCIA EN METROS		
0	0,08121	0,0090232
	Total (m)	0,090

Tabla 53. Elevación de la columna por encima del nivel natural, a partir de la primera oscilación.

El agua hizo 38 oscilaciones en 89 s, o 26 en 60 s y medio.

Sustituyendo la longitud del sifón L = Ls/2 = 10,54/2 = 5,27 m en la fórmula (Ecuación 55):

$T = 2 \times \pi \times \sqrt{\frac{L}{g}}$ = 4,60 s, pero *Dubuat* utilizó media oscilación T/2 = 2,30 s en sus experiencias.

El movimiento en esta experiencia cesó a los 60 s y medio, que dividido entre 2,30 s nos dan 26,30 oscilaciones, que es aproximadamente el valor conseguido por Dubuat.

A continuación, los resultados de la experiencia, tomados de su obra "*Principes d'hidraulique*" y la conversión al Sistema Internacional:

Nombre des oscillations.	Hauteur d'une demi-oscillation.		Nombre des oscillations.	Hauteur d'une demi-oscillation.	
	po.	lig.		p.	lig.
0	3	4	26	0	5 $\frac{3}{4}$
2	2	11	28	0	4 $\frac{3}{4}$
4	2	6 $\frac{1}{3}$	30	0	4
6	2	2 $\frac{1}{2}$	32	0	3 $\frac{1}{4}$
8	1	10 $\frac{3}{4}$	34	0	2 $\frac{2}{3}$
10	1	7 $\frac{2}{3}$	36	0	2
12	1	5	38	0	1 $\frac{2}{3}$
14	1	2 $\frac{1}{2}$	40	0	1 $\frac{1}{4}$
16	1	0 $\frac{1}{4}$	42	0	1
18	0	10 $\frac{1}{2}$	44	0	0 $\frac{2}{3}$
20	0	9	46	0	0 $\frac{1}{2}$
22	0	8	48	0	0 $\frac{1}{4}$
24	0	6 $\frac{3}{4}$	50	0	0 $\frac{1}{5}$

Tabla 54. Resultados de la experiencia CXVIe.

número de oscilaciones		altura de una media-oscilación		altura de una media-oscilación
Nº	pi	po	lig.	m
0	0	3	4	0,090
2	0	2	11	0,079
4	0	2	6,33	0,068
6	0	2	2,5	0,060
8	0	1	10,75	0,051
10	0	1	7,66	0,044
12	0	1	5	0,038
14	0	1	2,5	0,033
16	0	1	0,75	0,029
18	0	0	10,5	0,024
20	0	0	9	0,020
22	0	0	8	0,018
24	0	0	6,75	0,015
26	0	0	5,75	0,013
28	0	0	4,75	0,011
30	0	0	4	0,009
32	0	0	3,25	0,007
34	0	0	2,66	0,006
36	0	0	2	0,005
38	0	0	1,66	0,004
40	0	0	1,25	0,003
42	0	0	1	0,002
44	0	0	0,66	0,001
46	0	0	0,33	0,001
48	0	0	0,25	0,001
50	0	0	0,33	0,001

Tabla 55. Resultados de la experiencia CXVIe (S.I).

Dubuat observó que en los experimentos 112 y 114 (sifones 2 y 4) que:

La presión media contra las paredes de la tubería fue mucho menor que en los experimentos 111 y 113 (sifones 1 y 3).

Las velocidades eran menores en estos dos sifones debido a que las columnas de fluidos eran un poco más cortas.

Estas dos razones eran suficientes para creer que las resistencias fueran menores y que fuera más largo el tiempo del movimiento, pero ocurrió todo lo contrario a lo esperado, por lo tanto, *Dubuat* llegó a la conclusión que:

LA PRESIÓN QUE EL AGUA EJERCE SOBRE LAS PAREDES DE LA CONDUCCIÓN ES INDEPENDIENTE DE LA INTENSIDAD Y RESISTENCIA EN LA MISMA.

Es decir, que, aunque aumentemos la presión en las conducciones, la resistencia será ajena a dicha presión.

Asimismo, comparando en las experiencias 111, 113 y 115 las pérdidas de movimiento en las conducciones con diámetros diferentes, observó que:

La resistencia en las tuberías cuyos diámetros son diferentes, es casi proporcional a la inversa del radio medio.

Observó que las diferencias en las pérdidas de movimiento eran patentes, a igualdad de la duración de las oscilaciones, en las conducciones de menor a mayor diámetro, es decir: **A MAYOR RADIO MENOR RESISTENCIA Y MAYOR MOVIMIENTO**.

En el siguiente gráfico (Ilustración 45) se observa como teniendo la misma cantidad de movimiento, es decir 0,86 oscilaciones por segundo, vemos como en las conducciones de menor a mayor diámetro, las resistencias van siendo menores y por lo tanto los periodos del movimiento son más largos.

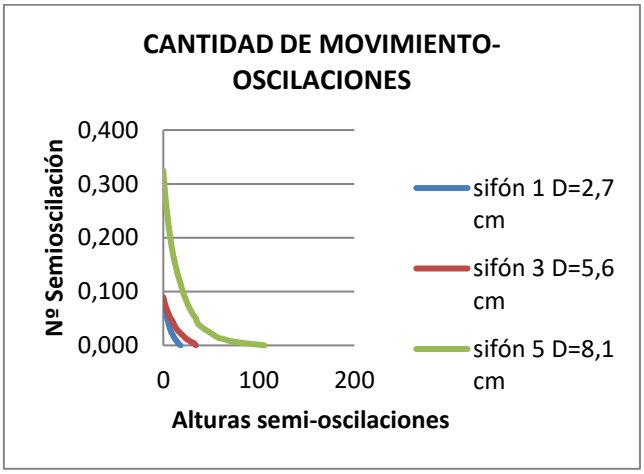


Ilustración 45. Gráfico cantidad de movimiento – oscilaciones.

Dedujo que, "cuando las velocidades son diferentes, las resistencias crecen en menor razón que el cuadrado de estas velocidades".

Comparo en las experiencias 115 y 116 el tiempo de duración de las oscilaciones y observó lo siguiente:

El tiempo de la duración de las oscilaciones en la experiencia 115 es sólo la mitad del de las oscilaciones de la experiencia 116, lo que quiere decir que la velocidad es el doble:

EXP. 115 → V5 = 0,86 osc/s

EXP. 116 → V6 = 0,43 osc/s

Es decir: V5 = 2xV6

Pero la longitud del sifón en el segundo experimento es cuatro veces la longitud del sifón en la primera; por lo tanto, hay que concluir que la resistencia o pérdida de movimiento, deberían ser iguales en ambos experimentos para el mismo número de oscilaciones:

L5 = 2,64 m

L6 = 4xL5 = 10,56 m.

Se debería concluir que la resistencia o pérdida de movimiento, deberían ser iguales en ambos experimentos para un mismo número de oscilaciones, pero no es así, porque la pérdida del movimiento en la experiencia 115, durante 26 oscilaciones, a partir de la 22 hasta la 48, es igual a la pérdida de movimiento en la experiencia 116, durante 16 oscilaciones, a contar después o hasta la oscilación 16 ver (Tabla 56).

SIFON 5					SIFO 6				
número de oscilaciones		altura de una media-oscilación		altura de una media-oscilación	número de oscilaciones		altura de una media-oscilación		altura de una media-oscilación
Nº	pi	po	lig.	m	Nº	pi	po	lig.	m
0	0	12	0	0,325	0	0	3	4	0,090
2	0	10	4	0,280	2	0	2	11	0,079
4	0	9	1	0,246	4	0	2	6,33	0,068
6	0	8	0	0,217	6	0	2	2,5	0,060
8	0	7	1	0,192	8	0	1	10,75	0,051
10	0	6	3,75	0,171	10	0	1	7,66	0,044
12	0	5	8,5	0,155	12	0	1	5	0,038
14	0	5	2	0,140	14	0	1	2,5	0,033
16	0	4	8	0,126	16	0	1	0,75	0,029
18	0	4	3	0,115	18	0	0	10,5	0,024
20	0	3	9,5	0,103	20	0	0	9	0,020
22	0	3	5	0,092	22	0	0	8	0,018
24	0	3	1	0,083	24	0	0	6,75	0,015
26	0	2	9	0,074	26	0	0	5,75	0,013
28	0	2	6	0,068	28	0	0	4,75	0,011
30	0	2	3	0,061	30	0	0	4	0,009
32	0	2	0,5	0,055	32	0	0	3,25	0,007
34	0	1	10,33	0,050	34	0	0	2,66	0,006
36	0	1	8	0,041	36	0	0	2	0,005
38	0	1	6,33	0,037	38	0	0	1,66	0,004
40	0	1	4,5	0,035	40	0	0	1,25	0,003
42	0	1	3,33	0,032	42	0	0	1	0,002
44	0	1	2	0,029	44	0	0	0,66	0,001
46	0	1	1	0,027	46	0	0	0,33	0,001
48	0	1	0	0,000	48	0	0	0,25	0,001
					50	0	0	0,33	0,001

Tabla 56. Resultados número oscilaciones – alturas sifón 5 y 6.

De ahí que, obviamente, se deduce que: LA RESISTENCIA AUMENTA EN MENOR RAZÓN QUE EL CUADRADO DE LAS VELOCIDADES, YA QUE TENEMOS SUFICIENTES PUNTOS CIERTOS, HABLANDO DE MOVIMIENTO UNIFORME.

$$\frac{\text{NºOSC.EXP.115}}{\text{NºOSC.EXP.116}} = \left(\frac{R1}{R2}\right) = \left(\frac{26}{16}\right) = 1,63$$ **Ecuación 57**

$$\left(\frac{\text{VEL.EXP.115}}{\text{VEL.EXP.116}}\right)^2 = \left(\frac{0,86}{0,43}\right)^2 = 4$$ **Ecuación 58**

5.1.6 Reinhard Woltman (1757 – 1837)

Biografía sucinta

Ilustración 46. Retrato de Reinhard Woltman

Ingeniero nacido en *Axleben* (Alemania), hijo de un agricultor, fue profesor de escuela en dicho pueblo. Posteriormente fue trasladado al distrito de *Ritzebüttel*, zona en donde la erosión costera constituía un reto para los mejores ingenieros hidráulicos de la época, debido a que sus instalaciones de protección habían sido destruidas sobre siete veces. A la vista de esto, *Woltman* se fijó como objetivo el desarrollo del medio más fuerte de protección, y sirvió de arranque para su carrera.

En mayo de 1779 fue nombrado subinspector y empleado administrativo en la oficina encargada de construir y mantener el control de la erosión de las estructuras costeras. En 1780 comenzó a tomar cursos de Matemáticas y Arquitectura en *Hamburgo* y posteriormente en las universidades de *Kiel* y *Gotinga*, después hizo un viaje durante la cual se reunió con trabajadores cualificados en Hidráulica en *Francfort*, *París*, *Estrasburgo*, *Cherbourg*, *Calais*, *Dover*, Londres y Holanda. El 20 de noviembre de 1784 regreso a *Ritzebüttel* en donde comenzó a trabajar en el problema de la erosión local y se dedicó a la dirección de puertos y aguas navegables. Inventor del primer molinete hidráulico (1790) equipado con un tipo de turbina, adecuada para medir el flujo de líquidos y gases en conductos.

El primer libro Woltman, "*Theorie und des Gebrauch hydrometrischen Flügels*" (La teoría y el uso del ala hidrométrico) (1790), señala a la atención el amplio uso en Inglaterra y Holanda del viento y el agua. Afirmó, debe hacerse en la zona de

Hamburgo, y añadió que, si su idea era adoptada, frecuentes mediciones de las velocidades del viento y el agua podrían proporcionar datos de gran valor. El resto del libro está dedicado en gran parte a los instrumentos que había diseñado para ese propósito (Biography, 2008).

Sus siguientes obras fueron "*Beiträge zur Hydraulischen Architectur"* (Contribuciones a la Arquitectura Hidráulica) en varios volúmenes publicados en *Göttingen* (1791-1799). Estas publicaciones tratan sobre la ingeniería hidráulica en general, con énfasis en las ecuaciones de cálculo pérdidas hidráulicas en tuberías y canales. Debido a su invención histórica en Hidráulica, en la actualidad los instrumentos utilizados para medir el flujo de agua, especialmente a caudales más altos son generalmente llamados contadores *Woltman*. Murió en *Cuxhaven*, donde fue "*Wasserbaudirektor*" (director de Planificación de Agua) de Ingeniería Hidráulica de la Universidad (1792-1836).

Aporte y desarrollo de su fórmula

Las primeras ecuaciones relativas a la velocidad del flujo del agua y, por lo tanto, la de las pérdidas de carga válidas, fueron quizás las concebidas por *Antoine Chézy* y *Pierre Dubuat*, contemporáneos de *Woltman*. La ecuación formulada por *Chézy* pasó desapercibida, al contrario del trabajo de *Dubuat* que fue mucho más favorable, pero su ecuación era tan complicada y difícil de aplicar que *Woltman* recomendó una mucho más sencilla. Gran parte de su simplificación fue posible gracias a los experimentos que *Woltman* había llevado a cabo y que justifican el uso de potencias (exponentes) para las velocidades que van desde 1,75 (para tubos) a 2 (para canales abiertos).

En su obra "*Beiträge zur Hydraulischen Architectur*" (Contribuciones a la Arquitectura Hidráulica) parte de la base de que la resistencia o pérdida de carga ocasionada por el fluir de la tubería en una conducción dependerá de la velocidad con la que el flujo discurre por esta (Woltmann, 1791). Si esta resistencia se origina por los empujones del agua contra las irregularidades de las paredes, podría ser proporcional a la superficie de las paredes, pero por el apego y la pegajosidad de

las partículas del agua a lo mejor puede resultar alguna otra potencia de la velocidad que habrá que determinarla con experimentos.

A la vista de lo anterior, la resistencia tiene que ser proporcional al perímetro de la conducción, pues cuanto mayor es la pared tantas más irregularidades encontrará la corriente (Woltmann, 1791).

Podemos poner, siguiendo con la nomenclatura utilizada por *Woltmann* en su libro:

$$\text{Resistencia} = \frac{V^x P}{m}$$ **Ecuación 59**

Donde

V = Velocidad en pulg/s

P = Perímetro de la sección transversal en pulg.

m = Número a encontrar con experimentos

Woltmann partió de la ecuación fundamental:

$$\frac{V^x P}{m} = \frac{s\ g}{b}$$ **Ecuación 60**

O también:

$$\frac{V^x}{m} = \frac{s\,g}{b\,P}$$ **Ecuación 61**

Donde

s = Sección de la conducción en pulg.^{2} (tubería o canal)

g = Aceleración de la gravedad = 362 pulg/s^2

b = Longitud de la conducción en pulg.

Si hacemos

$$\frac{s}{P} = r$$ **Ecuación 62** (radio hidráulico)

Se obtiene:

$$\frac{V^x}{m} = \frac{g\,r}{b}$$ **Ecuación 63**

Para determinar primero x (para *Dubuat* x=2), con los mismos experimentos, tendremos la siguiente proporción de esa ecuación con diferentes corrientes, las cuales tienen las velocidades V y v.

$$\frac{V^x}{v^x} = \frac{\frac{R}{B}}{\frac{r}{b}}$$ **Ecuación 64** → $$\left(\frac{V}{v}\right)^x = \left(\frac{\frac{R}{B}}{\frac{r}{b}}\right)$$ **Ecuación 65**

Tomando logaritmos en ambos miembros

$$\log\left(\frac{V}{v}\right)^x = \log\left(\frac{\frac{R}{B}}{\frac{r}{b}}\right)$$ **Ecuación 66** → $$x\log\left(\frac{V}{v}\right) = \log\left(\frac{\frac{R}{B}}{\frac{r}{b}}\right)$$ **Ecuación 67**

$$x\left(\log V - \log v\right) = \log\left(R/B\right) - \log\left(r/b\right)$$ **Ecuación 68**

$$x = \frac{\log\left(R/B\right) - \log\left(r/b\right)}{\left(\log V - \log v\right)}$$ **Ecuación 69**

Con esa fórmula diferentes experimentos arrojaron un valor de x=1,74.

Por consiguiente

$$\frac{V^{1,74}\,P}{m} = \frac{s\,g}{b}$$ **Ecuación 70**

Despejando m quedaría:

$$m = \frac{V^{1,74} b\ P}{s\ g} = \frac{V^{1,74}\ b}{\frac{s}{P}\ g} = \frac{V^{1,74}\ b}{r\ g}$$

$$m = \frac{V^{1,74}\ b}{r\ g}$$ **Ecuación 71**

tomando logaritmos

$$\log m = \log\left(\frac{V^{1,74} b}{r\ g}\right) = \log\left(V^{1,74} b\right) - \log\left(r\ g\right)$$ **Ecuación 72**

$$\log m = \left(\frac{7}{4}\right) \log V + \log b - \left(\log g + \log r\right)$$ **Ecuación 73**

$$\log m = \log 133,61$$ **Ecuación 74**

Con 87 experimentos de los números 39 a 125 encontró la media para log m = 2,1258390, luego:

$$m = 10^{2,1258390} = 133,61$$ **Ecuación 75**

Aplicó el mismo concepto para la fórmula de *Dubuat*, en la que la resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad (V^2), que se correspondía con el cálculo habitual en aquella época.

Con los 87 experimentos de los números 39 a 125 encontró la media para log m = 2,4362196 y procediendo de igual forma que en el caso anterior obtuvo:

$$\log m = \left(\frac{1}{2}\right) \log V + \log b - \left(\log g + \log r\right)$$ **Ecuación 76**

$$\log m = \log 73{,}03$$ **Ecuación 77**

$$m = 10^{2{,}4362196} = 273{,}06$$ **Ecuación 78**

Para encontrar entonces esta teoría tomo los restantes datos de los experimentos y cálculo la fórmula en función de V, así que despejando se obtuvo:

$$\log V = \left(\frac{4}{7}\right)\left(\log g + \log m + \log r - \log b\right)$$ **Ecuación 79**

Woltman calculó en la siguiente tabla (Tabla 57) con ambas fórmulas, y observó por los resultados que su ecuación era lo suficientemente válida con los experimentos realizados con las tuberías.

También observó que la ecuación de *Dubuat* difería un poco más, pero en los experimentos correspondientes a los canales abiertos, del número 90 al 125, parece ser más correcto utilizar esta última.

En los tubos pequeños en los que los diámetros son menores de ½ pulgada, observó en los experimentos del 1 al 38, que no valía ninguna de las dos fórmulas de forma considerable.

Según *Woltman*, no se podía esperar que una única fórmula pudiera resolver cualquier caso, sobre todo con una gran corriente en un tubo de diámetro pequeño. No obstante, consideraba que estos tubos tenían poca utilidad en la práctica.

Woltman simplificó en su obra la ecuación de *Dubuat* de la siguiente manera:

$$\frac{V^2}{m} = \frac{g\,r}{b}$$ **Ecuación 80**

$$\frac{V^2}{273} = \frac{gr}{b}\left(\frac{g}{g}\right)$$ **Ecuación 81**

$$\frac{V^2 g}{273} = \frac{g^2 r}{b}$$ **Ecuación 82**

como g = 362 pulgadas/s^2

$$\frac{V^2 g}{\frac{273}{g}} = \frac{g^2 r}{b}$$ **Ecuación 83** → $$\frac{V^2}{\frac{273}{362} g} = \frac{g\, r}{b}$$ **Ecuación 84**

Si despejamos V y hacemos

$$\frac{r}{b} = \alpha$$ **Ecuación 85,**

se obtiene la ecuación simplificada de *Dubuat*

$$V = 0{,}868\, g \sqrt{\frac{r}{g}} = 0{,}868 \sqrt{\alpha}$$ **Ecuación 86**

Si seguimos el mismo procedimiento con la ecuación de *Woltman*, se obtiene:

$$\frac{V^{\frac{7}{4}}}{m} = \frac{g\, r}{b}$$ **Ecuación 67** → $$\frac{V^{\frac{7}{4}} g}{133{,}60} = \frac{g\, r}{b}\left(\frac{g}{g}\right)$$ **Ecuación 87**

$$\frac{V^{\frac{7}{4}} g}{133{,}60} = \frac{g^2\, r}{b}$$ **Ecuación 88**

como g = 362 pulgadas/s^2

$$\frac{V^{\frac{7}{4}}}{\frac{273}{g}} = \frac{g^2\, r}{b}$$ **Ecuación 89** → $$\frac{V^2}{\frac{133{,}6}{362} g} = \frac{g\, r}{b}$$ **Ecuación 90**

Si despejamos V y hacemos $\frac{r}{b} = \alpha$, se obtiene la ecuación simplificada de

Woltman:

$$V=0{,}566\ g^{\frac{8}{7}}\sqrt{\frac{r}{g}}=0{,}566g^{\frac{8}{7}}\alpha^{\frac{4}{7}} \rightarrow V=0{,}566g^{\frac{8}{7}}\alpha^{\frac{4}{7}}$$ **Ecuación 91**

A continuación, la (Tabla 57) y (Tabla 58) "Tabla de comparación entre experiencia y teoría sobre el movimiento uniforme del agua.", sacada de su obra "*Beiträge zur Hydraulischen Architectur*" (Woltmann, 1791).

Primero se expondrá la tabla extraída del libro y posteriormente se compararán los resultados haciendo los cálculos mediante una hoja Excel y gráficos para analizar las diferencias existentes entre ambas fórmulas, para lo cual se repite la Tabla.

De izquierda a derecha, las columnas traducidas de la (Tabla 57) y (Tabla 58) son las siguientes:

Número de los intentos/experimentos	Diámetro de los tubos	Valores de		Velocidad		
		s/p=r	b	Después de los intentos.	I.	II.
	Pulg.	pulg.		Pulg.	Pulg.	Pulg.

Vergleichungstafel zwischen Erfahrung und Theorie über die gleichförmige Bewegung des Wassers.

Nro. der Versuche.	Durchmesser der Röhre.	Werthe von $\frac{s}{p} = r$	b	Geschwindigkeit nach den Versuchen.	berechnet nach I.	berechnet nach II.
	Zoll.	Zoll.		Zoll.	Zoll.	Zoll.
39	1	0,25	5,650	84,94	80,01	66,14
40	—	—	7,480	71,30	68,15	57,47
41	—	—	10,320	58,81	56,71	48,93
42	—	—	10,790	58,31	55,28	47,80
43	—	—	33,20	29,34	29,09	27,77
44	—	—	33,66	28,67	28,86	27,09
45	—	—	54,26	21,86	21,96	21,34
46	—	—	57,78	20,97	21,19	20,68
47	—	—	64,16	19,99	19,96	19,63
48	—	—	87,87	16,62	16,67	16,77
49	—	—	87,87	16,28	16,67	16,77
50	—	—	101,03	15,11	15,40	15,64
51	—	—	132,16	13,31	12,78	13,68
52	—	—	186,00	10,67	10,87	11,52
53	—	—	186,00	10,44	10,87	11,52
54	—	—	257,86	8,69	9,01	9,79
55	—	—	1540,76	3,62	3,24	4,00
56	—	—	5113,42	1,59	1,13	2,20
57	—	—	54,59	22,28	21,89	21,28
58	—	—	161,31	12,22	11,79	12,38
59	1,333	0,333	19,08	48,53	47,02	41,53
60	—	—	33,62	34,47	34,01	31,28
61	—	—	37,08	33,16	32,16	29,80
62	—	—	48,35	28,07	27,64	26,09
63	—	—	63,18	24,00	23,72	22,82
64	—	—	66,50	23,36	23,07	22,28
65	—	—	78,05	21,03	21,02	20,53
66	—	—	92,95	18,90	19,02	18,81
67	—	—	25,87	18,94	18,69	18,53
68	—	—	195,60	16,13	16,02	16,19
69	—	—	155,40	14,07	14,18	14,55
70	—	—	185,25	12,56	12,83	13,33
71	2,010	0,502	21,47	58,90	55,57	48,07
72	—	—	35,81	43,00	41,48	37,23
73	—	—	41,27	40,32	38,25	34,67
74	—	—	50,41	35,76	34,12	31,37
75	—	—	65,14	30,90	29,47	27,60

Tabla 57. Comparación entre experiencia y teoría sobre el movimiento uniforme del agua.

168

Nro der Versuche.	Durchmesser der Röhre.	Werthe von $\frac{s}{p} = r$	Werthe von b	Geschwindigkeit nach den Versuchen.	Geschwindigkeit berechnet nach I.	Geschwindigkeit berechnet nach II.
	Zoll.	Zoll.		Zoll.	Zoll.	Zoll.
76	2,010	0,502	70,14	29,21	28,25	20,60
77	—	—	79,95	27,47	26,21	24,91
78	—	—	94 79	24,73	23,78	22,88
79	—	—	99,50	23,81	23,14	22,33
80	—	—	129,07	20,71	19,94	19,61
81	—	—	158,75	18,30	17,72	17,68
82	—	—	188,52	16,38	16,06	16,23
83	5,000	1,25	3378,26	5,32	5,20	6,04
84	—	—	3518,98	5,21	5,08	5,92
85	—	—	4005,66	4,81	4,71	5,55
86	—	—	5041,61	4,13	4,13	4,95
87	—	—	7450,42	3,15	3,31	4,07
88	—	—	15110,96	2,01	2,20	2,85
89	18	4,50	304,97	39,16	42,71	38,19
90	Canal	1,44	212,00	27,51	27,79	25,91
91	factice	1,72	212,	28,92	30,35	28,32
92	trapèze	3,21	412,	27,14	29,06	27,75
93		1,77	427,	18,28	20,67	20,24
94		2,17	427	20,30	23,23	22,41
95		2,48	427	22,37	25,04	23,96
96		2,62	427	23,54	25,87	24,63
97		3,49	432	28,29	30,24	28,26
98		3,53	432	28,52	30,40	28,42
99		3,85	432	30,16	32,02	29,68
100		3,95	432	31,58	32,50	30,07
101		4,03	432	31,89	32,87	30,36
102		4,10	432	32,52	33,19	30,63
103		1,53	1728	8,94	8,56	9,36
104		2,02	1728	9,71	10,04	10,75
105		2,09	1728	11,45	10,23	10,94
106		2,15	1728	12,34	10,67	11,34
107	rectan-	1,62	458	20,24	18,18	18,69
108	gulaire	3,17	458	28,29	27,72	26,16
109		1,62	929	13,56	12,61	13,13
110		1,65	1412	9,20	10,03	10,75
111		2,23	1412	12,10	11,92	12,49
112		2,92	1412	14,17	13,89	14,29
113		3,52	1412	15,55	15,49	15,60
114		2,73	9288	4,59	4,56	5,28
115		4,40	9288	5,70	5,98	6,84

Nro.

Tabla 58. Comparación entre experiencia y teoría sobre el movimiento uniforme del agua (cont.)

Nro. der Versuche.		Werthe von $\frac{s}{p} = r$	b	Geschwindigkeit nach den Versuchen.	berechnet nach I.	II.
116	Canal du Jard.	40,43	8919	17,42	21,76	21,16
117		32,53	11520	12,17	16,61	16,71
118		29,10	15360	15,74	13,22	13,68
119		23,11	21827	9,61	9,48	10,23
120		21,89	27648	7,79	8,03	8,85
121		18,90	27048	7,27	7,38	8,22
122	Rivière du Háyne	55,36	6048	35,11	32,52	30,08
123		64,62	6413	31,77	34,35	31,56
124		54,41	32951	13,61	12,84	12,78
125		65,63	35723	15,96	12,99	13,56

Tabla 59. Comparación entre experiencia y teoría sobre el movimiento uniforme del agua (cont.)

A continuación, la (Tabla 60), corregida con la "fe de erratas" que viene en la obra de *Woltman* y recalculada según las fórmulas de *Woltman* y *Dubuat*.

En este último cálculo se le han añadido dos columnas más con las diferencias de las velocidades reales y las arrojadas por las fórmulas, y se ha resaltado con color azul la cifra que más se aproxima a cero, que es la que indica que fórmula se aproxima más al valor real.

	DIAMETRO TUBOS	S/P	b	V. REAL	WOLTMAN	DUBUAT	DIFERENCIAS	
Nº EXPERIMENTOS	(pulg)	r (pulg)	(pulg)	V	Vw	Vd	Dif=V - Vw	Dif=V - Vd
39	1	0,25	5,650	84,94	80,03	66,10	4,91	18,84
40	1	0,25	7,480	71,3	68,18	57,44	3,12	13,86
41	1	0,25	10,320	58,81	56,73	48,91	2,08	9,90
42	1	0,25	10,790	58,31	55,30	47,83	3,01	10,48
43	1	0,25	33,200	29,34	29,09	27,27	0,25	2,07
44	1	0,25	33,660	28,67	28,87	27,08	-0,20	1,59
45	1	0,25	54,260	21,86	21,97	21,33	-0,11	0,53
46	1	0,25	57,780	20,97	21,20	20,67	-0,23	0,30
47	1	0,25	64,160	19,99	19,97	19,61	0,02	0,38
48	1	0,25	87,870	16,62	16,68	16,76	-0,06	-0,14
49	1	0,25	87,870	16,28	16,68	16,76	-0,40	-0,48
50	1	0,25	101,030	15,11	15,40	15,63	-0,29	-0,52
51	1	0,25	132,160	13,31	13,21	13,67	0,10	-0,36
52	1	0,25	186,000	10,67	10,87	11,52	-0,20	-0,85
53	1	0,25	186,000	10,44	10,87	11,52	-0,43	-1,08
54	1	0,25	257,860	8,69	9,02	9,78	-0,33	-1,09
55	1	0,25	1540,760	3,62	3,25	4,00	0,37	-0,38
56	1	0,25	5113,420	1,59	1,64	2,20	-0,05	-0,61
57	1	0,25	54,590	22,28	21,90	21,26	0,38	1,02
58	1	0,25	161,310	12,22	11,79	12,37	0,43	-0,15
59	1,33	0,333	19,08	48,53	47,03	41,51	1,50	7,02
60	1,33	0,333	33,62	34,47	34,03	31,27	0,44	3,20
61	1,33	0,333	37,08	33,16	32,17	29,78	0,99	3,38
62	1,33	0,333	48,35	28,07	27,65	26,08	0,42	1,99
63	1,33	0,333	63,18	24	23,73	22,81	0,27	1,19
64	1,33	0,333	66,3	23,36	23,08	22,27	0,28	1,09
65	1,33	0,333	78,05	21,03	21,03	20,52	0,00	0,51
66	1,33	0,333	92,95	18,94	19,03	18,81	-0,09	0,13
67	1,33	0,333	95,87	18,94	18,70	18,52	0,24	0,42
68	1,33	0,333	125,6	16,13	16,02	16,18	0,11	-0,05
69	1,33	0,333	155,4	14,07	14,19	14,55	-0,12	-0,48
70	1,33	0,333	185,25	12,56	12,83	13,32	-0,27	-0,76
71	2,10	0,502	21,47	58,9	55,59	48,05	3,31	10,85
72	2,10	0,502	35,81	43	41,50	37,20	1,50	5,80
73	2,10	0,502	41,27	40,32	38,27	34,65	2,05	5,67
74	2,10	0,502	50,41	35,76	34,13	31,36	1,63	4,40
75	2,10	0,502	65,14	30,9	29,48	27,58	1,42	3,32
76	2,10	0,502	70,14	29,21	28,26	26,58	0,95	2,63
77	2,10	0,502	79,95	27,47	26,22	24,90	1,25	2,57
78	2,10	0,502	94,79	24,73	23,79	22,87	0,94	1,86
79	2,10	0,502	99,5	23,81	23,14	22,32	0,67	1,49
80	2,10	0,502	129,07	20,71	19,95	19,60	0,76	1,11
81	2,10	0,502	158,75	18,3	17,72	17,67	0,58	0,63
82	2,10	0,502	188,52	16,38	16,06	16,21	0,32	0,17
83	5	1,25	3378,26	5,32	5,20	6,04	0,12	-0,72
84	5	1,25	3518,98	5,21	5,08	5,92	0,13	-0,71
85	5	1,25	4005,66	4,81	4,72	5,55	0,09	-0,74
86	5	1,25	5041,61	4,13	4,14	4,95	-0,01	-0,82
87	5	1,25	7450,42	3,15	3,31	4,07	-0,16	-0,92
88	5	1,25	15119,96	2,01	2,21	2,86	-0,20	-0,85
89	18	4,5	304,97	39,16	42,73	38,17	-3,57	0,99
90	canal trapez.	1,44	212	27,51	27,43	25,90	0,08	1,61
91	canal trapez.	1,72	212	28,92	30,36	28,30	-1,44	0,62
92	canal trapez.	3,21	412	27,14	29,67	27,74	-2,53	-0,60
93	canal trapez.	1,77	427	18,28	20,68	20,23	-2,40	-1,95
94	canal trapez.	2,17	427	20,30	23,24	22,40	-2,94	-2,10
95	canal trapez.	2,48	427	22,37	25,08	23,95	-2,71	-1,58
96	canal trapez.	2,62	427	23,54	25,88	24,61	-2,34	-1,07
97	canal trapez.	3,49	432	28,29	30,29	28,24	-2,00	0,05
98	canal trapez.	3,53	432	28,52	30,48	28,40	-1,96	0,12
99	canal trapez.	3,85	432	30,16	32,03	29,66	-1,87	0,50
100	canal trapez.	3,95	432	31,58	32,51	30,05	-0,93	1,53
101	canal trapez.	4,03	432	31,89	32,88	30,35	-0,99	1,54
102	canal trapez.	4,1	432	32,52	33,21	30,61	-0,69	1,91
103	canal trapez.	1,53	1728	8,94	8,56	9,35	0,38	-0,41
104	canal trapez.	2,02	1728	9,71	10,03	10,74	-0,32	-1,03
105	canal trapez.	2,09	1728	11,45	10,23	10,93	1,22	0,52
106	canal trapez.	2,25	1728	12,34	10,67	11,34	1,67	1,00
107	canal rectang.	1,62	458	20,24	18,89	18,69	1,35	1,55
108	canal rectang.	3,17	458	28,29	27,73	26,14	0,56	2,15
109	canal rectang.	1,62	929	13,56	12,61	13,12	0,95	0,44
110	canal rectang.	1,65	1412	9,20	10,03	10,74	-0,83	-1,54
111	canal rectang.	2,23	1412	12,10	11,92	12,49	0,18	-0,39
112	canal rectang.	2,92	1412	14,17	13,90	14,29	0,27	-0,12
113	canal rectang.	3,52	1412	15,55	15,47	15,69	0,08	-0,14
114	canal rectang.	2,73	9288	4,59	4,56	5,39	0,03	-0,80
115	canal rectang.	4,40	9288	5,70	5,99	6,84	-0,29	-1,14
116	Canal dujard	40,43	8919	17,42	21,77	21,16	-4,35	-3,74
117	Canal dujard	32,53	11520	12,17	16,61	16,70	-4,44	-4,53
118	Canal dujard	29,1	15360	15,74	13,22	13,68	2,52	2,06
119	Canal dujard	23,11	21827	9,61	9,48	10,22	0,13	-0,61
120	Canal dujard	21,89	27648	7,79	8,03	8,84	-0,24	-1,05
121	Canal dujard	18,90	27048	7,27	7,48	8,31	-0,21	-1,04
122	Riviere du Hayne	55,36	6048	35,11	32,53	30,06	2,58	5,05
123	Riviere du Hayne	64,62	6413	31,77	34,36	31,54	-2,59	0,23
124	Riviere du Hayne	54,41	32951	13,61	12,22	12,77	1,39	0,84
125	Riviere du Hayne	65,63	35723	15,96	12,99	13,47	2,97	2,49

Tabla 60. Revisión y corrección de la Tabla 59.

Woltman concluye que su fórmula se adapta bastante bien para el cálculo en tuberías según se observa en los experimentos del 39 al 88, sin embargo, la fórmula de *Dubuat* se adapta mucho mejor a los canales abiertos según se observa en los experimentos del 90 a 125.

En realidad, la fórmula de *Dubuat* es la que mejor se adapta a los canales de sección trapezoidal según puede observarse en la hoja de cálculo (experiencias del 90 al 106), en los demás casos puede valer una u otra fórmula, ya que ambas fórmulas se aproximan bastante bien a las velocidades tomadas de las experiencias si observamos los experimentos del 107 al 125.

Como conclusión se puede decir que *R. Woltman* en 1791, basándose en el análisis de las experiencias realizadas por *Couplet*, *Bossut* y *Dubuat*, propuso para las pérdidas de carga en tuberías la siguiente expresión:

$$r\,J=0{,}00065\,U^{1{,}75}$$ **Ecuación 92**

donde:

r = Radio interior de la tubería en (m).

J = Rasante hidráulica.

U = Velocidad media de circulación (m/s).

Woltman al hacer su análisis no tiene en cuenta el posible estado de las paredes de las tuberías al mezclar los resultados de experimentos realizados con tuberías viejas y nuevas.

5.1.7 Johann Albert C. Eytelwein (1764 - 1848)

Biografía sucinta

Ilustración 47. Retrato de Albert C. Eytelwein

Nació en *Frankfurt* (Alemania), hijo de un comerciante, se unió a la artillería prusiana a la temprana edad de quince años. Al darse cuenta de que tenía poco porvenir en el ejército, estudió ingeniería civil en privado, superando el examen estatal de topógrafo en 1786. En 1790 finalizó la carrera de ingeniero civil y dejó al ejército después de siete años de servicio militar, con rango de teniente para ingresar a la Administración Pública Prusiana, en el Departamento Regional de Edificios fundado en 1770. A partir de entonces, fue empleado como inspector de construcciones de diques y en 1794 fue nombrado inspector de Gobierno Privado Senior en el Departamento de Construcción Regional en Berlín.

Una preocupación por falta de programas de capacitación para formar ingenieros para el personal de las agencias gubernamentales llevó a *Eytelwein* a publicar una colección de problemas en Matemáticas Aplicadas para topógrafos e ingenieros. *Eytelwein*, al igual que su contemporáneo francés *M. R. de Prony*, fue uno de los primeros en escribir sobre la aplicación de la Mecánica y las Matemáticas en el diseño de estructuras y máquinas para llevar métodos racionales tanto al ingeniero practicante como al Estudiante. De 1797 a 1806 junto a otros colegas del Departamento Regional del Edificio fundaron y publicaron la primera revista de la construcción en Alemania *Sammlung nützlicher Aufsätze und Nachrichten, die Baukunst betreffend* (Colección de ensayos y noticias útiles sobre arquitectura), que

posteriormente fue llevada a cabo por *Crelle* como *Journal für die Baukunst* (Revista de arquitectura).

Fundó *Bauakademie* de Berlín en 1799, primera escuela de ingeniería alemana a nivel universitario y uno de los dos núcleos de la posterior *Technische Hochschule Berlin* (Universidad Técnica de Berlín). Durante siete años fue director de esa escuela, en la que impartió clases sobre Mecánica, Hidráulica, Hidrostática, Diseño de máquinas, Terraplenes de diques y Regulación de arroyos.

Escribió libros y artículos sobre temas técnicos, sirvió en comisiones tales como el conjunto definitivo de pesos y medidas para Prusia.

Su libro *Handbuch der Mechanik fester Körper und Hydraulik* (Manual de Mecánica de Cuerpo Sólido e Hidráulico) escrito en 1801 fue el libro más importante de esa época, ya que fue el primero en combinar la práctica y la teoría. Fue elegido miembro de la Academia de Ciencias en 1803 y conferenciante (1810-1815) en la recientemente fundada Universidad de Berlín.

En 1809 nombrado director de la Diputación Prusiana de Obras Públicas en 1809, para convertirse en 1816 en comisario jefe a cargo de todas las obras hidráulicas del Reino.

Su salud comenzó a fallar en 1825 y se retiró en 1830 en el cuadragésimo aniversario de su entrada en la función pública. Sin embargo, permaneció activo y publicó un importante trabajo sobre métodos analíticos a sus setenta y tres.

A lo largo de su vida *Eytelwein* fue una fuerte influencia en la elevación de los estándares de la educación de ingeniería, aportando los métodos analíticos de la época. Sus escritos se distinguieron por su claridad y limpieza.

Falleció 18 de agosto de 1848 en Berlín, Alemania (Kurrer, 2008).

Aportaciones y desarrollo de su fórmula

A continuación, se expone el razonamiento que le llevó a exponer su fórmula de la velocidad del agua en tuberías y las consideraciones que tiene en cuenta para englobar las pérdidas de carga de una manera implícita.

Para ello, reinterpretó los resultados de los 51 ensayos de *Couplet*, *Bossut* y *Dubuat*.

M. Eytelwein concibe que la columna de agua se divide en dos partes, una de las cuales se emplea en la producción de la velocidad, mientras que la otra se emplea para superar las resistencias a las que está expuesta. Considera que la altura empleada para superar las resistencias es directamente proporcional a la longitud de la tubería y a la circunferencia de la sección o al diámetro de la tubería e inversamente al área de la sección o al cuadrado del diámetro, es decir, en su conjunto inversamente al diámetro, es decir, a mayor diámetro, menor resistencia.

Esta altura también, como la resistencia que proviene de la fricción, debe variar con el cuadrado de la velocidad. De ahí si la **f** denota la altura debido a la fricción, la **d** el diámetro del tubo, y **a** una cantidad constante, tendremos (Brewster, 1832):

$$f = V^2\left(\frac{a \times l}{d}\right)$$ **Ecuación 93**

y

$$V^2 = \frac{f \times d}{a \times l}$$ **Ecuación 94**

Pero la altura empleada para superar la fricción corresponde a la diferencia entre la velocidad y la altura reales, es decir

$$f = h - \frac{V^2}{b^2}$$ **Ecuación 95**

Donde **b** es el coeficiente para hallar la velocidad desde la altura. Por lo tanto, tenemos

$$V^2 = \frac{b^2 d \times h - d \times v^2}{a \times b^2 l}$$ **Ecuación 96**

y

$$V = \sqrt{\frac{b^2 d \times h}{a \times b^2 \times l + d}}$$ **Ecuación 97**

Dubuat encontró que **b** era 6,6, y ab^2 se encontró que era 0,0211, particularmente cuando la velocidad está comprendida entre 6 y 24 pulgadas por segundo. Por lo tanto, se tiene:

$$V^2 = \frac{43{,}60 \times d \times h}{0{,}021 x l + d}$$ **Ecuación 98**

y

$$V = 45{,}50\sqrt{\frac{d \times h}{1 + 47 \times d}}$$ **Ecuación 99**

O, lo que se considera más preciso,

$$V = 50\sqrt{\frac{d \times h}{1 + 50 \times d}}$$ **Ecuación 100**

V = Velocidad media en pies/s

d = Diámetro de la conducción en pies.

h = Desnivel entre depósitos o pérdida de carga correspondiente a un caudal en pies.

Si la tubería tiene codos, la velocidad así encontrada deberá disminuirse tomando el producto de su cuadrado, multiplicado por la suma de los senos de los varios ángulos de flexión, y luego por 0,0038. Esto dará el grado de presión empleado para superar la resistencia ocasionada por los ángulos, y restando esta altura de la altura correspondiente a la velocidad, podemos encontrar la velocidad corregida (Brewster, 1832).

La fórmula de *Eytelwein* (Ecuación 100) se dedujo con experimentos realizados con diámetros pequeños. Se han analizado varios diámetros desde 25 mm hasta 1000 mm, y se ha llegado a la conclusión de que, hasta diámetros de 200 mm, se cometen errores relativos comprendidos entre los valores 2 % y 20 % en la descarga, y desde diámetros de 200 mm hasta 1000 mm de 20 % a 38 %.

Para comparar las fórmulas de *Dubuat* y *Eytelwein* se desarrolla el siguiente caso real:

En el año 1720 se colocó una excelente tubería de plomo fundido desde la cabeza de la fuente en Comiston hasta el embalse de la *Castlehill* de *Edimburgo*. El diámetro interior de la tubería era de 4 1/2 pulgadas, la fuente estaba a 51 pies sobre el punto de Entrega, y la longitud de la tubería era 14.930 pies. Su descarga máxima durante los años 1738, 1739, 1740, 1741 y 1742, fue 11 1/3 pies cúbicos, o 189,4 pintas escocesas por min.

Aplicando fórmula de *Dubuat*

$$V = \frac{307.\left(\sqrt{d}-1\right)}{\sqrt{s}-\mathrm{Ln}\sqrt{s+1.6}} - 0{,}3\left(\sqrt{d}-1\right)$$ **Ecuación 48**

en unidades inglesas,

Cálculo del valor d (de *Dubuat*)

Diámetro = 4,50 pulgadas→ radio = r = 2,25 pulgadas

Diámetro = 4,5 pulg.→ r=4,5/2 = 2,25 pulg.

d = 2,25/2 = 1,125 pulg.

s = 14930/51 = 292,745

$\sqrt{d}$ = 1,061

$\sqrt{d} - 1$ = (1,061 – 0,1)

$\sqrt{s}$ = 17,11

$\sqrt{s} + 1{,}6$ = 17,57

$\mathrm{Ln}\left(\sqrt{s} + 1{,}6\right)$ =Ln (17,50) = 2,842

Operando con calculadora, en vez de como se hacía en esos tiempos, y sustituyendo valores en la (Ecuación 51) **(en unidades inglesas)** se obtiene la velocidad:

V = 20,37 pulg/s

Y el caudal:

$Q = V \times A = 20{,}37 \times \pi \times 2{,}25^2$ =313,32 pulg.^{3}/s = 185,13 pint/min

Nota: 1 pint = 105 pulg^3

Aplicando fórmula de Eytelwein (Ecuación 99**):**

Pasamos las unidades a pies

d = diámetro = 4,5 pulg = 0,375 pies

h = 51 pies

l = 14.930 pies

Sustituyendo estos valores en la fórmula se obtiene

V=1,79 pies/s = 21,46 pulg/s

$Q = V \times A = 21{,}46 \times \pi \times 2{,}24^2$ =341,32 pulg.^{3}/s = 195,04 pint/min

Cantidad de agua entregada pintas por el tubo: 189,4 pint/min escocés.

Determinado por la fórmula de *Eytelwein*: 195.04 pint/min escocés (error relativo = 2,94 %).

Determinado por la fórmula de *Dubuat*: 185,13 pint/minuto escocés (error relativo = 2,25 %).

La exactitud de ambas fórmulas es muy notable.

En el Sistema Internacional la fórmula se expresó en una primera aproximación como:

$$r\,J = 0{,}000795\,V^2$$ **Ecuación 101**

Proponiendo también como fórmula más exacta:

$$r\,J = 0{,}0006515\,V^{35/18}$$ **Ecuación 102**

donde

r = Radio interior de la tubería (m)

J = Rasante hidráulica

V = Velocidad media de circulación (m/s).

Ambas fórmulas dan un margen de error aceptable cuando se trata de tuberías de diametros comprendidos entre 25 mm y 100 mm.

Si aplicamos esta fórmula al problema anterior, se tiene:

r = 0,05715 m

J = h/l = 15,5448/4550,664 = 0,003416 m/m

r J = $1{,}9522 \times 10^{-4}$

V = 0,538 m/s = 21,18 pulgadas/seg

Q = VS = 21,18 (pulg/s) x 15,904 pulgadas^2 = 336,85 pulgadas^3/s

Q = 3,20 pint/s = 192,48 pint/min.

Si se utiliza esta fórmula en el caso real anterior, el resultado es más exacto con la fórmula de *Eytelwein* que con la de *Dubuat*.

5.1.8 Girard, Pierre Simon (1765-1836)

Biografía sucinta

Ilustración 48. Retrato de Girard, Pierre Simon

Girard nació en *Caen*, fue un matemático e ingeniero francés que trabajó en Mecánica de Fluidos, hijo de un orfebre, relojero y estricto calvinista. Estudió desde temprana edad en la escuela de *Caen*, donde mostró una fuerte preferencia por temas matemáticos y científicos. Un prodigio que inventó una turbina de agua a la edad de diez años. A la edad de 21 años, en 1787, empezó a investigar la Mecánica en la *École des Ponts et Chaussés* (Escuela de Puentes y Carreteras), en la línea de estudios relacionados con resistencia de los sólidos, en la resistencia de la madera como material estructural y en el diseño estructural de vigas, paredes y columnas.

Fue nombrado, bajo la influencia de su maestro *Jacques-Élie Lamblardie*, miembro del personal de la *École des Ponts et Chaussés* como ingeniero en 1789. Posteriormente fue enviado a *Le Havre* donde *Lamblardie* estaba a cargo del transporte, las carreteras y la ampliación del puerto, y cuya experiencia se convirtió en una excelente formación práctica para *Girard*, en la que el éxito de *Lamblardie* llevó a que *Le Havre* se convirtiera en uno de los puertos líderes en Europa.

Después *Girard* fue asignado a París, y en 1790 se informó que la Academia de Ciencias había propuesto un premio sobre la teoría de las esclusas aplicadas a los puertos y canales y los mejores métodos de construcción. Aunque el tema difería de su investigación sobre la madera como material estructural, había adquirido experiencia en *Le Havre*, por lo que presentó un tratado en la que ganó el premio.

Gaspard de Prony y *Girard*, ambos colegas de la *École des Ponts et Chaussés*, se convirtieron en estrechos amigos y colaboradores, trabajaron en problemas geométricos alrededor de 1791. *Girard* había estado a cargo de la planificación y construcción del canal de *Amiens*, lo que explica su referencia al tiempo transcurrido en *Amiens*. Después de esto, *Prony* y *Girard* decidieron escribir un artículo en el que:

"... uno puede aprender a encontrar la ecuación para algunos sólidos como se encuentra la ecuación de un plano curvo" (O'Connor, 2010).

Otro proyecto en el que colaboraron *Girard* y de *Prony* fue el "*Dictionnaire des Ponts et Chaussés*" (Diccionario de Puentes y Carreteras).

En 1793, trabajando con *Jacques-Élie Lamblardie*, desarrolló un método para medir la resistencia de las maderas a la flexión y al pandeo. En 1798 *Girard* publicó una importante obra "Tratado analítico de la resistencia de los sólidos sobre la fuerza de los materiales" en los que describió dos máquinas para compresión de largas columnas de madera.

Por esa época, *Napoleón Bonaparte* estaba reuniendo una gran fuerza expedicionaria para invadir Egipto, que además de tropas militares, debía constar de matemáticos, ingenieros y otros científicos. La experiencia de *Girard* llamó la atención de *Napoleón* y se unió a su expedición que aterrizó cerca de Alejandría en julio de 1798, en condición de subdirector de los puentes y caminos. Con el apoyo de un equipo de 24 ingenieros de puentes y caminos, entre ellos ingenieros militares y topográficos, y con su ayuda dibujó planos para la ciudad de Alejandría, el puerto y la costa circundante.

Napoleón estableció el Instituto de Egipto cerca de *El Cairo*, equipado con prensas para caracteres árabes y romanos, una biblioteca y laboratorios para experimentos físicos y químicos. Nombró ministro del Interior a *Girard*, que después propuso que explorasen el Nilo hasta las cataratas. Participó en el estudio de monumentos antiguos, incluyendo el del Nilómetro, el método egipcio antiguo de medir la altura del Nilo, en el templo de la isla Elefantina.

Muchos de los artículos que contenía el informe "*Mémoires sur l'Egypte it"* (Recuerdos sobre Egipto) fueron escritos por *Girard*, relacionados con los temas mencionados anteriormente. Fue uno de los ocho autores de este extenso informe.

Las tropas de *Napoleón* se retiraron de Egipto en 1803, y después de regresar a París, este le ofreció un puesto político importante, pero rechazó la oferta y prefirió la posición de director del suministro de agua de París. Se le encargó el proyecto del canal de *Ourcq*, entre uno de los muchos proyectos ordenados por *Napoleón* para modernizar París. El propósito del proyecto era conectar los ríos *Sena* y *Ourcq* con un canal de barcos para que París fuera accesible por el transporte marítimo (O'Connor, 2010).

Esto lo llevó a estudiar la resistencia del flujo de agua a través de tuberías y canales abiertos.

Sus primeros trabajos los describió en el "*Rapport sur le Projet Générale du Canal de l'Ourcq*" (1803) (Informe sobre el Proyecto General del Canal Ourcq.), "*Devis général du Canal de l'Ourcq*" (Estimación general del Canal Ourcq.): desde el primer premio de agua de *Mareuil* hasta la barrera de *Pantin* (1806) y "*Devis du pont à bascule à construire sur le Canal de l'Ourcq*" (1808) (Cotización de la báscula de pesaje que se construirá en el Canal de Ourcq). Las primeras barcazas llegaron a París desde *Ourcq* en 1813, pero después de eso el proyecto se encontró con dificultades. En parte, las causas fueron las políticas derivadas de la abdicación de *Napoleón* después de que los aliados capturaron a París en abril de 1814, y en parte fueron dificultades técnicas resultantes de los deslizamientos de tierra alrededor del área de *Saint-Denis* en 1814 y 1815.

Napoleón había sido desterrado a *Elba*, pero logró escapar y regresó a París triunfante en marzo de 1815. Nombró a *Girard*, siempre fiel partidario, como inspector divisional de puentes y caminos durante los famosos Cien Días, pero fue despojado de su rango una vez restaurada la monarquía después de la derrota de *Napoleón* en *Waterloo*. Él continuó trabajando en el esquema del proyecto del Canal de *Ourcq*, pero se implicó en discusiones difíciles con la ciudad de París

sobre muchas ediciones técnicas. Fue deshabilitado de dirigir el proyecto en 1818 y la construcción se entregó a una empresa privada para completar la obra. *Girard* dio una descripción completa del proyecto del canal Ourcq en un tratado de dos volúmenes "*Mémoires sur le Canal de l'Ourcq et la distribution des eaux*" (Recuerdos sobre el Canal de l'Ourcq y la distribución de las aguas) y "S*ur le dessèchement et l'assainissement de Paris, et les divers canaux navigables*" (1831-1840) (Sobre la desecación y el saneamiento de París, y los diversos canales navegables).

Girard quedó libre para realizar otros trabajos y en 1819 fue encargado de dirigir un proyecto de instalación de iluminación de gas en los grandes teatros de París y en varios barrios de París. Una de sus primeras actuaciones fue visitar Londres para inspeccionar su sistema de iluminación y distribución de agua. De hecho, había continuado en su papel de director del suministro de agua de París durante todos estos tiempos difíciles, y permaneció en esta posición hasta que se retiró en 1831 (O'Connor, 2010).

Girard escribió ampliamente sobre fluidos, en particular sobre el flujo en tubos capilares, como por ejemplo "*Mémoire sur le Mouvement des Fluides dans les Tubes capillaires, et l'Influence de la Temperature sur ce Mouvement*" (1817) (Memoria sobre el movimiento de fluidos en los tubos capilares y la influencia de la temperatura en este movimiento). Fue honrado por su trabajo con la elección a primera clase en el Instituto Nacional de Ciencias y Artes en 1815 (el Instituto fue renombrado la Academia de Ciencias en 1816) de la que fue presidente en 1830. También fue honrado como "*Chevalier de la Légion d'Honneur*" (Caballero de la Legión de Honor) en 1831.

Aunque *Girard* fue educado calvinista, no era religioso, por lo que su hija *Louise Françoise Adèle* (nacida en 1803) se congratuló de convertirse en católica antes de casarse con el Jurista, Autor y Político *Charles Renouard* el 23 de marzo de 1821.

Girard falleció el 30 noviembre 1836 en París (O'Connor, 2010).

Aportaciones y desarrollo de su fórmula

M. Girard fue el primero en aplicar las investigaciones realizadas por *Coulomb* sobre la resistencia de los fluidos, con el objetivo de descubrir una fórmula correcta para expresar la velocidad del agua.

Como el agua se mueve sobre los lados mojados del canal, o sobre la película de agua que se adhiere a estos lados (*paroi mouillée*), es retardada en un primer momento por la viscosidad, que tiende a mantenerla sobre esta película, de esta forma, el agua experimentará un retardo proporcional a la velocidad simple.

Con respecto a la rugosidad del canal deduce un segundo retardo, que es proporcional a la segunda potencia de la velocidad, que está en relación compuesta de la fuerza y el número de impulsos que las asperezas reciben durante un tiempo dado.

Adoptó como valor de la resistencia el producto de una cantidad constante, por la suma de las potencias primera y segunda de la velocidad. La cantidad constante la determinó apoyándose en 12 experimentos realizados por *Chezy* y *Dubuat*, de modo que obtuvo una fórmula que representa las velocidades experimentales de forma tan exacta como la más complicada de *Dubuat*, en definitiva, mucho más sencilla.

Para el desarrollo de su fórmula se mantendrá la misma nomenclatura utilizada en sus escritos (Brewster, 1832).

Expresa la resistencia a la cohesión por $R\,\chi\,U$, siendo:

R = Cantidad que se obtiene a partir del experimento

χ = Perímetro de la sección en contacto con el agua.

U = Velocidad media en la sección ω

Girard supone que la adhesión al "*paroi mouillée*", o a la película que se adhiere a los lados del tubo, de las asperezas que allí se incrustan y diseminan, es la misma que aquella que retiene las moléculas fluidas entre sí, o sea, la que corresponde a:

R χU^2, de manera que la suma de las dos resistencias es:

$$\frac{g \times \omega \times \varsigma}{\lambda \times \chi} = R \times (U + U^2)$$ **Ecuación 103**

en donde los términos que faltan son:

g = Fuerza de aceleración de la gravedad, 9,8 m/s^2.

ς = Diferencia de nivel entre las dos extremidades de la tubería.

λ = Longitud de la tubería o canal.

ω = Área de la sección de la tubería o canal.

A partir de los experimentos de *Dubuat*, *M. Girard* asigna a R un valor de 0,0012181, por lo que su fórmula se convierte en (Brewster, 1832):

$$U = -0{,}5 + \sqrt{(0{,}25 + 8052{,}54 \times \frac{\omega \times \varsigma}{\lambda \times \chi}}$$ **Ecuación 104**

o haciendo

$$\frac{\varsigma}{\lambda} = \frac{1}{b} = I$$ **Ecuación 105** y $$\frac{\omega}{\chi} = R$$ **Ecuación 106,**

la fórmula se convierte en

$$U = -0{,}5 + \sqrt{(0{,}25 + 8052{,}54 \times R \times I}$$ **Ecuación 107**

o haciendo

La primera ecuación se puede deducir de la siguiente manera:

$$\frac{g \times \omega \times \varsigma}{\lambda \times \chi} = R \times (U + U^2)$$ **Ecuación 108**

Pasando a ser:

$$(\frac{g}{R}) \times (\frac{\omega \times \varsigma}{\lambda \times \chi}) = U + U^2$$ **Ecuación 109**

Si R = 0,0012181 (según experimentos) y g = 9,808 m/s^2 → $(\frac{g}{R})$ = 8052,54,

si hacemos $z = \frac{\omega \times \varsigma}{\lambda \times \chi}$ **Ecuación 110**

se obtiene la siguiente ecuación

$$U^2 + U - 8.052{,}54 \times z = 0$$ **Ecuación 111**

Utilizando la fórmula de ecuación cuadrática:

$$aX^2 + bX + C = 0$$ **Ecuación 112** → $$X = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \times a \times c}}{2 \times a}$$ **Ecuación 113**

Identificando valores u sustituyendo en la fórmula cuadrática se obtiene:

$$U = \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-8.052{,}54 \times z)}}{2 \times 1}$$ **Ecuación 114**

que pasa a ser

$$U = -0{,}5 + \sqrt{0{,}25 + 8.052{,}54 \times z}$$ **Ecuación 115**

para finalmente convertirse en:

$$U = -0{,}5 + \sqrt{(0{,}25 + 8052{,}54 \times \frac{\omega \times \varsigma}{\lambda \times \chi}}$$ **Ecuación 116**

Si $\frac{\varsigma}{\lambda} = \frac{1}{b} = I$ **Ecuación 117**, **y** $\frac{\omega}{\chi} = R$ **Ecuación 103**, la fórmula se convierte en

$$U = -0{,}5 + \sqrt{(0{,}25 + 8052{,}54 \times R \times I}$$ **Ecuación 118**

como queríamos demostrar.

Según fuentes documentadas el coeficiente R no llegó a evaluarlo, ni tampoco confirmó la validez de su formulación.

En la presente tesis se ha evaluado la fórmula con un sencillo caso, en el que se supone una conducción de 1000 metros de longitud, con diámetros variables en mm (25, 50, 100, 200, 400, 600, 800 y 1000), con un desnivel de los extremos de la conducción de 5 m en todos los casos, supeniendo que el extremo inicial arranca en depósito y el final en libre. Ello equivale a decir que, desde la lámina libre de agua en el depósito hasta tener una pérdida de carga de 5 metros, cada caso tendrá una velocidad y por lo tanto un caudal que saldrá por el extremo final.

Introduciendo los cálculos mediante hoja EXCEL, se pudo comprobar, teniendo en cuenta como velocidades reales las calculadas mediante programa software CALTUB y las calculadas mediante la fórmula de *Girad* lo siguiente:

El error absoluto medio en toda la gama de diámetros que van de 25 mm a 1000 mm es de 0,16 y el error relativo medio del 12 % aproximadamente, y entre los diámetros comprendidos entre 200 mm y 800 mm el error absoluto medio es de 0,22 m/s y el relativo de 9,94 %.

Esto indica que, dentro de esos márgenes de errores, la fórmula de *Girard* es aplicable tanto para diametros pequeños como grandes, con la ventaja de ser una fórmula mas cómoda para operar, por lo que supera en todos estos aspectos a las de *Dubuat* y *Eytelwein*.

No obstante, la creencia de que la velocidad es distinta de cero en las paredes de las conducciones fue rebatida posteriormente, pero no por ello, dejaba de ser una fórmula muy mejorada para la época.

5.1.9 Gaspard Clair François Marie Riche de Prony (1755 – 1839)

Bibliografía sucinta

Ilustración 49. Retrato de Gaspard Clair François Marie Riche de Prony.

Nació en *Chamelet* (Francia), hijo de un juez, completó sus estudios clásicos, para después ingresar en la *Ecole Nationale des Ponts et Chausseés* (Escuela Nacional de Puentes y Carreteras) el 5 de abril de 1776. Estuvo trabajando un tiempo en Obras Públicas en varias localidades de Francia, hasta que en 1783 fue reclamado por el ministro *Calone* a petición de *Jean-Rodolphe Perronet* (que era por entonces el fundador y director de la Escuela de Puentes y Caminos) para convertirlo en su ayudante. Colaboró con éxito en la defensa proyecto del puente de *Nevilly*, cuyo diseño, creación de *Perronet*, fue muy criticado en los círculos académicos de la época (Mariano Vallejo, 1833).

En 1795 dirigió la restauración del puerto de *Dunkerque*, presidido por *Perronet*.

Inmediatamente después realizó un viaje a Inglaterra, para realizar una serie de observaciones sobre los métodos geodésicos y topográficos (publicados en dos volúmenes), que le fueron de gran utilidad en su posterior trabajo en la oficina del Catastro de Francia, llegando a ser su primer director.

En 1792, mientras realizaba sus actividades en el catastro, *Napoleón* le encargó la ardua tarea de calcular tablas logarítmicas y trigonométricas con valores de entre 14 y 29 cifras decimales, para realizar los cálculos astronómicos en el Observatorio de París y en el Instituto de Francia. Dicho trabajo lo completó en tan solo 2 años,

pero el Gobierno Revolucionario y la Gestión de la Junta, que había contratado a la editorial *Firmin Didot* para la impresión de estas tablas, no pudo financiarlo. En 1824 *Prony* se limitó a publicar un manual sobre las principales tablas logarítmicas y trigonométricas adaptadas al nuevo Sistema Métrico y Decimal. Las tablas nunca fueron publicadas en su totalidad (Wales, 2001).

En 1794 fue nombrado profesor de matemática en la *Ecole Polytechnique* (Escuela Politécnica).

En 1798 sucedió a Chézy en la direccion de la *École Nationale des ponts et chaussées* (Escuela Nacional de Puentes y Caminos). En 1812 recibió la medalla de oro del papa León XII por su trabajo en "*Le saneamiento de la marisma Pontins*" (El saneamiento de la marisma *Pontins*.) en Italia.

Su invento más famoso fue el freno de *Prony* para medir el par motor de máquinas y motores. El freno de *Prony* fue utilizado durante una prueba en París en *Gros-Caillou* para una máquina denominada tipo *Woolf* instalada por *Humphrey Edwards* y destinada al abastecimiento de agua.

Falleció el 29 de julio de 1839 en *Asnières-sur-Seine*, Francia.

Prony escribió múltiples obras de importancia muy desiguales:

"Exposition d'une méthode pour construire les équations déterminées qui se rapportent aux sections coniques, à l'usage des ponts et chaussées" (Exposición de un método para construir las ecuaciones determinadas que se relacionan con las secciones cónicas, para el uso de puentes y carreteras), París, 1790, gr. in-4°, 2 vols.

"Nouvelle méthode trigonométrique" (Nuevo método trigonométrico.), Paris, 1823, in-4°. El método descrito aquí por *Prony*, relevante (lo que había imaginado en Italia en el tiempo donde se encontraba la llanura pontina) fue doble: en primer lugar, para obtener una precisión satisfactoria, del otro para asegurar la influencia de un ambiente envenenado. En esta tesis, por lo tanto, se une a su alta "*Description hydrographique et historique des marais Pontins, où déjà il avait présenté un aperçu de sa méthode, mais ici l'exposition est plus développée*" (Descripción

hidrográfica e histórica de las marismas pontinas, donde ya había presentado una visión general de su método, pero aquí la exposición está más desarrollada); "*Mémoire sur le calcul des longitudes et des latitudes*, Paris", 1806, in-4° (Memoria sobre el cálculo de longitudes y latitudes.)

"Rapport sur les expériences faites avec un instrument français et un instrument anglais, pour déterminer le rapport du mètre et du pied anglais, et pour comparer entre eux les étalons originaux des mesures appartenant à l'Institut national de France" (el 15 nivôse año X, 1802), in-4° (Informe sobre los experimentos realizados con un instrumento francés y un instrumento en inglés para determinar la proporción del metro y el pie en inglés, y para comparar los estándares originales de las mediciones que pertenecen al Instituto Nacional de Francia.).

"Analyse du système du monde de Laplace", París, 1801 (Análisis del sistema mundial de *Laplace*.). Este resumen es recomendado por una disposición feliz. Está dentro del alcance de la gente del mundo que saben poco de geometría, o al menos tener el instinto suficiente para seguir los conceptos matemáticos ya ligeramente por encima del muy fácil, pero, sin embargo, sin complicaciones y presentados de forma clara (Wales, 2001).

"Mécanique philosophique, ou analyse des diverses parties de la science de l'équilibre et du mouvement", Paris, an VIII (1800), in-4° (Mecánica filosófica o análisis de las diversas partes de la ciencia del equilibrio y el movimiento). A pesar de ser este tratado una pieza publicada en el "*Journal de l'école polytechnique*" (Diario de la Escuela Politécnica), se clasifica aquí, por su importancia y tamaño. El autor, sin embargo, no terminó todo el trabajo, que iba a consistir en cinco partes y un resumen de todas las partes de la mecánica. Sólo las tres primeras partes se incluyen en la publicación del año VIII. Se recomienda por la claridad en las tablas de resumen.

"Leçons de mécanique analytique données à l'école royale polytechnique", Paris, 1815, 2 vol. (dos partes), in-4° (Lecciones en mecánica analítica impartidas en la Real Escuela Politécnica).

“Sommaire des lois sur le mouvement des corps solides, l'équilibre et le mouvement des fluides, donnés à l'école polytechnique”, Paris, 1809, in-4° (Resumen de las leyes sobre el movimiento de cuerpos sólidos, el equilibrio y el movimiento de fluidos, dado en la escuela politécnica).

“Résumé de la théorie des formules fondamentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux et les canaux”, Paris, 1825, in-4°, 5 tablas (Resumen de la teoría de las fórmulas fundamentales relacionadas con el movimiento del agua en tuberías y canales).

“Rapport sur le mémoire de Ducros sur les quantités d'eau qu'exigent les canaux de navigation, Paris, an IX (1801), in-8°. 15°) Recherches physico-mathématiques sur la théorie des eaux courantes”, Paris, an XII (1804), in-4° (Informe sobre las memorias de Ducros sobre las cantidades de agua requeridas por los canales de navegación, París, año IX (1801), en -8 °. 15 °, Investigaciones físico-matemáticas sobre la teoría de las aguas corrientes.).

Reconocimientos

- Recibió la Legión de Honor el mismo año de la creación de esta orden en 1804.1
- En 1806 fue nombrado miembro "supernumerario" del *Bureau des Longitudes.1*
- Es uno de los 72 científicos cuyo nombre figura inscrito en la Torre *Eiffel*.
- El Liceo Profesional de *Prony* en *Asnières-sur-Seine* lleva este nombre en su honor.3
- La escuela de la la localidad de *Oingt*, en la región del *Beaujolais*, lleva su nombre desde el 6 de noviembre de 2010, cuando fue inaugurada: “*École Gaspard-Riche-de-Prony”*.
- Una unidad de desplazamiento de frecuencia en música lleva su nombre: *el prony*.

Aportaciones y desarrollo de su fórmula.

M. Prony, haciendo alusión a la fórmula de *Girard,* en la que decía que la resistencia producida por la cohesión y la producida por la adhesión de las asperezas a los lados húmedos de la pared eran iguales, opina que la adherencia de las asperezas a la "*paroi mouillée*", o lados mojados del canal, debe ser supuesta mayor que la de las partículas fluidas; pues si las dos adherencias fueran iguales, las asperezas no tendrían más tendencia a unirse a los lados mojados que a la masa de fluido en movimiento.

Con el fin de establecer la teoría de las aguas corrientes sobre una base adecuada, este gran matemático recogió en 1804 en su "*Recherches Physico-Mathematiques sur la Théorie des Eaux Courantes*" (Investigación físico-matemática sobre la teoría actual del agua corriente) los mejores experimentos que se habían publicado sobre el movimiento del agua en conductos y canales naturales y artificiales. Selecciono 82, de los cuales 51 se hicieron con conducciones tubulares y 31 en canales abiertos y los combinó con los principios de la Física y la Mecánica, para deducir de ellos fórmulas generales, entre ellas la velocidad media para que pudiera ser obtenida por cálculo.

Buscaba una fórmula simple, libre de logaritmos, que requiriera simplemente la extracción de una raíz cuadrada y aplicable tanto a tuberías como a canales.

M. Prony encontró que una expresión de la velocidad media, deducida de la teoría de los fluidos, y compuesta de términos relativos a la gravedad, a las dimensiones o figura de la tubería o canal, debe ser igual a una cierta función de esta velocidad media; y al determinar esta función, observó que en todas las hipótesis relativas a la función desconocida de la velocidad a la cual la resistencia es proporcional, que hace uniforme el movimiento, siempre puede desarrollarse en una serie, dispuesta de acuerdo con todas las potencias de la velocidad media o la cantidad variable (Brewster, 1832).

Es decir,

$$\frac{g\omega\varsigma}{\lambda\chi} = c+\alpha U+\beta U^2+\gamma U^3$$ **Ecuación 119**

Aquí c es una función independiente de U, y que, junto con los coeficientes α, β y γ debe determinarse experimentalmente.

Los demás términos son:

λ = Longitud de la tubería o canal.

ς = Diferencia de nivel entre las dos extremidades de la tubería.

ω = Área de la sección de la tubería o canal.

χ = Perímetro de la sección en contacto con el agua.

g = Fuerza de aceleración de la gravedad, o 9,8 m/s^2

El primer término c de esta serie se relaciona, por un lado, con la inclinación que debe tener el canal o tubería, para que el movimiento esté listo para comenzar, es decir es el umbral en el cual, a partir de él, comienza el movimiento del fluido; y, por otro lado, a la forma y dimensiones que deben darse a la sección transversal, para que todo el fluido que está contenido en el canal o tubería pueda adherirse a ella. La determinación de este primer término depende de experimentos muy delicados, que no se hicieron; pero lo que, si es cierto, es que, dada su extrema pequeñez, puede ser desechado con seguridad.

El segundo término αU está relacionado naturalmente con velocidades muy pequeñas; y como se sabe por los experimentos realizados al respecto que las potencias primeras y segunda de la velocidad satisfacen todos los fenómenos incluidos dentro de ciertos límites, es necesario examinar primero si estos límites contienen las velocidades más grandes que son necesarias para ser consideradas en la práctica. *Prony* por lo tanto da la ecuación

$$\frac{g\omega\varsigma}{\lambda\chi} = c+\alpha U+\beta U^2$$ **Ecuación 120**

que luego determina los valores de las cantidades constantes α y β, de manera que puedan ser conformes con los mejores experimentos que se han hecho sobre el movimiento del agua en los canales.

En la ejecución de esta tarea, *M. Prony* se valió de los métodos para la corrección de anomalías, que *M. Laplace* ha aplicado en su "*Mecanique Celeste*", para determinar la figura de la tierra. *Laplace* dio no menos de tres de estos métodos, el último de los cuales *Prony* considera como el mejor, el del ajuste por mínimos cuadrados.

Si se ha obtenido, por ejemplo, una serie de valores experimentales de cualquier cantidad variable, estos valores pueden ser conectados entre sí por una ley, aplicando pequeñas correcciones a cada uno de los resultados experimentales. La ecuación que expresa esta ley puede ser puesta bajo la forma:

$$Y=a+bX \qquad \textbf{Ecuación 121},$$

donde la Y y X son las funciones de una o varias cantidades variables, de las cuales tenemos un cierto número de valores directamente observados, o calculados a partir de las observaciones. Se requiere entonces asignar a las cantidades constantes desconocidas a y b tales valores, que los fenómenos pueden ser representados de la mejor manera posible por la ecuación precedente.

Si dividimos por U ambos lados de la (Ecuación 120)

$$\frac{g\,\omega\,\varsigma}{\lambda\,\chi} = \alpha\,U + \beta\,U^2,$$

obtenemos

$$\frac{g\,\omega\,\varsigma}{\lambda\,\chi\,U} = \alpha + \beta\,U \qquad \textbf{Ecuación 122}$$

y poniendo

$$\frac{g\,\omega\,\varsigma}{\lambda\,\chi\,U} = Y \qquad \textbf{Ecuación 123},$$

tenemos una ecuación del primer orden:

$$Y=\alpha+\beta U$$ **Ecuación 124**

en el que todas las cantidades son lineales excepto β, que es un número abstracto.

M. Prony aplicó estos métodos a los doce experimentos, de los cuales *Girard* dedujo el valor del coeficiente *R* en su fórmula, principalmente con el propósito de comparar los resultados obtenidos por la fórmula de *Dubuat*, la fórmula de *Girard* y su propia fórmula.

Dos de estos doce experimentos fueron hechos por *M. Chezy* sobre el *Rigole de Courpalet* y sobre el *Sena*.

Los otros diez son tomados del trabajo de *Dubuat*, y son los que *Girard* empleó. De estos experimentos, *Prony* encuentra $\alpha = 0{,}00093$, y $\beta = 0{,}00266$. Por lo tanto, obtenemos:

$$\frac{g\omega\varsigma}{\lambda\chi}=0{,}00093\,U+0{,}0026\,U^2$$ **Ecuación 125**

Que, cuando se reduce, aplicando la fórmula de la ecuación cuadrática, da

$$U=-0{,}174812+\sqrt{0{,}0305592+3687{,}52\times\frac{\omega\times\varsigma}{\lambda\times\chi}}$$ **Ecuación 126**

Los detalles de los doce experimentos se dan en la siguiente tabla, en las columnas 1, 2, 3, 4, 5, 6. La columna 7 se calcula a partir de la fórmula de *Dubuat* ya dada, la columna 8 de *Girard* y la columna 9 de la fórmula anterior de *Prony*. Los cuatro experimentos marcados con un asterisco son rechazados como anómalos.

La tabla (Tabla 61) contiene las velocidades de corrientes de aguas deducidas de ocho experimentos, y la comparación con las velocidades calculadas por las fórmulas de *Dubuat*, *Girard* y *Prony*, principalmente con el propósito de comparar los resultados obtenidos por la fórmula de *Dubuat*, la fórmula de *Girard* y su propia fórmula (Brewster, 1832).

TABLE* I.

Containing the mean Velocities of Currents of Water deduced from eight Experiments, compared with the Velocities as calculated by the Formulæ of Du Buat, Girard, and Prony.

No. of Experiment.	Names of the Currents.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		Velocities observed, directly deduced from Observation.		Total length of the Current or values of λ	Total declivity on the length λ, or values of ζ	Area of the Section of the Current, or values of ω	Perimeter of the Section, or values of χ	Mean Velocities calculated, or values of U.		
		Superficial Velocity.	Mean Velocity.					By the Formula of Du Buat.	By the Formula of Girard.	By the Formula of Prony.
1	Rigole of Courpalet.	0,142659	0,094051	31379,5	1,11438	0.674492	2,33863	0,130759	0,076449	0,086587
2	Canal of Jard.	0,196799	0,137345	467,769	0.016355	4.4883	8,77066	0,177309	0.131695	0,135891
3	Canal of Jard.	0,210875	0,148857	467,769	0,016919	5,4050	9,12257	0,191385	0,071647	0.156218
4	Canal of Jard.	0,260743	0.189760	467,769	0,021430	5,7582	9.20378	0,226847	0.1934	0.194314
5*	Canal of Jard.	0.329414	0,248518	467.769	0.040605	8.72377	9,9076	0.393055	0.429232	0,384124
6	River Hayne.	0,368423	0.282091	359.272	0,010896	22 6466	15,3757	0.272865	0.280515	0,267086
7	Canal of Jard.	0,426081	0,332219	477,769	0,030454	7,6759	9,74518	0.314282	0.428938	0.293862
8	River Hayne.	0,432036	0,337349	359.272	0.010061	29.0468	16.3503	0,285046	0.317697	0.287803
9*	Canal of Jard.	0,461532	0.372087	476,769	0.052448	11.9092	10,8821	0,508103	0.661130	0,520199
10*	River Seine.	0,785029	0,652790	2592.22	0.297770	284.9	103.299	0.824497	1,17367	0,92010
11*	River Hayne.	0,860012	0,720968	359,272	0,056012	28.4598	16 269	0.778532	1.0541	0,843152
12	River Hayne.	0,950426	0,803563	359 272	0.059596	23.0812	15,4082	0,747672	0.994162	0,796834

Tabla 61. Velocidades de corrientes de agua deducidas de ocho experimentos, y la comparación con las velocidades calculadas por las fórmulas de *Dubuat, Girard* y *Prony*.

La fórmula de *Dubuat* utilizada en la tabla anterior es la siguiente:

$$V(m/s) = \frac{48{,}85 \times \sqrt{\frac{\omega}{\chi}} - 0{,}8}{\sqrt{\frac{\lambda}{\varsigma}} - \ln\sqrt{\frac{\lambda}{\varsigma}} + 0{,}60} - 0{,}05 \times \sqrt{\frac{\omega}{\chi}}$$ **Ecuación 127**

Y la de *Girard*:

$$U = -0{,}5 + \sqrt{(0{,}25 + 8052{,}54 \times \frac{\omega \times \varsigma}{\lambda \times \chi}}$$ **Ecuación 128**

A continuación, como comprobación se sustituyen los valores aportados por la tabla en las fórmulas de *Dubuat*, *Girard* y *Prony* y se comprueba que los resultados arrojados por la Hoja de Excel (Tabla 62) son similares.

Vs	Vm	λ	ζ	ω	χ	g	$\frac{\omega\zeta}{\lambda\chi}$	$\frac{g\omega\zeta}{\lambda\chi}$	$\frac{g\omega\zeta}{\lambda\chi Vm}$	Dubuat	Girard	Prony
0,142659	0,094051	31379,5	1,11438	0,674492	2,33863	32,174	0,00001024	0,0003295	0,0035038	0,1295	0,076544	0,086585
0,196799	0,137345	467,769	0,01636	4,4883	8,77066	32,174	0,00001789	0,0005757	0,0041914	0,1725	0,127654	0,135893
0,810875	0,148857	467,769	0,01692	5,405	9,12257	32,174	0,00002143	0,0006895	0,0046319	0,1899	0,149932	0,156221
0,260543	0,18976	467,769	0,02143	5,7582	9,20378	32,174	0,00002866	0,0009222	0,0048597	0,2255	0,193251	0,194311
0,329414	0,248518	467,769	0,04061	8,72377	9,90760	32,174	0,00007643	0,0024592	0,0098953	0,3918	0,430017	0,384124
0,368423	0,282091	359,272	0,01090	22,6466	15,37570	32,174	0,00004467	0,0014372	0,0050948	0,2709	0,280629	0,267092
0,426081	0,332219	477,769	0,03045	7,6759	9,74518	32,174	0,00005021	0,0016154	0,0048624	0,3090	0,308661	0,289622
0,432036	0,337349	359,272	0,01006	29,0468	16,35030	32,174	0,00004975	0,0016006	0,0047448	0,2834	0,306382	0,287802
0,461532	0,372087	476,769	0,05245	11,9092	10,88210	32,174	0,00012039	0,0038734	0,0104100	0,5018	0,603892	0,514028
0,785029	0,65279	2592,22	0,29777	284,9	103,29900	32,174	0,00031681	0,0101932	0,0156148	0,8219	1,172984	0,920094
0,860012	0,720968	359,272	0,05601	28,4598	16,26900	32,174	0,00027273	0,0087747	0,0121708	0,7767	1,063387	0,843150
0,950426	0,803563	359,272	0,05960	23,0812	15,40820	32,174	0,00024849	0,0079948	0,0099491	0,7437	0,999714	0,798252

Tabla 62. Comprobación mediante Excel de los valores resultantes en la tabla 61.

A continuación, en esta tesis se comprueba mediante hoja de cálculo Excel (**Tabla 63**) y con los datos aportados por la tabla, los valores arrojados por la fórmula de *Prony*, así como también los valores de α y β mediante el método de los mínimos cuadrados.

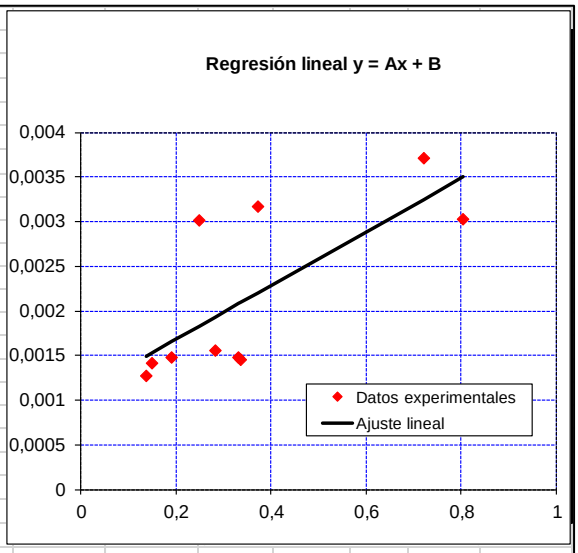
Vs	Vm	λ	ζ	ω	χ	g	$\frac{\omega\zeta}{\lambda\chi}$	$\frac{g\omega\zeta}{\lambda\chi}$	$\frac{g\omega\zeta}{\lambda\chi Vm}$	Prony
0,142659	0,094051	31379,5	1,11438	0,674492	2,33863	9,800	0,00001024	0,0001004	0,0010672	0,086585
0,196799	0,137345	467,769	0,016355	4,4883	8,77066	9,800	0,00001789	0,0001753	0,0012767	0,135893
0,810875	0,148857	467,769	0,016919	5,405	9,12257	9,800	0,00002143	0,0002100	0,0014108	0,156221
0,260543	0,18976	467,769	0,021430	5,7582	9,20378	9,800	0,00002866	0,0002809	0,0014802	0,194311
0,329414	0,248518	467,769	0,040605	8,72377	9,9076	9,800	0,00007643	0,0007490	0,0030141	0,384124
0,368423	0,282091	359,272	0,010896	22,6466	15,3757	9,800	0,00004467	0,0004378	0,0015518	0,267092
0,426081	0,332219	477,769	0,030454	7,6759	9,74518	9,800	0,00005021	0,0004920	0,0014810	0,289622
0,432036	0,337349	359,272	0,010061	29,0468	16,3503	9,800	0,00004975	0,0004875	0,0014452	0,287802
0,461532	0,372087	476,769	0,052448	11,9092	10,8821	9,800	0,00012039	0,0011798	0,0031708	0,514028
0,785029	0,65279	2592,22	0,297770	284,9	103,299	9,800	0,00031681	0,0031048	0,0047562	0,920094
0,860012	0,720968	359,272	0,056012	28,4598	16,269	9,800	0,00027273	0,0026727	0,0037071	0,843150
0,950426	0,803563	359,272	0,059596	23,0812	15,4082	9,800	0,00024849	0,0024352	0,0030304	0,798252

Tabla 63. Valores arrojados por la fórmula de Prony.

Regresión lineal mediante el método de mínimos cuadrados

INSTRUCCIONES:
Introduzca el número de datos (N) y los valores (xi,yi):

N:	10	
	X	**Y**
1	0,137345	0,0012767
2	0,148857	0,0014108
3	0,18976	0,0014802
4	0,248518	0,0030141
5	0,282091	0,0015518
6	0,332219	0,001481
7	0,337349	0,0014452
8	0,372087	0,0031708
9	0,720968	0,0037071
10	0,803563	0,0030304
0		
0		



RESULTADOS:
Valores de la recta de mejor ajuste y = Ax + B
con coeficiente de correlación lineal r

A:	**0,003009**	Error en A:	**0,001004**	(Corregido 13/11/14 – AQS)
B:	**0,001082**	Error en B	**0,000420**	
r:	**0,727274**			

Ilustración 50. Método de los mínimos cuadrados para deducir α y β.

Los valores marcados en color rojo se corresponden con los dos valores que *Prony* desechó para el cálculo de su fórmula y se corresponden con los dos experimentos hechos por *Chezy* sobre el "*Rigole de Courpalet*" y sobre el Sena.

Siguiendo los mismos pasos de *Prony* para la deducción de los valores de α y β, se obtiene (Ilustración 50):

Por lo tanto, los valores resultantes mediante hoja Excel son $\alpha = 0{,}001082$, y $\beta = 0{,}003009$, muy similares en orden de magnitud a los encontrados por *Prony*, y la ecuación quedaría:

$$\frac{g\omega\varsigma}{\lambda\chi} = 0{,}001082U + 0{,}003009U^2 \quad \textbf{Ecuación 129}$$

Que, cuando se reduce, aplicando la fórmula de la ecuación cuadrática, da

$$U = -0{,}179794 + \sqrt{0{,}0323259 + 3256{,}90 \times \frac{\omega\varsigma}{\lambda\chi}}$$ **Ecuación 130**

Muy similar a la calculada por *Prony*, no obstante, si consideramos los márgenes de error que da el método de los mínimos cuadrados, la ecuación de *Prony* se confirma como válida, dado que se puede ajustar dentro de los siguientes intervalos:

$\alpha = 0{,}001082 \rightarrow$

- $\alpha_{min} = 0{,}001082 - 0{,}00042 = 0{,}000662$
- $\alpha_{max} = 0{,}001082 + 0{,}00042 = 0{,}001502$
- $\alpha_{Prony} = 0{,}00093$

$\beta = 0{,}003009 \rightarrow$

- $\beta_{min} = 0{,}003009 - 0{,}001004 = 0{,}002005$
- $\beta_{max} = 0{,}003009 + 0{,}001004 = 0{,}004013$
- $\beta_{Prony} = 0{,}00266$

Ilustración 51. Intervalo de los valores de α y β calculados por el método de los mínimos cuadrados para la fórmula de Prony.

Por lo tanto, la fórmula de *Prony*:

$$U = -0{,}174812 + \sqrt{0{,}0305592 + 3687{,}52 \times \frac{\omega\varsigma}{\lambda\chi}}$$ **Ecuación 131**

Se considera válida dentro de los límites de error.

En la tabla precedente (Tabla 61), aportada por la enciclopedia de *Edymburgo*, las velocidades medias en la columna 2 no se observaron directamente, sino que se dedujeron de las velocidades superficiales por una fórmula de *Dubuat*, a saber.

$$U = \left(\sqrt{V} - 0,08227\right)^2 + 0,0067675$$ **Ecuación 132**

En esta fórmula, que se reduce a metros, U es la velocidad media, y V la velocidad superficial. *Girard* también calculó sus velocidades medias por una fórmula equivalente.

Fórmulas	Diferencias positivas	Diferencias Negativas
Fórmula de DuBuat	0,0338	0,0391
Fórmula de Girard	0,0238	0,0970
Formula de Prony	0,0198	0,0060

Tabla 64. Diferencias absolutas entre la velocidad media calculada y observada.

En la fórmula de *Dubuat*, los errores están entre 8/100 y 29/100 de los resultados observados; En *Girard*, están entre 16/100 y 19/100; y en *Prony* entre 4/100 y 7/100. Por lo tanto, la gran superioridad de la fórmula de *Prony* es manifiesta.

Como la fórmula precedente de *Prony* sólo fue extraída de algunas observaciones, para compararla con la otra fórmula, ha deducido valores más correctos de α y β de 31 experimentos, incluyendo los ocho experimentos de *Dubuat* en la tabla (Tabla 65).

Los 23 nuevos experimentos se realizaron con gran precisión sobre los canales artificiales, y tienen la ventaja de dar la velocidad media de la observación directa.

Estos experimentos, que están contenidos en la tabla (Tabla 65), dan los siguientes valores de α y β, a saber: α = 0,000436, β = 0,003034, de la que obtenemos:

$$U = -0,0718523 + \sqrt{0,00516275 + 3232,9 \times \frac{\omega\varsigma}{\lambda\chi}}$$ **Ecuación 133**

O más simplemente,

$$U = -0,07 + \sqrt{0,005 + 3232,9 \times \frac{\omega\varsigma}{\lambda\chi}}$$ **Ecuación 134**,

que será lo suficientemente exacto. Con la primera de estas fórmulas, los números en la columna 8 de la tabla (Tabla 65). Fueron calculados.

Contiene las velocidades del agua en los canales, como se observa en treinta y un experimentos, en comparación con las velocidades calculadas por la fórmula de *Prony*.

TABLE II.

Containing the Velocities of Water in Canals, as observed in thirty-one Experiments, compared with the Velocities calculated by Prony's Formula.

1	2	3	4	5	6	7	8
Number of Experiment.	Perimeters of the Sections or values of χ	Areas of the Sections, or values of ω	Inclination of the Canal, or values of $\frac{\zeta}{\lambda}$	Values of the Functions. $\frac{g\,\omega\,\zeta}{\lambda\chi U}$	Mean Velocities, or values of U: By direct Experiment.	Mean Velocities, or values of U: Deduced from the superficial Velocity.	Velocities, or values of U calculated.
	Metres.	Metres.	Metres.	Metres.	Metres.	Metres.	Metres.
1	2,33863	0.674492	0,00003551	0,0008623		0,116509	0,123793
2	0.683516	0.050562	0,0001077	0,0006287	0,124241		0,103964
3	0.954216	0.0113764	*Id.*	0,0008160	0,154299		0,144161
4	8,77066	4,4883	0,00003496	0,0010922		0,160679	0,179161
5	9,12257	5.4050	0.00003617	0,0012213		0,172109	0,200992
6	9,20378	5,7582	0,00004581	0,0013239		0,212361	0,240924
7	0,368693	0,0152639	0,0005787	0,00097107	0,242005		0,215583
8	0.577402	0.0258071	0,0007082	0,0012481	0,248773		0,256018
9	0,460189	0.0251857	0.00 5787	0,0011819	0,262849		0,256107
10	15,3757	22.6466	0,00003033	0,0014567		0,300783	0,314896
11	0 629377	0,0379215	0.0007082	0,0012779	0,327546		0,306459
12	0.505937	0,0307842	0,0005717	0,0010339	0,334043		0.273113
13	9,74518	7.6759	0,00006510	0,0014458		0,347893	0,341608
14	16.3508	29,0468	0.00002800	0,0013832		0,352792	0,33558
15	0.575237	0,025281	0,0010764	0,0012641	0,367069		0,325775
16	0.705984	0,0558285	0,0007082	0,0014321	0,383581		0,359686
17	0,789630	0.0753154	*Id.*	0.0015741	0,420938		0,400958
18	0.414442	0,0199317	0,0023419	0.0022326	0,494839		0,535840
19	0,575237	0,025281	0,0021834	0,0017179	0,547896		0.489747
20	0,490778	0,0288423	0,0023419	0,0024567	0,549520		0,599057
21	0.551415	0.0369616	*Id.*	0.0025427	0,605555		0,644159
22	0,582004	0,0413509	*Id.*	0,0025612	0,637227		0,665101
23	0,703819	0.061136	0,0024272	0,0028149	0,734678		0,756869
24	0,353534	0,0138056	0,0047170	0,0024262	0,744694		0,703180
25	0.737656	0,0632025	0,0021834	0,0023961	0,765809		0,709152
26	0.772306	0,0738205	0,0023148	0,0028111	0,772035		0,776964
27	15,4028	23,0812	0.00016532	0.0031313		0,776043	0,825972
28	0,798563	0.0370788	0,004717	0.0027442	0,782863		0,772683
29	0,840793	0,0876261	0,0023148	0.0028984	0,816430		0,814208
30	0,878961	0.095782	*Id.*	0,0028662	0,863261		0,834050
31	0.894121	0,0991601	*Id.*	0 0028604	0.880315		0,841999

Tabla 65. Velocidades del agua en los canales en treinta y un experimentos y comparación con calculadas por la fórmula de Prony.

Si con los 31 experimentos se calculan mediante hoja Excel los parámetros α y β, se obtienen los siguientes:

x	y
0,116509	0,000861
0,124241	0,000628
0,154299	0,000082
0,160679	0,001091
0,172109	0,001220
0,212361	0,001323
0,242005	0,000970
0,248773	0,001250
0,262849	0,001181
0,300783	0,001456
0,327546	0,001277
0,334043	0,001021
0,347893	0,001444
0,352792	0,001382
0,367069	0,001263
0,383581	0,001380
0,420938	0,001573
0,494839	0,002231
0,547896	0,001716
0,549520	0,002454
0,605555	0,002540
0,637227	0,002559
0,734678	0,002812
0,744694	0,002424
0,765809	0,002394
0,772035	0,002809
0,776043	0,003128
0,762863	0,002814
0,816430	0,002896
0,863261	0,002864
0,880315	0,002858

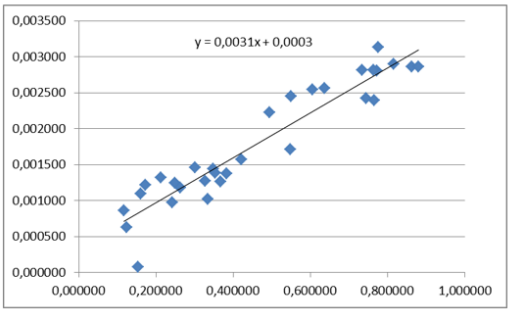


Ilustración 52. Método de los mínimos cuadrados para deducir α y β.

Se observa que los valores arrojados por la hoja Excel son muy similares a los obtenidos por *Prony* en sus cálculos.

Estos valores de α y β, son los siguientes a saber: α = 0,0003, β = 0,0031, muy similares a los obtenidos por *Prony* con el mismo método, pero con diferente forma de operar, α = 0,000436, β = 0,003034, por lo tanto, su fórmula se considera válida dentro de ciertos límites.

Finalmente, como se verá más adelante en esta tesis, la fórmula que *Darcy* analizó como la definitiva de *Prony* en su Memoria "*Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux*" (Investigación experimental sobre el movimiento de agua en tuberías), es la siguiente:

$$0{,}0000173314U + 0{,}000348259U^2 = \frac{1}{4}Dj$$ **Ecuación 135**

Donde:

U = Velocidad media en m/s

D = Diámetro de la conducción

J = Pérdida de carga por metro

En la presente tesis se ha evaluado la primera y segunda fórmula de *Prony* (Ecuación 131) y (Ecuación 134) con el mismo caso que se utilizó para evaluar la formula de *Girard*, en el que se supone una conducción de 1000 metros de longitud, con diámetros variables en mm (25, 50, 100, 200, 400, 600, 800 y 1000), con un desnivel de los extremos de la conducción de 5 m en todos los casos, supeniendo que el extremo inicial arranca en depósito y el final en libre. Ello equivale a decir que, desde la lámina libre de agua en el depósito hasta tener una pérdida de carga de 5 metros, cada caso tendrá una velocidad y por lo tanto un caudal que saldrá por el extremo final.

Introduciendo los cálculos mediante hoja EXCEL, se pudo comprobar, teniendo en cuenta como velocidades reales las calculadas mediante programa software CALTUB y las calculadas mediante la fórmula de *Girad* lo siguiente:

Para la primera fórmula el error medio absoluto en toda la gama de diámetros que van de 25 mm a 1000 mm es de 0,49 y el error medio relativo de 28,41 % aproximadamente; entre los diámetros comprendidos entre 25 mm y 200 mm el error absoluto medio es de 0,24 y entre los diámetros comprendidos entre 400 mm y 800 mm el error absoluto medio es de 0,33.

Para la segunda fórmula el error medio relativo en toda la gama de diámetros que van de 25 mm a 1000 mm es de 0,47 y el error absoluto medio de 23,78 % aproximadamente; entre los diámetros comprendidos entre 25 mm y 200 mm el error absoluto medio es de 0,13 y entre los diámetros comprendidos entre 400 mm y 800 mm el error absoluto medio es de 0,34.

Esto indica que, para ambas fórmulas, a medida que aumentan los diámetros, se cometen errores más grandes en el cálculo de las velocidades y descargas. Esta observación también la hizo *Darcy* posteriormente, al analizar su fórmula.

5.1.10 Henry Philibert Gaspard Darcy (1803 – 1858)

Biografía sucinta

Fig. 41 Henry Philibert Gaspard Darcy

Nació en *Dijon* (Francia), su progenitor falleció cuando él tenía apenas 14 años, y su madre tuvo que pagar sus estudios pidiendo prestado.

Más conocido como *Darcy*, fue uno de los pioneros modernos en cuanto a abastecimiento de agua potable se refiere, en el que tuvo un importante papel en el desarrollo de su ciudad natal.

En 1821 llegó a la ciudad de París para realizar durante 7 años sus estudios en la Escuela Politécnica de París, siendo admitido dos años más tarde en la Escuela de Puentes y Caminos, permitiéndole conseguir un empleo en el Departamento de esa Escuela y años más tarde se graduó como ingeniero.

En 1828 se casó con *Hanriette Carey* con la que permaneció junto hasta su muerte, pero no tuvieron hijos.

Entre 1834 y 1840 la municipalidad de *Dijon* le encarga que se ocupe directamente del diseño y construcción del sistema de agua potable a la ciudad, que consistía en una tubería de abastecimiento de 12,7 kms de tubería de aducción y 28 kms de tuberías de distribución para abastecer a edificio e hidrantes (Wales, 2001). El

sistema entero distribuía las aguas por gravedad, sin aporte de energía por bombeo y su instalación subterránea.

En 1847 se suministraba agua a todos los edificios de *Dijon*, convirtiendo esta ciudad en la segunda de Europa en materia de abastecimiento de agua, después de Roma.

En 1848 fue nombrado jefe de Ingeniería en el Departamento del Canal de *Borgoña*, pero fue posteriormente obligado a abandonar *Dijon* por presiones políticas. Inmediatamente después fue nombrado director-jefe de Aguas en París. Allí realizó importantes investigaciones en Hidráulica, en especial sobre el flujo y pérdidas de carga por fricción en tuberías, que sirvió de base para desarrollar la ecuación de *Darcy-Weisbash* sobre el flujo de agua en tuberías y creó también un diseño del tubo de *Pitot*.

En los años 1855 y 1856 realizó experimentos que ayudaron a establecer la ley de *Darcy* para el flujo en arenas.

Darcy falleció de neumonía el 13 de enero de 1858 mientras realizaba un viaje a París, y fue sepultado en *Dijon* (Zuluaga García, 2009).

Obra

- HENRY DARCY. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*, Dijon, París 1856 (Las fuentes públicas de la ciudad de Dijon).
- *Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux*. París, Imprimerie impériale, 1857 (Research Investigación experimental sobre el movimiento de agua en tuberías).
- *Note relative à quelques modifications à introduire dans le tube de Pitot*. En: Annales des Ponts et Chaussées, 1858, p. 351-359. (Nota sobre algunas modificaciones que se introducirán en el tubo de Pitot)
- HENRI BAZIN. *"Recherches hydrauliques entreprises par M. Henry Darcy continuées par M. Henri Bazin* (La investigación hidráulica emprendida por el Sr. Henry Darcy continuada por el Sr. Henri Bazin). 1ª parte. *Recherches*

expérimentales sur l'écoulement de l'eau dans les canaux découverts (Investigación experimental sobre el flujo de agua en canales abiertos)" Paris, Imprimerie impériale, 1865.

- "*Recherches hydrauliques entreprises par M. Henry Darcy continuées par M. Henri Bazin* (La investigación hidráulica emprendida por el Sr. Henry Darcy continuada por el Sr. Henri Bazin). *2ª parte. Recherches expérimentales relatives au remous et à la propagation des ondes* (Investigación experimental relacionada con la propagación de remolinos y olas)" Paris, Imprimerie impériale, 1865.

Aportación y desarrollo de su fórmula y experimentos.

Este ilustre ingeniero en lo que a Hidráulica se refiere, representa un punto de inflexión importante por las grandes certezas en sus aportaciones al respecto, y es por ello por lo que en esta tesis doctoral se expondrá con el máximo detalle y amplitud posible el desarrollo de sus estudios en lo que a pérdidas de carga en conducciones se refiere.

Darcy al estudiar la teoría y las experiencias de sus antecesores en cuanto a fórmulas, cuyo objeto era el de calcular las velocidades medias del agua en las conducciones, se percató de los principales desacuerdos que había en los resultados de la práctica, por lo que se dispuso a determinar las causas de esas diferencias.

Aprovechó las facilidades ofrecidas, debido a su puesto como director del Servicio Municipal de la distribución de aguas de París, para estudiar con todo detalle las cuestiones que se había planteado.

Los resultados de sus experimentos contradecían la sabiduría convencional de aquel momento, por lo que decidió someter a juicio de la Academia de Ciencias sus "*Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux"* (Investigaciones experimentales sobre el movimiento del agua en las tuberías), en la que posteriormente una Comisión compuesta por el General Poncelet, el inspector general de Minas *M. Condes* y el g*eneral Morin*, fueron los encargados de hacer un informe sobre esa Memoria.

Posteriormente, la Memoria fue aprobada dada la escasez y la poca exactitud que había hasta el momento, y, por otro lado, por la gran amplitud de los datos experimentales, la verificación de las reglas anteriores en materia hidráulica y la coherencia de los resultados con los cálculos aportados por *Darcy*.

Esta Memoria, que aborda el movimiento del agua en las tuberías, está dividida en 6 capítulos:

Primer capítulo tiene por objeto indicar los motivos que han determinado a *Darcy* a entregarse a estas investigaciones experimentales.

Segundo capítulo está dedicado a la descripción de los dispositivos utilizados en esta investigación.

Tercer capítulo presenta los resultados de los experimentos.

Cuarto capítulo, presenta los procedimientos utilizados para determinar los coeficientes de las fórmulas.

Quinto capítulo da la descripción de las experiencias relativas a la búsqueda de la ley que vincula entre sí las velocidades de los filetes fluidos.

Sexto y último capítulo, Se determina el coeficiente de reducción de la entrada de conductos cilíndricos; *Darcy* hace preceder esta búsqueda de un resumen de los resultados obtenidos en el curso de dicho escrito y de algunas consideraciones relativas a las variaciones respectivas de los dos términos de la resistencia en la expresión general de las cuales se deducirá la velocidad media del agua en una conducción cilíndrica.

A continuación, se hace un resumen y análisis propio de lo más relevante:

Utilidad de las experiencias

Lo primero que hizo *Darcy* fue hacer un examen crítico de los trabajos anteriores, en el que indica la insuficiencia de datos experimentales que los ingenieros que le habían precedido habían dispuesto (Darcy, 1857).

Couplet, miembro de la Academia de Ciencias, que fue el primero que se hizo cargo de la investigación de su tiempo, realizó solo 7 experiencias sobre las conducciones de agua de *Versalles*, establecidas desde hace muchos años, y, por lo tanto, alcanzadas por la acción de los depósitos que pudieron haber recibido en el estado de servicio.

Couplet basándose en observaciones realizadas en esas infraestructuras hidráulicas, extrajo algunas conclusiones generales con cierta seguridad, y en la que *Darcy* señalo de ellas las más notables.

Existía una regla en la que decía que las velocidades del agua son como las raíces cuadradas de las alturas desde donde cae, o lo que es lo mismo, desde la altura de la columna de agua cuya carga hace vaciar el agua inferiormente.

Darcy apuntó que, si juzgamos por esta regla, la cantidad de agua que pueda transportar una conducción típica, como las de *Versalles* de 407 pulgadas en lugar de las de 10,5 pulgadas, que fue con la que experimentó *Couplet*, la diferencia es sustancial, por lo que la regla resultaba engañosa para diámetros grandes.

Una cita extraída de *Couplet* dice así:

"Muy a menudo la cantidad de agua es de veinte o treinta veces menos que la que la regla prometía. Esta extraña disminución viene del rozamiento, al menos en gran parte. Vemos y adivinamos sin experiencia, que su efecto es aún mayor cuando las conducciones son más largas, los diámetros de las tuberías más pequeñas, las curvas o codos más frecuentes, los ángulos de las curvas más agudas, la velocidad el agua más alta, pero costará bien saber, solamente más o menos, el valor de cada uno de estos principios de disminución, y cuáles serán los resultados de sus diferentes combinaciones" (Darcy, 1857). También observó que el aire interceptado en las conducciones intervenía en esa disminución.

De esta cita en 1732, se puede inducir que no sólo se desconocían las leyes experimentales de la salida del agua en las tuberías de conducción, sino que creía apenas en la posibilidad de descubrirlos algún día (Darcy, 1857).

Bossut realiza solo 26 experiencias sobre las tuberías nuevas de hojalata de pequeños diámetros de 1 a 2 pulgadas, y *Dubuat* 18 sobre las tuberías también de hojalata, con 0, 027 m de diámetro.

De esta manera, solamente con 51 experiencias, *Prony* estableció las fórmulas que sirvieron a los ingenieros de reglas para establecer las grandes conducciones de distribución de agua en las ciudades.

Estas reglas exigían que el estado de las superficies interiores de las conducciones no ejerciese una influencia importante en la resistencia de las paredes y que estuvieran basadas en una expresión de esa resistencia, que contuviera un factor compuesto de dos términos proporcionales, uno en la primera y otro en la segunda potencia de la velocidad media del tubo, en virtud de la ley de *Coulomb*.

Prony modificó afortunadamente (según la opinión de *Darcy*) la fórmula del ingeniero *Girard*, deducida de las experiencias de Coulomb sobre la resistencia de los fluidos, y llegó a su conocida expresión:

$$\frac{1}{4} D\, j = \alpha U + \beta U^2$$ **Ecuación 136**

En el cual:

D = Diámetro de la tubería

j = Pendiente por metro

U = Velocidad media

α = 0,0000173314

β = 0,0003482590

Esta fórmula fue muy utilizada en su época por todos los ingenieros que tenían que planificar o realizar distribuciones de agua, por lo que incuestionablemente se convirtió en clásica.

M. Mary, antiguo ingeniero en jefe de las Aguas de París expresó su opinión con respecto a esta fórmula:

Esta fórmula da caudales más bajos que los obtenidos con nuevas tuberías de pequeño diámetro, la diferencia puede ir para grandes diámetros de hasta 1/5; de manera que al hacer uso las tablas que representan las fórmulas no tienen que preocuparse por el efecto de los ligeros depósitos que pueden reducir el diámetro de los tubos y aumentar la fricción del agua.

El ingeniero en jefe *D'aubuisson*, al que la ciudad de *Toulouse* le debe importantes obras hidráulicas de instalación de conducciones, además de ciencia e investigación extensa sobre este tema, decía en 1829: "las fórmulas de *Prony* están basadas en experiencias generalmente hechas con pequeños tubos, y se encontraron errores cuando se les aplicó sobre las grandes conducciones" (Darcy, 1857).

En efecto, mediante la observación y por las experiencias realizadas en las conducciones de grandes dimensiones, que estaban en servicio desde hacía varios años, comprobó que las pérdidas de caudal, y, por lo tanto, las pérdidas de carga ocasionadas por el roce del agua en estas conducciones eran a veces más del doble de lo que indicaban las fórmulas de *Prony*. Ello le indujo a utilizar, para el cálculo donde la velocidad alcanza y supera los 0,60 m/s, una fórmula que supone la resistencia proporcional al simple cuadrado de la velocidad, lo que daba resultados inferiores a un tercio de los que arrojaban la fórmula de Prony, así que esta rectificación no superó este inconveniente como quedó demostrado.

D'aubuisson decía que había que mejorar las reglas o fórmulas en lo que se refiere a la circulación de agua en las tuberías de las conducciones, ya que estaban basadas sobre las establecidas por *Dubuat*, *Prony* y *Eytelwein*, deducidas de las experiencias generalmente hechas sobre tubos bastante pequeños, y que por dicha razón se encontraron con problemas cuando las aplicaron a las grandes conducciones. Se encontraron anomalías en las conducciones del parque de *Versalles*, que daba dos tercios del caudal que indicaban las fórmulas y en las del suburbio de *Saint-Victor* en la que ni siquiera dieron la mitad.

D'Aubuisson expone a continuación el principio basado en sus experimentos:

"Supongamos en un tubo lleno de agua en reposo; la carga o la presión en cada punto de las paredes se mide por el peso de una columna de agua cuya altura verticalmente entre este punto y el nivel de líquido en la cabeza de la conducción: en consecuencia, si se perfora la pared en diversos puntos y a cada agujero perforado se adapta un tubo vertical, el agua ascendería en todos los tubos en el nivel ya mencionado. Supongamos ahora qué el fluido se mueve en la conducción y qué el movimiento ha alcanzado la uniformidad; si la conducción no opone ninguna resistencia al movimiento, la presión sobre cada punto sería disminuida sólo por la altura debida a la velocidad del fluido frente a frente este punto, y la velocidad, que sería en todas partes la misma (en igualdad de diámetro), todas las disminuciones de presión serían iguales, todas las columnas manométricas bajarían una cantidad igual, y sus extremidades superiores todavía estarían en el mismo nivel. Pero en realidad no es así: el tubo, ya sea por la fricción contra las paredes, o por constricciones, etc., ofrece una resistencia al movimiento; entonces las columnas fluidas contenidas en los tubos que hacen la veces de manómetros disminuyen de altura desde el origen de la conducción hasta su extremidad: y la diferencia de altura o de nivel para dos puntos tomados a voluntad indica la resistencia que la conducción opuso al movimiento entre estos dos puntos; en consecuencia si en una conducción adaptamos convenientemente un tubo manométrico, la diferencia de nivel entra el agua que cierra y la que está sobre el tubo de la conducta expresará la resistencia de la conducción: será la altura de la columna agua, la medición de esta resistencia" (Darcy, 1857).

Los experimentos realizados por *D'Aubuisson* se muestran en el siguiente cuadro resumen, en el que se puede observar que la resistencia deducida de la fórmula de *Prony* es inferior a la que dio la experiencia:

NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE des TUYAUX.	LONGUEUR.	VOLUME DÉBITÉ.	PERTE DE CHARGE d'après L'EXPÉRIENCE.	PERTE DE CHARGE d'après LA FORMULE.	RAPPORT entre les RÉSISTANCES.
	mèt.	mèt.	pouces.	mèt.	mèt.	
1	0,27	605,26	76,065	0,453	0,343	0,757
2	0,27	605,26	140,25	1,413	1,06	0,750
3	0,12	437,50	14,80	0,805	0,542	0,673
4	0,12	437,50	26,83	2,423	1,657	0,683

Tabla 66. Cuadro comparativo de la resistencia dada por la fórmula de Prony y la dada por la experiencia.

En marzo de 1830, Sr. *D'Aubuisson*, y *Sr. Castel*, conservador de las fuentes de *Toulose*, realizaron otras experiencias en las cuales las relaciones de las pérdidas de carga, según la fórmula y la experiencia, son más pequeñas aún.

Estas experiencias están dadas con detalle en la historia del establecimiento de las fuentes de *Toulouse*. En total se hicieron cinco, comprendiendo cada una varios grupos de tubos de 0,08 , 0,09, 0,12, 0,16 m de diámetro. A continuación, se exponen las relaciones entre las pérdidas de carga dadas por la fórmula y la experiencia.

Experiencia Nº1	0,511
Experiencia Nº2	0,42
Experiencia Nº3	0,47
Experiencia Nº4	0,46
Experiencia Nº5	0.524

Tabla 67. Relaciones entre las pérdidas de carga dadas por la experiencia y la fórmula de Prony.

Por ende, parece derivarse de dichas experiencias que la fórmula de *Prony* nos daría, al menos para las tuberías ya establecidos durante algún tiempo, una resistencia dos veces más pequeña que la resistencia indicada por las experiencias realizadas.

Prony señaló (página 171 de sus investigaciones fisicomatemáticas sobre la teoría de las aguas corrientes) que el cálculo de la velocidad, por su fórmula, no tiene nada

de difícil, pero que, sin embargo, cuando se trata de cálculos prácticos ordinarios y que la velocidad del agua en el tubo no fuera muy pequeña, se podrá evaluar a esta última por la simple ecuación:

$$V = 26{,}79\sqrt{D\,j}$$ **Ecuación 137**

O por el volumen (Caudal)

$$Q = 21{,}03\sqrt{D^5 j}$$ **Ecuación 138**

Esto es, como vemos, en el supuesto de que las resistencias sean simplemente proporcionales al cuadrado de la velocidad del fluido (Darcy, 1857).

D'Aubuisson dice también que, en las mismas circunstancias, es decir cuando se trata de velocidades superiores a 0,60 m por segundo, se limita a recurrir a la fórmula

$$Q = 14{,}66\sqrt{D^5 j}$$ **Ecuación 139**

He aquí cómo alcanzó esta expresión:

De las experiencias de *Couplet*, dedujo la ecuación

$$Q = 20{,}30\sqrt{D^5 j}$$ **Ecuación 140**

Luego a partir del resultado práctico encontrado por él, para que la carga deba ser duplicada, concluye que Q debe dividirse por $\sqrt{2}$, en última instancia, lo que lleva, en definitiva, a:

$$Q = 14{,}66\sqrt{D^5 j}$$ **Ecuación 141**

Esta fórmula da resultados de alrededor de 1/3 inferiores a los de *Prony*, y concuerda con el método que el Sr. *D'Aubuisson* recomienda y que consiste en suponer que los tubos tienen que conducir la mitad, además del volumen de agua al cual realmente deben dar paso (Darcy, 1857).

En presencia de todos estos resultados, *Darcy* se planteó si de alguna forma ¿no era oportuno, al menos en un interés práctico, buscar las causas de las desviaciones observadas?

Se cuestionaba si la armonía que existía en aquel entonces entre las fórmulas y resultados de la experiencia se mantendria aún después de algunos años, cuando una ligera capa de óxido o de depósito piedra caliza alterara el estado de la superficie, sin modificar la sección de las conducciones de manera apreciable, y en que límites esta alteración de las superficies ejercería su influencia sobre el caudal.

A *Darcy* le parecía no obstante que los radios debían desempeñar un papel más importante que el que se les atribuye.

Opinaba que se debía considerar la pequeña capa líquida en contacto con las paredes y alojadas en los intersticios formados por las asperezas de la superficie, justo al contrario de lo que se consideró durante mucho tiempo, en la que se pensaba que la resistencia al movimiento del líquido en las paredes, cualesquiera que sean, eran recubiertas con una película delgada e inmóvil sobre el cual se efectuaba el movimiento, de modo que la pared efectiva no actuaba.

Tuvo en cuenta además las atracciones ejercidas por estas paredes y admitió que los elementos de esta capa son animados por movimientos giratorios comparables a aquellos a los que se observa en los ensanches bruscos en los lechos de los canales, y a los que no participan, al mismo grado que otros, en el movimiento de traslación general.

Las partículas que discurren para chocar en su marcha a los salientes cuya pared está salpicada, arrojan un cierto desorden en la traslación de los filetes vecinos.

Estos efectos tendrán tanta más influencia sobre el caudal, a medida que el diámetro del tubo es más pequeño.

Esta simple exposición le bastó a *Darcy*, para dar a entender que sí, contrariamente a las alegaciones de los primeros experimentadores, el estado de las superficies ejerce una notable influencia sobre el flujo, una especie de compensación pudo

establecerse entre el flujo de tubos nuevos de pequeño diámetro y de antiguos tubos de gran diámetro, pero contaminados por depósitos.

Darcy señaló que, en cuanto al diámetro, reuniendo los resultados de las experiencias realizadas por *Couplet*, *Bossut* y *Dubuat*, reconoció que las fórmulas de *Prony* no le asignaban una gran influencia, ya que, para los pequeños diámetros, los caudales experimentales eran inferiores a los de estas fórmulas, mientras que para los grandes diámetros eran más altos.

Esto indujo a los ingenieros de la época a diseñar por exceso el diámetro de las tuberías.

Por esta razón decía *M. Mary* que, si las conducciones disminuían su sección por los depósitos acumulados en las paredes de las tuberías, no había que preocuparse ya que el diámetro estaba sobredimensionado con la fórmula.

Estos fueron los principales motivos que comprometieron a *Darcy* a emprender una larga serie de experiencias con el fin de llegar a la solución de esta doble cuestión a saber:

- Influencia de las condiciones de superficie sobre el flujo.
- Papel que desempeñan los diámetros.

Procedió de una manera distinta que no se había hecho hasta ese momento. Hizo un número suficiente de experiencias sobre tubos de diámetros diversos, de diferentes naturalezas, paredes nuevas o recubiertas con depósitos.

Hizo una clasificación de estas experiencias por especies de tuberías y por diámetros, de tal forma que pudo deducir las leyes generales.

Evitó la confusión de llegar a un tipo de compensación evitando combinar entre ellas las experiencias hechas sobre tubos de diferentes diámetros de paredes lisas o recubiertas con depósitos.

Prony y *Dubuat* actuaron de forma distinta porque habían planteado el siguiente principio:

“Cuando el fluido fluye en un tubo o sobre una cama susceptible de ser mojada, una hoja o capa del fluido permanece adherida a la materia que compone el tubo, o en la cual esta cama ha aumentado: esta capa puede ser como la verdadera pared que contiene la masa del fluido en movimiento” (Darcy, 1857).

La siguiente tabla (Tabla 68) da el resumen de la nomenclatura, material y condiciones de las superficies de las tuberías sometidas a los experimentos de *Darcy*.

NUMÉROS D'ORDRE.	DIAMÈTRES.		NATURE DES TUYAUX.	ÉTAT des SURFACES.	LONGUEUR de chaque tuyau.	NOMBRE DE JOINTS par 100 mètres.	MODE DE RACCORDEMENT.	VITESSES MOYENNES OBTENUES. Minimum.	Maximum.
	mèt.				mèt.			mèt.	mèt.
1	0,0122			neuf.....	2,15	47	A vis.....	0,0344	1,195
2	0,0266	3	Fer étiré.....	idem.....	2,47	40	Idem.....	0,0578	2,1840
3	0,0395			idem.....	3,85	26	Idem.....	0,0626	2,5971
4	0,014			neuf.....	11,75	8	Nœuds en soudure.	0,04	1,29
5	0,027	3	Plomb.....	idem.....	6,60	16	Idem.....	0,065	1,679
6	0,041			idem.....	5,20	20	Idem.....	0,12	2,305
7	0,0268			neuf.....	2,79	36	A vis.....	0,03	2,507
8	0,0826	4	Tôle et bitume.	idem.....	2,90	34	Idem.....	0,10	3,897
9	0,196			idem.....	2,90	34	Idem.....	0,18	6,01
10	0,285			idem.....	2,90	34	Idem.....	0,395	3,207
11	0,04968	1	Verre.....	neuf.....	1,16	86	Joints à brides....	0,153	2,108
12	0,0359			avec dépôts.	1,30	77	Idem.....	0,051	0,633
13	0,0364			nettoyé....	1,30	77	Idem.....	0,113	1,126
14	0,0795			avec dépôts.	2,50	40	Emboîtements....	0,123	1,142
15	0,0801			nettoyé....	2,50	40	Idem.....	0,193	1,526
16	0,0819			neuf.....	2,50	40	Idem.....	0,088	3,265
17	0,0137	11	Fonte.....	idem.....	2,50	40	Idem.....	0,149	4,693
18	0,188			idem.....	2,50	40	Idem.....	0,205	4,928
19	0,2432			avec dépôts.	2,50	40	Joints à brides....	0,307	3,833
20	0,2447			nettoyé....	2,50	40	Idem.....	0,278	4,497
21	0,292			idem.....	2,50	40	Emboîtements....	0,244	3,16
22	0,50			neuf.....	2,50	40	Idem.....	0,4207	1,1278

Tabla 68. Tubos de sujetos a la experiencia.

Con respecto al principio de *Dubuat* de que la resistencia del movimiento del líquido en las paredes del tubo es independiente de la presión que el agua siente en oscilación, *Darcy*, en sus experiencias realizó presiones bastantes diferentes entre ellas y bastante elevadas para que fuera posible verificarlo bien. Así hizo varias de 17 a 26 metros y de 22 a 40 metros las presiones sometidas entre ambas partes de los tubos sometidos a observaciones; sin embargo, las diferencias o las pérdidas de cargas quedaron las mismas para ambas partes. La misma consecuencia resulto de una experiencia directa en la cual habían sido llevadas de 18 a 41 metros.

Finalmente admitió, sin error apreciable en la práctica que la resistencia al movimiento del agua en los tubos es independiente de la presión.

De acuerdo con los experimentos de *Coulomb*, la resistencia experimentada por el líquido contra las paredes de deslizamiento es una expresión de la forma $\alpha v + \beta v^2$

v = Velocidad del fluido contra las paredes.

α y β = Números constantes deducidos a partir de la experiencia.

En un tubo de radio R, la resistencia afectada por el líquido es, por metro lineal

$2\pi R\left(\alpha v + \beta v^2\right)$, pero en movimiento uniforme, esta expresión es igual al peso de un cilindro que tiene como diámetro el del tubo y por altura la carga **i** del tubo por metro lineal.

$$\frac{\alpha}{1000} = a \quad \text{Ecuación 142} \quad , \quad \frac{\beta}{1000} = b \quad \text{Ecuación 143}$$

$$\pi R^2 i = 2\pi R\left(a\,v + b\,v^2\right) \quad \text{Ecuación 144}$$

o $$\frac{R\,i}{2} = \left(a\,v + b\,v^2\right) \quad \text{Ecuación 145}$$

Pero recordamos que precisamente esta es la ecuación calculada por *Prony*, y solamente, en las obras del eminente geómetra, v no es en absoluto la velocidad a la pared, sino la velocidad media o la que se hace el uso más frecuente.

Darcy se cuestionaba si se debiera hacer esta sustitución. Todo lo que resulta del análisis de *Prony*, es que las acciones recíprocas de las capas diversas concéntricas y fluidas desaparecen de la ecuación final de equilibrio, y que queda en esta ecuación sólo una velocidad a la pared.

Darcy realizó un cálculo directo, tal como lo realizó, y al igual más tarde el ingeniero *Dupuit* en sus estudios hidráulicos.

Compartió, en el pensamiento de ellos, el fluido que circula dentro de la tubería de radio R, en una infinidad de cilindros concéntricos.

La experiencia demostró que el cilindro central tiene la velocidad máxima, y que para todos los demás cilindros envolventes la velocidad va siempre disminuyendo hasta que se llega a la capa contigua a la pared, donde encontramos la velocidad mínima.

Comenzando desde el cilindro central (Ilustración 53. Cilindros envolventes de velocidad.)

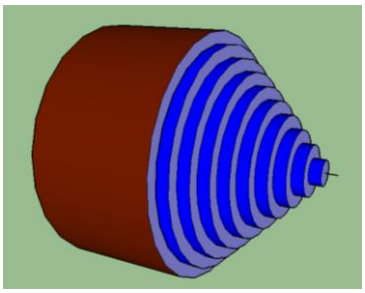


Ilustración 53. Cilindros envolventes de velocidad.

Las velocidades de la capa central

v_n Velocidad central
v_{n-1}
v_{n-2}
v_{n-3}
v_{n-4}
v_{n-5}
v_{n-6}
v Velocidad en la pared

Los radios correspondientes:

r_n Radio filete central
r_{n-1}
r_{n-2}
r_{n-3}
r_{n-4}
r_{n-5}
r_{n-6}
R_1 Radio hasta la pared

El número de estos cilindros envolventes que, siendo infinitos, las diferencias entre las velocidades, son infinitamente pequeñas:

v_n y v_{n-1}
v_{n-1} y v_{n-2}
v_{n-2} y v_{n-3}
.....

Las diferencias entre los radios también son infinitamente pequeñas, y, por supuesto, iguales entre sí.

r_n y r_{n-1}
r_{n-1} y r_{n-2}
r_{n-2} y r_{n-3}
.....

Sea δ esta diferencia, de tal manera que representan en números finitos las cantidades proporcionales a las diferencias infinitamente pequeñas de las velocidades de las capas.

$$\frac{v_n - v_{n-1}}{\delta}, \frac{v_{n-1} - v_{n-2}}{\delta}, \ldots$$

De acuerdo con estos valores, es obvio que uno puede hacer la siguiente serie de ecuaciones (Ecuación 144)

$$\pi r_n^2 i = 2\pi r_n f\left(\frac{v_n - v_{n-1}}{\delta}\right)$$

$$\pi\left(r_{n-1}^2 - r_n^2\right) i = 2\pi r_{n-1} f\left(\frac{v_{n-1} - v_{n-2}}{\delta}\right) - 2\pi r_n f\left(\frac{v_n - v_{n-1}}{\delta}\right)$$

$$\pi\left(r_{n-2}^2 - r_{n-1}^2\right) i = 2\pi r_{n-2} f\left(\frac{v_{n-2} - v_{n-3}}{\delta}\right) - 2\pi r_{n-1} f\left(\frac{v_{n-1} - v_{n-2}}{\delta}\right)$$

$$\pi\left(r^2_{n-3} - r_{n-2}{}^2\right)i = 2\pi r_{n-3} f\left(\frac{v_{n-2} - v_{n-3}}{\delta}\right) - 2\pi r_{n-2} f\left(\frac{v_{n-2} - v_{n-3}}{\delta}\right)$$

$$\pi\left(r^2_{n-4} - r_{n-3}{}^2\right)i = 2\pi r_{n-4} f\left(\frac{v_{n-2} - v_{n-3}}{\delta}\right) - 2\pi r_{n-3} f\left(\frac{v_{n-3} - v_{n-4}}{\delta}\right)$$

..... =.....
. .
..... = ...
.

$$\pi\left(r^2_{n-1} - r_n{}^2\right)i = 2\pi R\left(av + bv^2\right) - 2\pi R_1 f\left(\frac{v_1 - v}{\delta}\right)$$

En efecto, el crecimiento y la disminución de velocidad que cada cilindro anular recibe de los cilindros interiores o exteriores, a razón de la cohesión de moléculas fluidos, es una función de la diferencia de velocidades o tangentes de la curva antes citada.

Se supone los coeficientes de la función que expresa la resistencia debido a la cohesión dividido por Dg, producto de la densidad del fluido por gravedad.

En cuanto a la última ecuación realizada para el cilindro anular adyacente a la pared, reconocemos el primer término de la derecha: este término está dado por la ley observada por *Coulomb*.

Ahora bien, si sumamos todas estas ecuaciones juntos, llegamos a las ecuaciones ya encontradas (Ecuación 144) y (Ecuación 145).

Donde v expresa la velocidad en la pared.

Esta ecuación, tal como lo hicieron notar *Prony* y *Dupuit* en independiente de todas las fuerzas de retardo que no ejercen en la pared.

A la pregunta que se hacía *Darcy* de ¿podía *Prony* sustituir en esta ecuación la velocidad media u a la velocidad en la pared?

La experiencia muestra que actuando así no hubo error apreciable en la práctica.

En los veintidós tubos que *Darcy* sometió a las experiencias consiguió muy sensiblemente líneas rectas construyendo una línea con los i/u deducidos de la experiencia para abscisas y u o velocidades medias deducidas de la experiencia para ordenadas.

O

$\frac{i}{u} = m + nu$ **Ecuación 146** → $i = mu + nu^2$ **Ecuación 147** (precisamente es una parábola)

Si se observan las ecuaciones anteriores:

$$\pi r_n^2 i = 2\pi r_n f\left(\frac{v_n - v_{n-1}}{\delta}\right)$$

$$\pi\left(r^2_{n-1} - r_n^2\right) i = 2\pi r_{n-1} f\left(\frac{v_{n-1} - v_{n-2}}{\delta}\right) - 2\pi r_n f\left(\frac{v_n - v_{n-1}}{\delta}\right)$$

$$\pi\left(r^2_{n-2} - r_{n-1}^2\right) i = 2\pi r_{n-2} f\left(\frac{v_{n-2} - v_{n-3}}{\delta}\right) - 2\pi r_{n-1} f\left(\frac{v_{n-1} - v_{n-2}}{\delta}\right)$$

$$\pi\left(r^2_{n-3} - r_{n-2}^2\right) i = 2\pi r_{n-3} f\left(\frac{v_{n-2} - v_{n-3}}{\delta}\right) - 2\pi r_{n-2} f\left(\frac{v_{n-2} - v_{n-3}}{\delta}\right)$$

$$\pi\left(r^2_{n-4} - r_{n-3}^2\right) i = 2\pi r_{n-4} f\left(\frac{v_{n-2} - v_{n-3}}{\delta}\right) - 2\pi r_{n-3} f\left(\frac{v_{n-3} - v_{n-4}}{\delta}\right)$$

O generalmente

$$\pi r_n^2 i = 2\pi r_n\left(-\frac{dv}{dr}\right)$$ **Ecuación 148**

El signo - es debido al coeficiente diferencial porque v disminuye cuando r crece.

Es evidente que esta ecuación para cada pendiente muestra la relación entre el radio del cilindro y la velocidad anular da la ecuación de la curva de velocidad.

Pero la función f es desconocida, y no hay indicios aquí de la influencia que puede tener sobre esta curva el radio del tubo. La experiencia única puede determinar la forma de la función f, y la influencia del radio de la tubería. Por consiguiente, *Darcy* trató de deducir estos elementos en sus investigaciones experimentales.

Esto le permitió encontrar la expresión de la velocidad media, y la relación que existe entre esa velocidad y las del centro y a la pared.

Estos resultados se resumen en el capítulo V donde da la descripción de las experiencias relativas a la búsqueda de la ley que vincula entre sí las velocidades de los filetes fluidos y que se expondrá en esta tesis.

En referencia a la ecuación de equilibrio (Ecuación 145),

$$\frac{Ri}{2} = \left(av + bv^2\right)$$

En la cual v, a y b representan ahora la velocidad media y a y b sus coeficientes; Se observará que no tuvimos en cuenta en absoluto la carga necesaria para la producción de esta velocidad.

No podía ser $\frac{v^2}{2g}$ debido a los fenómenos de contracción; pero este coeficiente que es conocido será sustituido en la siguiente ecuación general:

$$\frac{Ri}{2} = \frac{R}{2\,l}\frac{v^2}{2g\,m^2} + av + bv^2 = \left(\frac{R}{4g\,m^2 l} + b\right)v^2 + av \quad \textbf{Ecuación 149}$$

Siendo **l** la longitud de la tubería.

Por otra parte, se observa que el primer término del multiplicador "$\mathbf{v^2}$" puede despreciarse en al casi todos los casos.

Descripción de los aparatos utilizados en las experiencias de Darcy.

Concepto de línea piezométrica o de carga.

Los siguientes razonamientos van a permitirnos comprender la disposición adoptada por *Darcy* para sus experiencias.

Supongamos un depósito con un nivel invariable H y una conducción horizontal con diámetro constante, conectada en el fondo y totalmente abierta en su extremo y que definimos como tramo AB, según se muestra en la Ilustración 54.

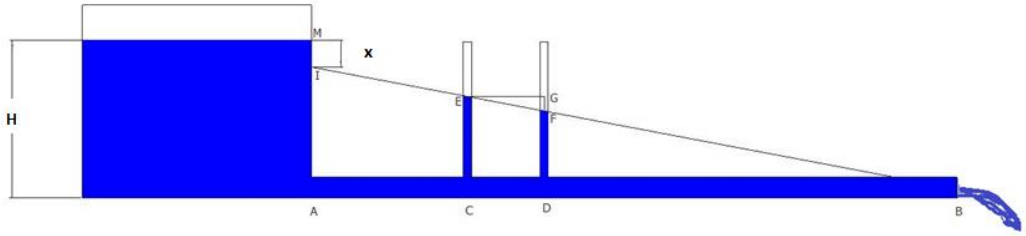


Ilustración 54. Concepto de línea piezométrica

El agua entra en la tubería con velocidad v y a consecuencia de la contracción de la vena líquida, hay una pérdida de carga debido a esta velocidad de:

$$\frac{v^2}{2gm^2} = x \qquad \text{Ecuación 150}$$

en donde m es el coeficiente de contracción del agua al entrar en la tubería, lo que indica que la línea de carga caerá rápidamente de M a I, y la diferencia H - x expresa claramente la parte de la carga absorbida por la fricción.

En consecuencia, si se adopta, a partir de la letra M, una altura igual a x, y si unimos el punto I, colocado, esta distancia del punto M, con la extremidad del conjunto, la línea IB (línea piezométrica) representaría la fricción que el fluido aún tiene que superar para llegar a B con la velocidad v.

La presión en un punto C de la conducción es pues representada por la columna de agua CE; la presión hasta el punto D es representada por la columna de agua DF.

La vertical FG representa la caída de C en D, es decir la carga absorbida para mantener el movimiento uniforme del líquido sobre la porción CD del tubo.

Si se adaptan a los puntos C y D de la conducción dos tubos flexibles bastante largos para que pueda juntar las partes superiores sobre una tabla vertical, el agua se elevará en estos puntos flexibles los niveles representados por los puntos E y F; se verá inmediatamente la diferencia de estos dos niveles, y, si la tabla vertical lleva una graduación, conoceremos inmediatamente la altura FG, es decir la pérdida de carga correspondiente a la longitud CD de la conducción.

El aparato que se acaba de describir lleva el nombre de piezómetro diferencial, y fue el que usó *Darcy* en sus experiencias sobre el flujo del agua en las conducciones.

Por lo general no tiene en cuenta las pérdidas producidas por la contracción del líquido en la entrada de la tubería y la destrucción de la velocidad de salida, en caso de que en vez de que sea salida libre a la atmósfera, sea a la entrada de un depósito receptor. Ambas pérdidas son insensibles con respecto a la pérdida de presión debido a la fricción cuando la longitud de la tubería es significativa.

Descripción de las experiencias de Darcy.

Los razonamientos y cálculos del párrafo precedente servirán para comprender fácilmente la disposición adoptada por *Darcy* para sus experiencias.

Han sido ejecutadas en las dependencias de los depósitos de *Chaillot* alimentados por el agua del *Sena* mediante bombas.

Gracias a estos depósitos elevados se disponía a la vez de grandes volúmenes de agua y de fuertes cargas; los aparatos de experimentación propiamente dichos (Ilustración 55), se encontraban en las partes bajas, cerca de las orillas del *Sena*.

De los tanques de agua llegaban a un cilindro tendido a través de una línea de gran diámetro, que fue variado tanto en la carga y flujo a través de un grifo más o menos estrangulando el paso.

El agua a los depósitos llegaba mediante un cilindro tumbado “a” por una conducción de gran diámetro, que se hacía variar a la vez la carga y el caudal mediante un grifo estrangulando más o menos el paso.

El cilindro desempeñaba el papel de depósito de alimentación para la conducción a experimentar, estaba lleno de un líquido animado de una baja velocidad y con una carga más o menos fuerte, según la altura del depósito superior con el que comunicaba y según el estrangulamiento producido por el grifo.

El cilindro fue destinado a amortiguar la velocidad del agua antes de su entrada a las conducciones; en el interior había colocado un diafragma formado de una placa de chapa perforada por agujeros; en la parte delantera, acababa con una placa vertical en fundición; en el cual se practicaba orificios circulares destinados a recibir el origen de las conducciones que habia que experimentar. En su parte más alta, el cilindro llevaba un grifo para la evacuación del aire.

Se apoyaba además un grifo 5 en el cual se atornillaba un tubo flexible o piezómetro; el nivel el cual el agua ascendía en este tubo medía la presión.

Un poco después del origen m de la conducción, se encontraba una segunda válvula en el piezómetro 4; la diferencia de los piezómetros 5 y 4 daba la pérdida de carga debida a la contracción de la vena en su entrada en la conducción.

A unos 5 metros más adelante, se encontraba el piezómetro 3, que sirve para medir la carga en el punto donde el movimiento comenzaba realmente a ser uniforme. A 50 metros más adelante, se encontraban el grifo y el piezómetro n° 2.

Por último, a 50 metros más allá se encontraban el grifo y el piezómetro n° 1. La diferencia de nivel entre los piezómetros 3 y 1 daba la pérdida de carga producida por el rozamiento en la conducción en una longitud de 100 metros.

Más allá del piezómetro 1, la conducción se prolongaba por varios metros y llevaba una válvula de compuerta V; que se abrió en un recipiente b, de la que el agua fluyó a través de una muesca o vertedero en tanques de calibre d; el nivel de agua en el tanque b fue dada por un tubo indicador de vidrio unido a este tanque.

Las conducciones fueron puestas sobre dados de piedra muy sólidos, con una pendiente ligera dirigida en sentido opuesto por el movimiento, con el fin de permitir una emisión fácil del aire en el momento de la postura en carga (Debaube, 1875).

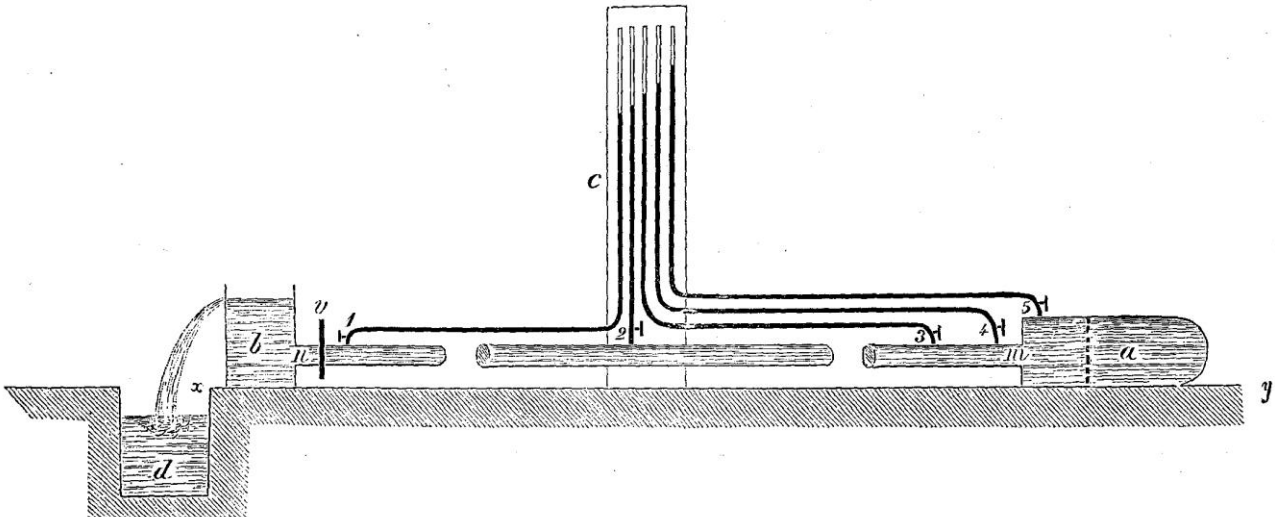


Ilustración 55. Disposición de las instalaciones para los experimentos de Darcy.

La pérdida de carga en la conducción, sobre una longitud de 100 metros, fue dada por la diferencia de las alturas de piezómetros 1 y 3. A primera vista, según decía Darcy, el piezómetro 2 del medio no parece necesario, pero este prestó grandes servicios durante los experimentos acusando las perturbaciones que habrían viciado las experiencias y que no podríamos esbozar si no hubiéramos tenido bien esta supervisión adicional.

De hecho, para asegurarse de que todo estaba funcionando correctamente, era necesario que las diferencias entre el primer y el segundo y entre el segundo y tercer medidor fueran más o menos iguales.

Cualquier variación en el diámetro medio de la conducción, ascendente o descendente, podía causar una ligera diferencia, pero en este caso, la diferencia debía siempre producirse en el mismo sentido para todas las cargas. Cuando estas condiciones no se habían cumplido, se veía obligado, o reparar las fugas, o de hacer varias maniobras para purgar el aire de la conducción.

Para las tuberías de plomo, los manómetros fueron colocados a 25 metros uno del otro; se operaba, pues, en una longitud de 50 metros; la única conducción de vidrio puesta en experiencia tenía 44 metros de longitud.

Las uniones de las tuberías fueron hechas con sumo cuidado, a fin de no presentar ningún saliente en el interior; cualquier fuga y cualquier filtración eran inmediatamente reparada antes de la experiencia.

Era muy difícil, al comienzo de una serie de experiencias, llegar a expulsar el aire de los tubos de piezométricos: se había obligado a dejar correr el agua durante mucho tiempo a plena carga y se reconocía que toda irregularidad había desaparecido cuando las diferencias eran iguales entre los piezométricos 1 y 2, 2 y 3.

El diámetro medio de la conducción puesta en experiencia se deducía del volumen de agua que hacía falta para rellenar sobre su longitud entera.

Las experiencias se refirieron a 22 tubos diferentes:

- 3 tubos de hierro estirado de diámetros entre 12 y 39 mm.
- 3 tubos de plomo estirado de diámetros entre 14 y 41 mm.
- 4 tubos de chapa y betún estirado de diámetros entre 26 y 285 mm.
- 1 tubos de vidrio estirado de diámetro de 500 mm.
- 11 tubos de fundición estirado de diámetros entre 36 y 500 mm.

Los resultados de las experiencias han sido resumidos por *Darcy* en una serie de cuadros que le permitieron establecer las fórmulas y los coeficientes prácticos que anteriormente hemos reproducido.

Darcy calculó la distribución de las velocidades en las secciones de las conducciones mediante un tubo de *Pitot* muy delgado, que introducia en el mismo a una profundidad variable.

La fórmula *Maurice Lévy* (1867) está de acuerdo con los resultados experimentales de *Darcy*, que es una fórmula empírica para determinar la velocidad del agua a

presión dentro de las conducciones donde se relaciona la velocidad, el diámetro interior y la pérdida de carga unitaria de las tuberías.

Se utiliza para tuberías rugosas, con diámetros inferiores a 0,500 m y agua a presión y se representa por:

$$V = C\sqrt{\frac{D}{2}\left(1+3\frac{D}{2}\right)\sqrt{j}}$$ **Ecuación 151**

Donde:

C = 36,4 para tuberías de fundición nuevas.

C = 20,5 para tuberías de fundición en pleno servicio.

C = 26 para tubos de acero soldado, en pleno servicio.

V = Velocidad del agua.

D = Diámetro de la tubería

j = Pérdida de carga unitaria.

Resultado de las experiencias.

En este apartado *Darcy* da los resultados de las experiencias realizadas por medio de las veintidós tuberías de conducción, indicando el estado, la naturaleza y el diámetro.

Los veintidós tubos sometidos a pruebas vienen en el siguiente cuadro recordatorio:

NUMÉROS D'ORDRE.	DIAMÈTRES.		NATURE DES TUYAUX.	OBSERVATIONS.
	mèt.			
1	0,0122	3	Fer étiré.	
2	0,0266			
3	0,0395			
4	0,014	3	Plomb.	
5	0,027			
6	0,041			
7	0,0268	4	Tôle et bitume.	
8	0,0826			
9	0,196			
10	0,285			
11	0,04968	1	Verre.	
12	0,0359	11	Fonte.	
13	0,0364			
14	0,0795			
15	0,0801			
16	0,0819			
17	0,137			
18	0,188			
19	0,2432			
20	0,2447			
21	0,297			
22	0,50			
		22		

Tabla 69. Tubos sujetos a las experiencias de Darcy.

Determinación del diámetro

Lo primero que hizo fue determinar los diámetros de los tubos para evitar errores, subsanando las posibles desviaciones ocasionadas por la fabricación o por los depósitos acumulados durante años, en aquellos tubos que estuvieron es servicio durante años y que fueron integrados dentro de sus experiencias.

Los métodos utilizados para deducir los diámetros se describen a continuación:

<u>Primer método</u>

Consiste en evaluar el volumen de agua que contienen.

Este volumen de agua fue soltado desde un tanque de sección en planta definida (Ilustración 56), colocado en el ático de las máquinas de *Chaillot*, y en las que las tuberías estaban dispuestas verticalmente por fracciones de longitud de valor 10.

En cada operación tenía en cuenta la disminución observada en el depósito, y el producto de la suma de estas disminuciones sucesivas por la sección del depósito daba un volumen que, dividido por la longitud total de la conducción sometida a la experiencia, permitía obtener la sección media y, como consecuencia, el diámetro medio del tubo.

Los diámetros de los tubos 1, 2 y 3 de hierro estirado, los 7 y 8 de chapa con asfalto y el 11 de vidrio fueron evaluados por este método.

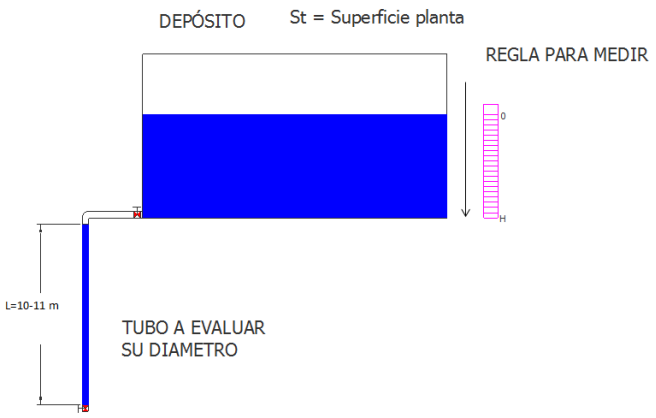


Ilustración 56. Dispositivo para evaluar el diámetro (primer método).

CONDUITE DE 0m,0122 (N° 1).

SUPERFICIE DU BASSIN DE JAUGE = 0m,00787.

NUMÉROS D'ORDRE.	NIVEAU DE L'EAU dans LE BASSIN DE JAUGE. Au commencement du remplissage.	A la fin du remplissage.	DIFFÉRENCE.	LONGUEUR des tuyaux.
	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
1	0,000	0,149	0,149	10,686
2	0,149	0,314	0,155	10,550
3	0,314	0,464	0,150	10,505
4	0,464	0,630	0,166	10,917
5	0,630	0,789	0,159	10,635
6	0,789	0,954	0,165	11,024
7	0,954	1,120	0,166	10,730
8	1,120	1,264	0,144	10,657
9	1,264	1,440	0,176	11,060
10	1,440	1,603	0,163	10,708
	TOTAUX.....		1,603	107,472

La section du tuyau $= \frac{1,603 \times 0,00787}{107,472} = 0,000,117$, laquelle correspond à un diamètre de 0m,0122.

CONDUITE DE 0m,0266 (N° 2).

SUPERFICIE DU BASSIN DE JAUGE = 0m,00787.

1	2,400	1,690	0,710	9,914
2	1,690	0,975	0,715	10,295
3	0,975	0,281	0,694	9,812
4	2,400	1,686	0,714	9,933
5	1,686	1,038	0,648	9,290
6	1,038	0,305	0,733	10,468
7	2,400	1,692	0,708	9,956
8	1,692	0,998	0,694	9,845
9	0,998	0,320	0,678	9,900
10	1,250	0,559	0,691	9,408
	TOTAUX.....		6,985	98,821

La section du tuyau $= \frac{6,985 \times 0,00787}{98,821} = 0,000,556$, laquelle correspond à un diamètre de 0m,0266.

CONDUITE DE 0m,0395 (N° 3).

SUPERFICIE DU BASSIN DE JAUGE = 0m,00787.

NUMÉROS D'ORDRE.	NIVEAU DE L'EAU dans LE BASSIN DE JAUGE. Au commencement du remplissage.	A la fin du remplissage.	DIFFÉRENCE.	LONGUEUR des tuyaux.
	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
1 et 3	1,270	0,565	0,705	5,037
2	0,810	0,220	0,590	3,835
4	2,020	1,413	0,607	3,822
5	1,443	0,840	0,603	3,866
6	1,438	0,832	0,606	3,827
7	0,840	0,260	0,580	3,790
8	2,057	1,438	0,619	3,699
9	0,851	0,267	0,584	3,887
10	1,413	0,810	0,603	3,755
11	1,416	0,797	0,619	3,799
12	0,832	0,230	0,602	3,824
13	2,027	1,429	0,598	3,873
14	2,048	1,443	0,605	3,862
15	1,980	0,390	0,590	3,865
16	1,420	0,810	0,610	3,850
17	1,429	0,851	0,578	3,944
18	1,390	0,817	0,573	3,790
19	2,025	1,410	0,615	3,827
20	0,817	0,207	0,610	3,831
21	2,170	1,551	0,619	3,857
22	2,008	1,416	0,592	3,892
23	0,797	0,250	0,547	3,668
24	1,551	0,933	0,618	3,808
25	0,810	0,210	0,600	3,707
26	2,022	1,420	0,602	3,706
27	0,933	0,340	0,593	3,869
28	1,410	0,838	0,572	3,878
29	0,838	0,220	0,618	3,823
	TOTAUX.....		16,858	107,991

La sect. du tuyau $= \frac{16,858 \times 0,00787}{107,991} = 0,001,2285$, laquelle correspond à un diamètre de 0m,0395.

CONDUITES N°s 4, 5, 6 (0m,014; 0m,027; 0m,041).

Les tuyaux composant ces conduites étant en plomb refoulé, ne pouvaient donner lieu à aucune incertitude sur l'uniformité de leur diamètre. Ils n'ont donc été soumis à aucun procédé particulier de mesurage.

Tabla 70. Evaluación del diámetro de los tubos: primer método.

Segundo método

Por medición directa del diámetro. Este método se utilizó en los tubos 4, 5, 6 de contenido de plomo, que tenían un diámetro perfectamente determinado.

Los diámetros de los tubos de los números 10 (chapa y betún), y los 16, 17, 18, 21, 22 de fundición, también se obtuvieron utilizando mediciones directas, pero a diferencia de los anteriores, en estos se medía el diámetro en los dos extremos.

La medición se determinaba con la ayuda de un compás de puntas encorvadas, similar al de la (Ilustración 57), midiendo cada extremo de las tuberías.

Ilustración 57. Compás de puntas encorvadas.

En la siguiente tabla, extraída de la Memoria de *Darcy*, solo se mostrarán los resultados de los tubos números 10 y 16:

NUMÉROS d'ordre.	DIAMÈTRES. À UN BOUT. Maximum.	À UN BOUT. Minimum.	À L'AUTRE BOUT. Maximum.	À L'AUTRE BOUT. Minimum.
	CONDUITE N° 10.			
	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
1	0,278	0,275	0,277	0,277
2	0,294	0,293	0,280	0,279
3	0,294	0,293	0,279	0,276
4	0,291	0,290	0,280	0,280
5	0,293	0,289	0,280	0,279
6	0,294	0,292	0,283	0,276
7	0,292	0,290	0,283	0,277
8	0,293	0,291	0,280	0,279
9	0,295	0,291	0,279	0,277
10	0,293	0,293	0,281	0,277
11	0,292	0,291	0,278	0,274
12	0,291	0,289	0,279	0,277
13	0,291	0,288	0,278	0,273
14	0,291	0,289	0,279	0,277
15	0,292	0,289	0,278	0,277
16	0,293	0,289	0,280	0,276
17	0,290	0,289	0,277	0,272
18	0,292	0,288	0,279	0,273
19	0,291	0,290	0,280	0,280
20	0,292	0,291	0,281	0,278
21	0,292	0,290	0,282	0,279
22	0,292	0,287	0,282	0,280
23	0,290	0,287	0,282	0,279
24	0,296	0,293	0,280	0,277
25	0,294	0,291	0,283	0,278
26	0,294	0,292	0,282	0,277
27	0,292	0,292	0,279	0,279
28	0,292	0,292	0,276	0,272
29	0,292	0,290	0,283	0,280
30	0,292	0,292	0,281	0,278
31	0,292	0,292	0,282	0,278
32	0,296	0,294	0,285	0,280
33	0,295	0,292	0,280	0,280
34	0,295	0,292	0,282	0,276
35	0,290	0,286	0,282	0,280
36	0,296	0,294	0,281	0,280
37	0,292	0,291	0,279	0,276
38	0,292	0,289	0,279	0,275
39	0,294	0,292	0,278	0,276
40	0,293	0,290	0,282	0,280
41	0,292	0,291	0,292	0,287
	11,985	11,899	11,503	11,381

TOTAL GÉNÉRAL.. 46,768,

lequel divisé par 164 donne pour diamètre moyen 0m,285.

NUMÉROS d'ordre.	DIAMÈTRES. À UN BOUT.	À L'AUTRE BOUT.
	CONDUITE N° 16.	
	mèt.	mèt.
1	0,081	0,081
2	0,082	0,082
3	0,082	0,081
4	0,084	0,081
5	0,081	0,081
6	0,082	0,081
7	0,083	0,081
8	0,084	0,081
9	0,084	0,080
10	0,084	0,079
11	0,085	0,082
12	0,085	0,080
13	0,085	0,080
14	0,082	0,080
15	0,084	0,079
16	0,084	0,080
17	0,081	0,080
18	0,083	0,080
19	0,085	0,081
20	0,084	0,079
21	0,082	0,081
22	0,081	0,082
23	0,082	0,080
24	0,085	0,081
25	0,084	0,080
26	0,084	0,079
27	0,082	0,082
28	0,084	0,080
29	0,084	0,079
30	0,085	0,080
31	0,085	0,079
32	0,085	0,080
33	0,084	0,081
34	0,084	0,081
35	0,085	0,080
36	0,084	0,079
37	0,084	0,080
38	0,084	0,080
39	0,082	0,078
40	0,084	0,080
41	0,085	0,080
42	0,084	0,080
43	0,084	0,079
44	0,084	0,081
	3,676	3,531

TOTAL GÉNÉRAL.. 7,207,

lequel divisé par 88 donne pour le diamètre moyen 0m,0819.

Tabla 71. Evaluación del diámetro de los tubos: segundo método.

Tercer método

Este método lo utilizó *Darcy* cuando el diámetro de algunas tuberías era demasiado grande de modo que se podía utilizar fácilmente este método, o cuando se trataba de tubos recubiertos de depósitos, en los que los diámetros se midieron por medio de la capacidad total de los tubos, al estar empleados estos últimos, o sea, en carga.

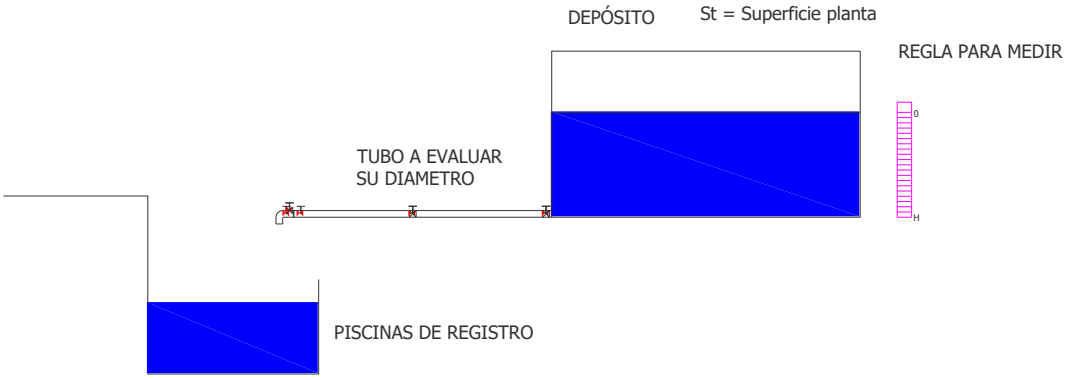


Ilustración 58. Dispositivo para evaluar el diámetro (tercer método).

Se operó de esta manera con las conducciones de chapa con asfalto nº 9, y con las tuberías de fundición 12, 13, 14, 15, 19 y 20.

He aquí cómo se ejecutaba esta medición (Ilustración 58):

1º. Se hacía desmontar el tubo extremo, es decir el tubo contiguo al depósito alimentario situado en la cabeza de la conducción, y hacia el cual fue dirigida la pendiente, de tal manera que el agua fluyera plenamente.

Durante esta primera operación se mantiene cerrada la posición de la válvula de compuerta en el otro extremo del conducto, aguas abajo del cilindro vertical situado hacia las piscinas de registro: este cilindro vertical establecido era previamente rellenado de agua.

2º. Se taponó luego el extremo anterior de la conducción, teniendo cuidado de adaptar al tapón un tubo curvado con llave en el extremo para que el aire se escapara

durante el llenado que estaba teniendo lugar, mediante el cilindro vertical, por la apertura de la válvula de compuerta.

Se tuvo mucho cuidado en observar exactamente la altura del agua en el segundo cilindro, para un segundo control.

En el centro de la tubería se colocaba siempre una válvula para facilitar el escape del aire.

3º. Cuando la válvula compuerta del origen se abría; dos observadores situados en medio y a la extremidad de la conducción, cerca del tapón, cerraban los grifos de aire tan pronto como aparecía el agua. Se bajaba entonces la válvula de compuerta, y de la disminución del agua en el cilindro vertical deducíamos la capacidad de la conducción y como consecuencia su diámetro medio.

Las conducciones objeto de cálculo de este grupo presentaban en sus elementos irregularidades tales, que a *Darcy* le pareció adecuado, presentar el volumen de cada grupo binario de tuberías, así como el diámetro medio de cada uno de estos grupos.

Presentó los resultados que daban las medidas directas para evaluar el estrechamiento de los tubos.

- Conducción de 0,0795 m. N.º 14
- Conducción de 0,0801 m N.º 15 (N.º 14 limpiadas)
- Conducción de 0,2432 m N.º 19
- Conducción de 0,2447 m N.º 20 (N.º 19 limpiadas)

Es a través de esta serie de procesos que *Darcy* llegó con la mayor exactitud a la determinación de los diámetros indicados en el principio de este capítulo.

Las siguientes tablas muestran los detalles de las operaciones.

A continuación, se expone la tabla que muestra los detalles de las operaciones realizadas por *Darcy*.

NUMÉROS DES TUYAUX.	LONGUEUR REMPLIE.	CYLINDRE DE JAUGE. ABAISSEMENT de l'eau dans ce cylindre.	DIAMÈTRE.	SECTION.	SECTION DES TUYAUX.	DIAMÈTRES cherchés.
	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.		mèt.
12	108,862	1,38	0,319	0,0799	$\frac{0,0799 \times 1,38}{108,862} = 0,001,013$	0,0359
13	108,862	1,42	0,319	0,0799	$\frac{0,0799 \times 1,42}{108,862} = 0,001,042$	0,0364
14	109,450	0,265	1,615	2,0485	$\frac{2,0485 \times 0,265}{109,450} = 0,004,96$	0,0795
15	109,450	0,269	1,615	2,0485	$\frac{2,0485 \times 0,269}{109,450} = 0,005,035$	0,0801
19	108,186	2,454	1,615	2,0485	$\frac{2,0485 \times 2,454}{108,186} = 0,046,466$	0,2432
20	108,186	2,484	1,615	2,0485	$\frac{2,0485 \times 2,484}{108,186} = 0,047$	0,2447

Tabla 72. Evaluación del diámetro de los tubos: tercer método.

Determinación de la relación entre las pendientes, la velocidad media y el diámetro de las conducciones.

Para completar todos los elementos para la comprensión de los cálculos a los cuales estas experiencias dieron lugar, *Darcy* expuso un cuadro indicativo de las distancias comprendidas entre el depósito y los diferentes manómetros, ya mencionadas en párrafos anteriores.

TUYAUX. DIAMÈTRE.	TUYAUX. NATURE.	Nos D'ORDRE.	Entre le cylindre d'arrivée et le 1er manomètre.	Entre le 1er et le 2e manomètre.	Entre le 2e et le 3e manomètre.	Entre le 3e et le 4e manomètre.	Entre le 4e manomètre et le cylindre réservoir.
mèt.			mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
0,0122	Fer étiré.	1	8,13	50,00	50,00	5,883	0,167
0,0266		2	8,35	50,00	50,00	4,805	0,30
0,0395		3	8,40	50,00	50,00	4,67	0,29
0,014	Plomb.	4	0,32	25,00	25,00	1,41	0,71
0,027		5	0,34	25,00	25,00	1,50	0,70
0,041		6	0,35	25,00	25,00	1,50	0,70
0,0268	Tôle et bitume.	7	8,19	50,00	50,00	4,85	0,30
0,0826		8	6,27	50,00	50,00	4,72	0,28
0,196		9	6,54	50,00	50,00	4,477	0,33
0,285		10	6,374	50,00	50,00	4,705	0,315
0,04968	Verre.	11	»	21,57	23,29	»	»
0,0359	Fonte.	12	8,785	50,00	50,00	5,21	0,285
0,0364		13	8,785	50,00	50,00	5,21	0,285
0,0795		14	6,73	50,00	50,00	4,74	0,18
0,0801		15	6,73	50,00	50,00	4,74	0,18
0,0819		16	6,59	50,00	50,00	4,716	0,28
0,137		17	6,297	50,00	50,00	4,73	0,45
0,188		18	6,78	50,00	50,00	4,293	0,30
0,2432		19	6,912	50,00	50,00	4,17	0,276
0,2447		20	6,912	50,00	50,00	4,17	0,276
0,29705		21	6,27	50,00	50,00	4,765	0,30
0,50		22	6,353	50,00	50,00	4,70	0,30

Tabla 73. Distancias entre depósito y manómetros o piezómetros.

Comenzó primero por buscar las relaciones que vinculan entre sí las pendientes, las velocidades y los diámetros.

Para lograr este objetivo, presentó para cada conducto una tabla que muestra el número de cargas dadas por metros y velocidades en metros por segundo correspondientes.

Para obtener las pendientes o cargas por metro procedió de la siguiente manera:

Los divisores, representan la distancia que existe entre el primer y tercer manómetro, el segundo manómetro se colocaba entre el estos dos.

Para las conducciones de plomo 4, 5 y 6 las pendientes se obtendrán dividiendo por 50 la diferencia entre la distancia de los manómetros primero y tercero.

Para la conducción 11 de vidrio, el divisor se hará 44,86 m, ya que, en la conducción de vidrio, solamente, la distancia del 1r al 2do manómetro era 21,57 m. u del 2do al 3er, de 23,29 m., de forma que:

Total: 21,57 m + 23,29 m = 44,86 m, para todas las demás conducciones, él divisor será 100,00 m.

Las diferencias entre los manómetros considerados para deducir las pérdidas de carga vienen reflejadas en las tablas de las páginas 46 a 61 de la Memoria de *Darcy* (*Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux*), que no se reproducirán en esta tesis, pero que sin embargo se extrae de ellas los datos más importantes para poder continuar con la exposición de las experiencias de *Darcy* y las conclusiones a las que llegó.

A continuación, el resumen de las diferencias entre los manómetros 1º y 3º, las distancias correspondientes y las pendientes deducidas en hoja Excel, para contrastarlas con las que expuso en sus tablas:

CONDUCCION D=0,0122 M EN HIERRO ESTIRADO			
NUMERO	DIF. CARGA ENTRE 1º Y 3º	DISTANCIA ENTRE 1º Y 3º PIEZOMETRO	CALCULO DE LAS PENDIENTES HIDRÁULICAS
1	0,085	100	0,00085
2	0,184	100	0,00184
3	0,304	100	0,00304
4	0,533	100	0,00533
5	0,754	100	0,00754
6	1,659	100	0,01659
7	2,58	100	0,0258
8	3,472	100	0,03472
9	4,399	100	0,04399
10	0,264	100	0,00264
11	8,544	100	0,08544
12	17,862	100	0,17862
13	34,426	100	0,34426

CONDUCCION D=0,0266 M EN HIERRO ESTIRADO			
NUMERO	DIF. CARGA ENTRE 1º Y 3º	DISTANCIA ENTRE 1º Y 3º PIEZOMETRO	CALCULO DE LAS PENDIENTES HIDRÁULICAS
14	0,033	100	0,00033
15	0,152	100	0,00152
16	0,487	100	0,00487
17	1,015	100	0,01015
18	1,937	100	0,01937
19	3,126	100	0,03126
20	4,348	100	0,04348
21	6,316	100	0,06316
22	10,022	100	0,10022
23	10,571	100	0,10571
24	17,826	100	0,17826
25	25,601	100	0,25601
26	30,952	100	0,30952

CONDUCCION D=0,0395 M EN HIERRO ESTIRADO			
NUMERO	DIF. CARGA ENTRE 1º Y 3º	DISTANCIA ENTRE 1º Y 3º PIEZOMETRO	CALCULO DE LAS PENDIENTES HIDRÁULICAS
27	0,022	100	0,00022
28	0,078	100	0,00078
29	0,182	100	0,00182
30	0,336	100	0,00336
31	0,65	100	0,0065
32	1,286	100	0,01286
33	2,389	100	0,02389
34	3,123	100	0,03123
35	4,348	100	0,04348
36	12,315	100	0,12315
37	17,553	100	0,17553
38	22,408	100	0,22408

Tabla 74. Resumen de distancias entre piezómetros y pendientes deducidas para conducciones de hierro estirado.

CONDUCCION D=0,014 M EN PLOMO			
NUMERO	DIF. CARGA ENTRE 1º Y 3º	DISTANCIA ENTRE 1º Y 3º PIEZOMETRO	CALCULO DE LAS PENDIENTES HIDRÁULICAS
39	0,032	50	0,00064
40	0,168	50	0,00336
41	0,431	50	0,00862
42	1,263	50	0,02526
43	3,073	50	0,06146
44	5,719	50	0,11438
45	8,074	50	0,16148

CONDUCCION D=0,027 M EN PLOMO			
NUMERO	DIF. CARGA ENTRE 1º Y 3º	DISTANCIA ENTRE 1º Y 3º PIEZOMETRO	CALCULO DE LAS PENDIENTES HIDRÁULICAS
46	0,022	50	0,00044
47	0,15	50	0,00300
48	0,407	50	0,00814
49	1,134	50	0,02268
50	2,718	50	0,05436
51	5,25	50	0,10500
52	7,316	50	0,14632

CONDUCCION D=0,041 M EN PLOMO			
NUMERO	DIF. CARGA ENTRE 1º Y 3º	DISTANCIA ENTRE 1º Y 3º PIEZOMETRO	CALCULO DE LAS PENDIENTES HIDRÁULICAS
53	0,041	50	0,00082
54	0,181	50	0,00362
55	0,389	50	0,00778
56	1,155	50	0,02310
57	2,800	50	0,05600
58	5,537	50	0,11074
59	7,940	50	0,15880

Tabla 75. Resumen de distancias entre piezómetros y pendientes deducidas para conducciones de plomo.

CONDUCCION D=0,268 M EN CHAPA DE METAL Y BETÚN			
NUMERO	DIF. CARGA ENTRE 1º Y 3º	DISTANCIA ENTRE 1º Y 3º PIEZOMETRO	CALCULO DE LAS PENDIENTES HIDRÁULICAS
60	0,0220	100	0,00022
61	0,0670	100	0,00067
62	0,2245	100	0,00225
63	0,6090	100	0,00609
64	1,1330	100	0,01133
65	2,1150	100	0,02115
66	3,0350	100	0,03035
67	4,5400	100	0,04540
68	11,8460	100	0,11846
69	17,9850	100	0,17985
70	24,4190	100	0,24419
71	30,7140	100	0,30714

CONDUCCION D=0,0826 M EN CHAPA DE METAL Y BETÚN			
NUMERO	DIF. CARGA ENTRE 1º Y 3º	DISTANCIA ENTRE 1º Y 3º PIEZOMETRO	CALCULO DE LAS PENDIENTES HIDRÁULICAS
72	0,0270	100	0,00027
73	0,0660	100	0,00066
74	0,2050	100	0,00205
75	0,6290	100	0,00629
76	1,2200	100	0,01220
77	2,2850	100	0,02285
78	3,1070	100	0,03107
79	4,0700	100	0,04070
80	7,1700	100	0,07170
81	10,654	100	0,10654
82	13,880	100	0,13880
83	15,605	100	0,15605

CONDUCCION D=0,196 M EN CHAPA DE METAL Y BETÚN			
NUMERO	DIF. CARGA ENTRE 1º Y 3º	DISTANCIA ENTRE 1º Y 3º PIEZOMETRO	CALCULO DE LAS PENDIENTES HIDRÁULICAS
83	0,0200	100	0,00020
84	0,0480	100	0,00048
85	0,1290	100	0,00129
86	0,3300	100	0,00330
87	0,5800	100	0,00580
88	1,1900	100	0,01190
89	1,2000	100	0,01200
90	2,1000	100	0,02100
91	2,9700	100	0,02970
92	3,6400	100	0,03640
93	12,156	100	0,12156
94	15,605	100	0,15605

CONDUCCION D=0,285 M EN CHAPA DE METAL Y BETÚN			
NUMERO	DIF. CARGA ENTRE 1º Y 3º	DISTANCIA ENTRE 1º Y 3º PIEZOMETRO	CALCULO DE LAS PENDIENTES HIDRÁULICAS
95	0,0700	100	0,00070
96	0,2550	100	0,00255
97	0,4330	100	0,00433
98	0,6850	100	0,00685
99	1,1900	100	0,01190
100	2,0440	100	0,02044
101	2,8080	100	0,02808

Tabla 76. Resumen de distancias entre piezómetros y pendientes deducidas para conducciones de chapa metálica y betún.

CONDUCCION D=0,04968 M EN VIDRIO			
NUMERO	DIF. CARGA ENTRE 1º Y 3º	DISTANCIA ENTRE 1º Y 3º PIEZOMETRO	CALCULO DE LAS PENDIENTES HIDRÁULICAS
102	0,0430	44,86	0,00096
103	0,1550	44,86	0,00346
104	0,3460	44,86	0,00771
105	1,0400	44,86	0,02318
106	2,5850	44,86	0,05762
107	5,0200	44,86	0,11190

Tabla 77. Resumen de distancias entre piezómetros y pendientes deducidas para conducciones de vidrio.

CONDUCCION D=0,0359 M EN FUNDICIÓN			
NUMERO	DIF. CARGA ENTRE 1º Y 3º	DISTANCIA ENTRE 1º Y 3º PIEZOMETRO	CALCULO DE LAS PENDIENTES HIDRÁULICAS
108	0,025	100	0,00025
109	0,071	100	0,00071
110	0,183	100	0,00183
111	0,670	100	0,00670
112	1,525	100	0,01525
113	3,240	100	0,03240
114	4,155	100	0,04155

CONDUCCION D=0,0364 M EN FUNDICIÓN			
NUMERO	DIF. CARGA ENTRE 1º Y 3º	DISTANCIA ENTRE 1º Y 3º PIEZOMETRO	CALCULO DE LAS PENDIENTES HIDRÁULICAS
115	0,071	100	0,00071
116	0,18	100	0,0018
117	0,661	100	0,00661
118	1,441	100	0,01441
119	3,018	100	0,03018
120	3,966	100	0,03966
121	4,65	100	0,0465

CONDUCCION D=0,0795 M EN FUNDICIÓN			
NUMERO	DIF. CARGA ENTRE 1º Y 3º	DISTANCIA ENTRE 1º Y 3º PIEZOMETRO	CALCULO DE LAS PENDIENTES HIDRÁULICAS
122	0,065	100	0,00065
123	0,250	100	0,0025
124	0,725	100	0,00725
125	1,610	100	0,0161
126	3,100	100	0,031
127	4,535	100	0,04535

CONDUCCION D=0,0801 M EN FUNDICIÓN			
NUMERO	DIF. CARGA ENTRE 1º Y 3º	DISTANCIA ENTRE 1º Y 3º PIEZOMETRO	CALCULO DE LAS PENDIENTES HIDRÁULICAS
128	0,084	100	0,00084
129	0,294	100	0,00294
129 bis	0,723	100	0,00723
130	0,737	100	0,00737
131	1,557	100	0,01557
132	2,938	100	0,02938
133	4,475	100	0,04475

Tabla 78. Resumen de distancias entre piezómetros y pendientes deducidas para conducciones de fundición.

CONDUCCION D=0,0819 M EN FUNDICIÓN			
NUMERO	DIF. CARGA ENTRE 1ª Y 3ª	DISTANCIA ENTRE 1ª Y 3ª PIEZOMETRO	CALCULO DE LAS PENDIENTES HIDRÁULICAS
134	0,0200	100	0,00020
135	0,0830	100	0,00083
136	0,2320	100	0,00232
137	0,5310	100	0,00531
138	1,0200	100	0,0102
139	2,2550	100	0,02255
140	5,2060	100	0,05206
141	4,0415	100	0,040415
142	9,5470	100	0,09547
143	9,9040	100	0,09904
144	11,9780	100	0,11978
145	16,8070	100	0,16807
146	17,0720	100	0,17072

CONDUCCION D=0,137 M EN FUNDICIÓN			
NUMERO	DIF. CARGA ENTRE 1ª Y 3ª	DISTANCIA ENTRE 1ª Y 3ª PIEZOMETRO	CALCULO DE LAS PENDIENTES HIDRÁULICAS
147	0,0240	100	0,00024
148	0,0870	100	0,00087
149	0,2090	100	0,00209
150	0,4750	100	0,00475
151	1,2600	100	0,01260
152	2,2250	100	0,02225
153	3,3180	100	0,03318
154	3,9050	100	0,03905
155	9,8520	100	0,09852
156	16,756	100	0,16756

CONDUCCION D=0,137 M EN FUNDICIÓN			
NUMERO	DIF. CARGA ENTRE 1ª Y 3ª	DISTANCIA ENTRE 1ª Y 3ª PIEZOMETRO	CALCULO DE LAS PENDIENTES HIDRÁULICAS
147	0,0240	100	0,00024
148	0,0870	100	0,00087
149	0,2090	100	0,00209
150	0,4750	100	0,00475
151	1,2600	100	0,01260
152	2,2250	100	0,02225
153	3,3180	100	0,03318
154	3,9050	100	0,03905
155	9,8520	100	0,09852
156	16,756	100	0,16756

CONDUCCION D=0,188 M EN FUNDICIÓN			
NUMERO	DIF. CARGA ENTRE 1ª Y 3ª	DISTANCIA ENTRE 1ª Y 3ª PIEZOMETRO	CALCULO DE LAS PENDIENTES HIDRÁULICAS
157	0,0270	100	0,00027
158	0,1750	100	0,00175
159	0,3680	100	0,00368
160	0,8050	100	0,00805
161	1,3400	100	0,01340
162	2,2500	100	0,02250
163	3,8100	100	0,03810
164	10,9800	100	0,10980
165	14,5910	100	0,14591

Tabla 79. Resumen de distancias entre piezómetros y pendientes deducidas para conducciones de fundición nueva.

CONDUCCION D=0,2432 M EN FUNDICIÓN				CONDUCCION D=0,2447 M EN FUNDICIÓN			
NUMERO	DIF. CARGA ENTRE 1º Y 3º	DISTANCIA ENTRE 1º Y 3º PIEZOMETRO	CALCULO DE LAS PENDIENTES HIDRÁULICAS	NUMERO	DIF. CARGA ENTRE 1º Y 3º	DISTANCIA ENTRE 1º Y 3º PIEZOMETRO	CALCULO DE LAS PENDIENTES HIDRÁULICAS
166	0,0940	100	0,00094	174	0,0520	100	0,00052
167	0,2020	100	0,00202	175	0,1650	100	0,00165
168	0,4730	100	0,00473	176	0,4980	100	0,00498
169	1,1500	100	0,01150	177	1,1550	100	0,01155
170	2,2900	100	0,02290	178	2,0350	100	0,02035
171	3,2000	100	0,03200	179	2,7350	100	0,02735
172	4,1050	100	0,04105	180	3,7300	100	0,03730
173	13,9810	100	0,13981	181	11,3430	100	0,11343

CONDUCCION D=0,297 M EN FUNDICIÓN				CONDUCCION D=0,500 M EN FUNDICIÓN			
NUMERO	DIF. CARGA ENTRE 1º Y 3º	DISTANCIA ENTRE 1º Y 3º PIEZOMETRO	CALCULO DE LAS PENDIENTES HIDRÁULICAS	NUMERO	DIF. CARGA ENTRE 1º Y 3º	DISTANCIA ENTRE 1º Y 3º PIEZOMETRO	CALCULO DE LAS PENDIENTES HIDRÁULICAS
182	0,0280	100	0,00028	190	0,0450	100	0,00045
183	0,1190	100	0,00119	191	0,0450	100	0,00045
184	0,2690	100	0,00269	192	0,0600	100	0,0006
185	0,5370	100	0,00537	193	0,1200	100	0,0012
186	1,1050	100	0,01105	194	0,1250	100	0,00125
187	2,3050	100	0,02305	195	0,2100	100	0,00210
188	3,2050	100	0,03205	196	0,2300	100	0,00230
189	4,0700	100	0,0407	197	0,2600	100	0,00260
				198	0,2500	100	0,00250

Tabla 80. Resumen de distancias entre piezómetros y pendientes deducidas para conducciones de fundición nueva (continuación).

A continuación, las tablas extraídas de su Memoria, en las que muestra el número de cargas dadas por metro y las velocidades medias en metros por segundos correspondientes deducidas de sus 198 experiencias:

1° CONDUITES EN FER ÉTIRÉ.

N^os D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,0122 (1). Pentes.	Vitesses.	N^os D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,0266 (2). Pentes.	Vitesses.	N^os D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,0395 (3). Pentes.	Vitesses.	OBSERVATIONS.
	mèt.	mèt.		mèt.	mèt.		mèt.	mèt.	
1	0,00085	0,0344	14	0,00033	0,0578	27	0,00022	0,0626	(1) Voy. planche V.
2	0,00184	0,0718	15	0,00152	0,1310	28	0,00078	0,1112	(2) *Ibid.* (3) *Ibid.*
3	0,00304	0,1170	16	0,00487	0,2480	29	0,00182	0,1848	
4	0,00533	0,1470	17	0,01015	0,3680	30	0,00336	0,2616	
5	0,00754	0,1690	18	0,01937	0,5220	31	0,00650	0,3817	
6	0,01650	0,2300	19	0,03126	0,6670	32	0,01286	0,5594	
7	0,02580	0,2870	20	0,04348	0,7960	33	0,02389	0,7878	
8	0,03472	0,3430	21	0,06316	0,9610	34	0,03123	0,9149	
9	0,04399	0,3920	22	0,10022	1,2350	35	0,04348	1,0951	
10	0,06264	0,4780	23	0,10571	1,2810	36	0,12315	1,9205	
11	0,08554	0,5730	24	0,17826	1,6820	37	0,17553	2,3055	
12	0,17862	0,8460	25	0,25601	1,9980	38	0,22408	2,5971	
13	0,34426	1,1950	26	0,30952	2,1840				

Tabla 81. Pendientes hidráulicas por metro y las velocidades medias para conducciones de hierro estirado

2° CONDUITES EN PLOMB.

N^os D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,014 (1). Pentes.	Vitesses.	N^os D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,027 (2). Pentes.	Vitesses.	N^os D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,041 (3). Pentes.	Vitesses.	OBSERVATIONS.
	mèt.	mèt.		mèt.	mèt.		mèt.	mèt.	
39	0,00064	0,040	46	0,00044	0,065	53	0,00082	0,120	(1) Voy. planche V.
40	0,00336	0,165	47	0,00300	0,188	54	0,00362	0,276	(2) *Ibid.*
41	0,00862	0,246	48	0,00814	0,322	55	0,00778	0,488	(3) *Ibid.*
42	0,02526	0,446	49	0,02268	0,597	56	0,02310	0,792	
43	0,06146	0,732	50	0,05436	1,021	57	0,05600	1,316	
44	0,11438	1,048	51	0,10500	1,438	58	0,11074	1,925	
45	0,16148	1,290	52	0,14632	1,679	59	0,15880	2,305	

Tabla 82. Pendientes hidráulicas por metro y las velocidades medias para conducciones de plomo.

3° CONDUITES EN TÔLE ET BITUME.

Nos D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,0268 (1).		Nos D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,0826 (2).		Nos D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,196 (3).		Nos D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,285 (4).		OBSERVATIONS.
	Pentes.	Vitesses.		Pentes.	Vitesses.		Pentes.	Vitesses.		Pentes.	Vitesses.	
	mèt.	mèt.		mèt.	mèt.		mèt.	mèt.		mèt.	mèt.	
60	0,00022	0,030	72	0,00027	0,100	84	0,00020	0,180	95	0,00070	0,395	(1) Voy. pl. VI.
61	0,00067	0,092	73	0,00066	0,176	85	0,00048	0,278	96	0,00255	0,848	(2) *Ibid.*
62	0,00225	0,155	74	0,00203	0,357	86	0,00129	0,466	97	0,00433	1,179	(3) *Ibid.*
63	0,00609	0,271	75	0,00629	0,665	87	0,00330	0,780	98	0,00685	1,494	(4) *Ibid.*
64	0,01133	0,384	76	0,01220	0,950	88	0,00580	1,076	99	0,01190	2,034	
65	0,02115	0,567	77	0,02285	1,354	89	0,01190	1,657	100	0,02044	2,698	
66	0,03035	0,678	78	0,03107	1,613	90	0,01200	1,679	101	0,02807	3,207	
67	0,04540	0,853	79	0,04070	1,874	91	0,02100	2,259				
68	0,11846	1,467	80	0,07170	2,572	92	0,02970	2,743				
69	0,17985	1,859	81	0,10654	3,211	93	0,03640	3,052				
70	0,24419	2,203	82	0,13880	3,668	94	0,12156	6,010				
71	0,30714	2,507	83	0,15605	3,897							

Tabla 83. Pendientes hidráulicas por metro y las velocidades medias para conducciones de chapa metálica y betún.

4° CONDUITE EN VERRE.

NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,04968 (1).		OBSERVATIONS.
	PENTES.	VITESSES.	
	mèt.	mèt.	
102	0,00096	0,153	(1) Voyez la planche VI.
103	0,00345	0,312	
104	0,00771	0,485	
105	0,02318	0,893	
106	0,05762	1,478	
107	0,11191	2,108	

Tabla 84. Pendientes hidráulicas por metro y las velocidades medias para conducciones de vidrio.

5° CONDUITES EN FONTE.

Numéros d'ordre des expériences.	Chargée de dépôts. Diamètre de 0m,0359 (1). Pentes.	Vitesses.	Numéros d'ordre des expériences.	La même nettoyée. Diamètre de 0m,0364 (2). Pentes.	Vitesses.	Numéros d'ordre des expériences.	Chargée de dépôts. Diamètre de 0m,0795 (3). Pentes.	Vitesses.	Numéros d'ordre des expériences.	La même nettoyée. Diamètre de 0m,0801 (4). Pentes.	Vitesses.	Observations.
	mèt.	mèt.		mèt.	mèt.		mèt.	mèt.		mèt.	mèt.	
108	0,00025	0,051	115	0,00071	0,113	122	0,00065	0,123	128	0,00084	0,193	(1) Voy. pl. VI.
109	0,00071	0,081	116	0,00180	0,188	123	0,00250	0,251	129	0,00294	0,385	(2) *Ibid.*
110	0,00183	0,130	117	0,00651	0,387	124	0,00725	0,446	129 *bis.*	0,00723	0,614	(3) *Ibid.*
111	0,00670	0,253	118	0,01441	0,601	125	0,01618	0,678	130	0,00737	0,624	(4) *Ibid.*
112	0,01525	0,381	119	0,03018	0,892	126	0,03100	0,931	131	0,01557	0,864	
113	0,03240	0,551	120	0,03966	1,034	127	0,04535	1,142	132	0,02938	1,248	
114	0,04153	0,633	121	0,04650	1,126				133	0,04473	1,526	

Tabla 85. Pendientes hidráulicas por metro y las velocidades medias para conducciones de fundición.

6° CONDUITES EN FONTE NEUVE.

N^os d'ordre des expériences.	Diamètre de 0m,0819 (1). Pentes.	Vitesses.	N^os d'ordre des expériences.	Diamètre de 0m,137 (2). Pentes.	Vitesses.	N^os d'ordre des expériences.	Diamètre de 0m,188 (3). Pentes.	Vitesses.	Observations.
	mèt.	mèt.		mèt.	mèt.		mèt.	mèt.	
134	0,00020	0,088	147	0,00024	0,149	157	0,00027	0,205	(1) Voy. pl. VI.
135	0,00083	0,171	148	0,00087	0,298	158	0,00175	0,497	(2) Voy. pl. VII.
136	0,00232	0,358	149	0,00209	0,488	159	0,00368	0,758	(3) *Ibid.*
137	0,00531	0,561	150	0,00475	0,763	160	0,00805	1,128	
138	0,01020	0,791	151	0,01260	1,279	161	0,01340	1,488	
139	0,02255	1,185	152	0,02250	1,714	162	0,02250	1,933	
140	0,03208	1,418	153	0,03318	2,098	163	0,03810	2,506	
141	0,04042	1,571	154	0,03905	2,281	164	0,10980	4,323	
142	0,09547	2,453	155	0,09852	3,640	165	0,14591	4,928	
143	0,09904	2,487	156	0,16756	4,693				
144	0,11978	2,720							
145	0,16807	3,238							
146	0,17072	3,265							

Tabla 86. Pendientes hidráulicas por metro y las velocidades medias para conducciones de fundición nueva.

7° CONDUITES EN FONTE.

NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	CHARGÉE DE DÉPÔTS. DIAMÈTRE DE 0m,2432 (1).		NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	LA MÊME NETTOYÉE. DIAMÈTRE DE 0m,2447 (2).		NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	BIEN NETTOYÉE. DIAMÈTRE DE 0m,297 (3).		NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	NEUVE. DIAMÈTRE DE 0m,50 (4).		OBSERVATIONS.
	Pentes.	Vitesses.		Pentes.	Vitesses.		Pentes.	Vitesses.		Pentes.	Vitesses.	
	mèt.	mèt.		mèt.	mèt.		mèt.	mèt.		mèt.	mèt.	
166	0,00094	0,307	174	0,00052	0,278	182	0,00028	0,244	190	0,00045	0,4207	(1) Voy. pl. VII.
167	0,00202	0,452	175	0,00165	0,537	183	0,00119	0,538	191	0,00045	0,4488	(2) *Ibid.*
168	0,00473	0,707	176	0,00498	0,949	184	0,00269	0,823	192	0,00060	0,4752	(3) *Ibid.*
169	0,01150	1,106	177	0 01155	1,420	185	0,00537	1,155	193	0,00120	0,7932	(4) *Ibid.*
170	0,02290	1,547	178	0,02035	1,904	186	0,01105	1,652	194	0,00125	0,7951	
171	0,0320	1,833	179	0,02735	2,206	187	0,02305	2,390	195	0,00210	1,0412	
172	0,04105	2,073	180	0,03730	2,572	188	0,03205	2,799	196	0,00230	1,1135	
173	0,13981	3,833	181	0,11343	4,497	189	0,04070	3,160	197	0,00260	1,1197	
									198	0,00250	1,1278	

Tabla 87. Pendientes hidráulicas por metro y las velocidades medias para conducciones de fundición.

En presencia de los resultados tan variados que estas tablas muestran, no sólo con respecto a las pendientes o cargas que ascienden desde 0,00022 hasta 0,34426 por metro, y las velocidades que se extienden entre 0,0344 y 6,01 m por segundo, pero con respecto a la naturaleza de los tubos y de sus superficies, *Darcy* cuestionaba si: ¿debíamos preguntarnos si la fórmula única de *Prony* respondía a todos los casos, como él mismo lo suponía?

Ante la simple inspección de los resultados relativos a las conducciones de 0,0359m y 0,0364 m, de 0,0795m y 0,0801 m, de 0,2433 m y 0,2447 demuestra que, cuando los tubos son recubiertos con un baño ligero y calcáreo, la velocidad media disminuye muy notablemente.

Los coeficientes de la fórmula de *Prony*, lejos de ser constantes, deberían pues variar muy notablemente con el estado de las superficies. En las siguientes tablas, que presentó en el informe,

- Las velocidades deducidas de la fórmula de *Prony* con las dadas por la experiencia,
- Las cargas derivadas de la misma fórmula, y correspondiente a las velocidades experimentales con las pendientes que produjeron a estas últimas.

Muestran las coincidencias y las desviaciones de la conocida fórmula (Ecuación 135):

CONDUITES EN FER ÉTIRÉ.

DIAMÈTRE DE 0m,0122.				DIAMÈTRE DE 0m,0266.				DIAMÈTRE DE 0m,0395.			
PENTES par mètre.	VITESSES expéri-mentales.	FORMULE DE PRONY. Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	FORMULE DE PRONY. Vitesse correspondant à la pente expérimentale.	PENTES par mètre.	VITESSES expéri-mentales.	FORMULE DE PRONY. Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	FORMULE DE PRONY. Vitesse correspondant à la pente expérimentale.	PENTES par mètre.	VITESSES expéri-mentales.	FORMULE DE PRONY. Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	FORMULE DE PRONY. Vitesse correspondant à la pente expérimentale.
mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
0,00085	0,0344	0,00026	0,065	0,00033	0,0578	0,00035	0,06	0,00022	0,0626	0,00023	0,06
0,00184	0,0718	0,00095	0,105	0,00152	0,1310	0,00122	0,15	0,00078	0,1112	0,00062	0,125
0,00304	0,1170	0,00233	0,14	0,00487	0,2480	0,00392	0,28	0,00182	0,1818	0,00152	0,20
0,00533	0,1470	0,00305	0,19	0,01015	0,3680	0,00814	0,415	0,00336	0,2616	0,00284	0,285
0,00754	0,1690	0,00426	0,23	0,01937	0,5220	0,01552	0,58	0,00650	0,3817	0,00576	0,37
0,01659	0,2300	0,00734	0,355	0,03126	0,6670	0,02525	0,75	0,01286	0,5594	0,01204	0,58
0,02580	0,2870	0,01125	0,45	0,04348	0,7960	0,03561	0,885	0,02389	0,7878	0,02339	0,80
0,03472	0,3430	0,01515	0,53	0,06316	0,9610	0,05077	1,07	0,03123	0,9149	0,03109	0,915
0,04399	0,3920	0,01957	0,595	0,10022	1,2350	0,08310	1,36	0,04348	1,0951	0,04524	1,085
0,06264	0,4780	0,02905	0,715	0,10571	1,2810	0,08914	1,395	0,12315	1,9205	0,13338	1,84
0,08554	0,5730	0,04033	0,84	0,17826	1,6820	0,15218	1,82	0,17553	2,3055	0,19142	2,205
0,17862	0,8460	0,08633	1,225	0,25601	1,9980	0,21469	2,185	0,22408	2,5971	0,24294	2,50
0,34426	1,1950	0,16984	1,71	0,30952	2,1840	0,25456	2,405				

Tabla 88. Comparativa de las velocidades dadas por la experiencia y la fórmula de Prony para conducciones de hierro estirado.

CONDUITES EN PLOMB.

DIAMÈTRE DE 0m,014.				DIAMÈTRE DE 0m,027.				DIAMÈTRE DE 0m,041.			
PENTES par mètre.	VITESSES expérimentales.	FORMULE DE PRONY. Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	FORMULE DE PRONY. Vitesse correspondant à la pente expérimentale.	PENTES par mètre.	VITESSES expérimentales.	FORMULE DE PRONY. Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	FORMULE DE PRONY. Vitesse correspondant à la pente expérimentale.	PENTES par mètre.	VITESSES expérimentales.	FORMULE DE PRONY. Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	FORMULE DE PRONY. Vitesse correspondant à la pente expérimentale.
mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
0,00064	0,040	0,00037	0,06	0,00044	0,065	0,00039	0,07	0,00082	0,120	0,00069	0,13
0,00336	0,165	0,00351	0,16	0,00300	0,188	0,00236	0,22	0,00362	0,276	0,00314	0,30
0,00862	0,246	0,00720	0,27	0,00814	0,322	0,00610	0,37	0,00778	0,488	0,00899	0,45
0,02526	0,446	0,02191	0,48	0,02268	0,597	0,02011	0,64	0,02310	0,792	0,02254	0,80
0,06146	0,732	0,05663	0,76	0,05436	1,021	0,05630	1,00	0,05600	1,316	0,06098	1,26
0,11438	1,048	0,11491	1,05	0,10500	1,438	0,11067	1,40	0,11074	1,925	0,12906	1,78
0,16148	1,290	0,17197	1,25	0,14632	1,679	0,14993	1,66	0,15680	2,305	0,18439	2,135

Tabla 89. Comparativa de las velocidades dadas por la experiencia y la fórmula de Prony para conducciones de plomo.

CONDUITES EN TÔLE ET BITUME.

DIAMÈTRE DE 0m,268.				DIAMÈTRE DE 0m,0826.				DIAMÈTRE DE 0m,196.				DIAMÈTRE DE 0m,285.			
PENTE par mètre.	VITESSES EXPÉRIMENTALES.	FORMULE DE PRONY. Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	FORMULE DE PRONY. Vitesse correspondant à la pente expérimentale.	PENTE par mètre.	VITESSES EXPÉRIMENTALES.	FORMULE DE PRONY. Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	FORMULE DE PRONY. Vitesse correspondant à la pente expérimentale.	PENTE par mètre.	VITESSES EXPÉRIMENTALES.	FORMULE DE PRONY. Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	FORMULE DE PRONY. Vitesse correspondant à la pente expérimentale.	PENTE par mètre.	VITESSES EXPÉRIMENTALES.	FORMULE DE PRONY. Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	FORMULE DE PRONY. Vitesse correspondant à la pente expérimentale.
mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
0,00022	0,030	0,00012	0,045	0,00027	0,100	0,00025	0,10	0,00020	0,180	0,00029	0,14	0,00070	0,395	0,00086	0,35
0,00067	0,092	0,00066	0,09	0,00066	0,176	0,00070	0,175	0,00048	0,278	0,00065	0,235	0,00255	0,848	0,00374	0,70
0,00225	0,155	0,00164	0,185	0,00203	0,357	0,00249	0,32	0,00129	0,466	0,00171	0,40	0,00433	1,179	0,00709	0,92
0,00609	0,271	0,00449	0,32	0,00629	0,665	0,00801	0,585	0,00330	0,780	0,00460	0,66	0,00685	1,494	0,01121	1,16
0,01133	0,384	0,00849	0,44	0,01220	0,950	0,01602	0,84	0,00580	1,076	0,00860	0,88	0,01190	2,084	0,02064	1,535
0,02115	0,567	0,01836	0,61	0,02285	1,354	0,03187	1,14	0,01190	1,657	0,02017	1,27	0,02044	2,698	0,03629	2,02
0,03035	0,678	0,02567	0,74	0,03107	1,613	0,04507	1,355	0,01200	1,679	0,02065	1,275	0,02807	3,207	0,05127	2,37
0,04540	0,853	0,03975	0,91	0,04070	1,874	0,06054	1,53	0,02100	2,259	0,03710	1,69				
0,11846	1,467	0,11612	1,49	0,07170	2,572	0,11355	2,04	0,02970	2,743	0,05433	2,02				
0,17985	1,859	0,18463	1,84	0,10654	3,211	0,1762	2,49	0,03640	3,052	0,07264	2,24				
0,24419	2,203	0,25727	2,14	0,13880	3,668	0,2301	2,845	0,12156	6,010	0,25865					
0,30714	2,507	0,33397	2,405	0,15605	3,897	0,2596									

Tabla 90. Comparativa de las velocidades dadas por la experiencia y la fórmula de Prony para conducciones de chapa y betún.

CONDUITE EN VERRE.

DIAMÈTRE DE 0m,04968.				OBSERVATIONS.
		FORMULE DE PRONY.		
PENTE par mètre.	VITESSES expérimentales.	Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	Vitesse correspondant à la pente expérimentale.	
mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	
0,00096	0,153	0,00084	0,16	
0,00345	0,312	0,00312	0,325	
0,00771	0,485	0,00727	0,50	
0,02318	0,893	0,02351	0,885	
0,05762	1,478	0,06349	1,41	
0,11191	2,108	0,12778	1,97	

Tabla 91. Comparativa de las velocidades dadas por la experiencia y la fórmula de Prony para conducciones de vidrio.

CONDUITES EN FONTE.

CHARGÉE DE DÉPÔTS.				LA MÊME NETTOYÉE.				CHARGÉE DE DÉPÔTS.				LA MÊME NETTOYÉE.			
DIAMÈTRE DE 0m,359.				DIAMÈTRE DE 0m,0364.				DIAMÈTRE DE 0m,0795.				DIAMÈTRE DE 0m,0801.			
		FORMULE DE PRONY.				FORMULE DE PRONY.				FORMULE DE PRONY.				FORMULE DE PRONY.	
PENTE par mètre.	VITESSES EXPÉRIMENTALES.	Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	Vitesse correspondant à la pente expérimentale.	PENTE par mètre.	VITESSES EXPÉRIMENTALES.	Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	Vitesse correspondant à la pente expérimentale.	PENTE par mètre.	VITESSES EXPÉRIMENTALES.	Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	Vitesse correspondant à la pente expérimentale.	PENTE par mètre.	VITESSES EXPÉRIMENTALES.	Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	Vitesse correspondant à la pente expérimentale.
mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
0,00025	0,051	0,00019	0,06	0,00071	0,113	0,00067	0,115	0,00065	0,123	0,00036	0,17	0,00084	0,193	0,00079	0,195
0,00071	0,081	0,00040	0,115	0,00180	0,188	0,00174	0,195	0,00250	0,251	0,00131	0,35	0,00294	0,385	0,00291	0,385
0,00183	0,130	0,00090	0,195	0,00651	0,387	0,00656	0,39	0,00725	0,446	0,00385	0,62	0,00723	0,614	0,00700	0,62
0,00670	0,253	0,00291	0,39	0,01441	0,601	0,01492	0,59	0,01610	0,678	0,00869	0,93	0,00737	0,624	0,00722	0,625
0,01525	0,381	0,00634	0,60	0,03018	0,892	0,03201	0,865	0,0310	0,931	0,01597	1,305	0,01557	0,864	0,01361	0,92
0,03240	0,551	0,01280	0,89	0,03966	1,034	0,04256	0,995	0,04535	1,142	0,02377	1,585	0,02938	1,248	0,02826	1,275
0,04155	0,633	0,01661	1,01	0,04650	1,126	0,05058	1,08					0,04473	1,526	0,04177	1,58

Tabla 92. Comparativa de las velocidades dadas por la experiencia y la fórmula de Prony para conducciones de fundición.

CONDUITES EN FONTE.

CHARGÉE DE DÉPÔTS.				LA MÊME NETTOYÉE.				BIEN NETTOYÉE.				NEUVE.			
DIAMÈTRE DE 0m,2432.				DIAMÈTRE DE 0m,2447.				DIAMÈTRE DE 0m,297.				DIAMÈTRE DE 0m,50.			
PENTE par mètre.	VITESSES EXPÉRIMENTALES.	FORMULE DE PRONY. Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	FORMULE DE PRONY. Vitesse correspondant à la pente expérimentale.	PENTE par mètre.	VITESSES EXPÉRIMENTALES.	FORMULE DE PRONY. Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	FORMULE DE PRONY. Vitesse correspondant à la pente expérimentale.	PENTE par mètre.	VITESSES EXPÉRIMENTALES.	FORMULE DE PRONY. Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	FORMULE DE PRONY. Vitesse correspondant à la pente expérimentale.	PENTE par mètre.	VITESSES EXPÉRIMENTALES.	FORMULE DE PRONY. Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	FORMULE DE PRONY. Vitesse correspondant à la pente expérimentale.
mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mè .	mèt.
0,00094	0,307	0,00064	0,38	0,00052	0,278	0,00053	0,28	0,00028	0,244	0,00033	0,22	0,00045	0,4207	0,00055	0,38
0,00202	0,452	0,00129	0,57	0,00165	0,537	0,00181	0,515	0,00119	0,538	0,00149	0,48	0,00045	0,4488	0,00063	0,38
0,00473	0,707	0,00309	0,88	0,00498	0,949	0,00541	0,91	0,00269	0,823	0,00334	0,73	0,00060	0,4752	0,00069	0,44
0,01150	1,106	0,00731	1,39	0,01155	1,420	0,01188	1,40	0,00537	1,155	0,00653	1,045	0,00120	0,7932	0,00185	0,63
0,02290	1,547	0,01420	1,975	0,02035	1,904	0,02109	18,6	0,01105	1,652	0,01315	1,51	0,00125	0,7951	0,00187	0,645
0,03200	1,833	0,01970	2,345	0,02735	2,206	0,02831	2,17	0,02305	2,390	0,02735	2,195	0,00210	1,0412	0,00316	0,84
0,04105	2,073	0,02513	2,655	0,03730	2,572	0,03833	2,535	0,03205	2,799	0,03743	2,59	0,00230	1,1135	0,00359	0,88
0,13981	3,833	0,0862		0,11343	4,497	0,1168		0,04076	3,160	0,04772	2,92	0,00250	1,1278	0,00371	0,92

Tabla 93. Comparativa de las velocidades dadas por la experiencia y la fórmula de *Prony* para conducciones de fundición.

CONDUITES EN FONTE NEUVE.

DIAMÈTRE DE 0m,0819.				DIAMÈTRE DE 0m,137.				DIAMÈTRE DE 0m,188.			
PENTES par mètre.	VITESSES expéri-mentales.	FORMULE DE PRONY. Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	FORMULE DE PRONY. Vitesse correspondant à la pente expérimentale.	PENTES par mètre.	VITESSES expéri-mentales.	FORMULE DE PRONY. Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	FORMULE DE PRONY. Vitesse correspondant à la pente expérimentale.	PENTES par mètre.	VITESSES expéri-mentales.	FORMULE DE PRONY. Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	FORMULE DE PRONY. Vitesse correspondant à la pente expérimentale.
mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
0,00020	0,088	0,00021	0,085	0,00240	0,149	0,00030	0,46	0,00027	0,205	0,00039	0,17
0,00083	0,171	0,00063	0,195	0,00870	0,298	0,001066	0,90	0,00175	0,497	0,00204	0,46
0,00232	0,358	0,00251	0,345	0,00209	0,483	0,00259	0,43	0,00368	0,758	0,00456	0,68
0,00531	0,561	0,00581	0,535	0,00475	0,763	0,00626	0,66	0,00805	1,128	0,00988	1,02
0,01020	0,791	0,01128	0,75	0,01260	1,279	0,01731	1,09	0,01340	1,488	0,01700	1,32
0,02255	1,185	0,02489	1,125	0,0225	1,714	0,0306	1,465	0,02250	1,933	0,02831	1,72
0,03208	1,418	0,03550	1,35	0,03318	2,098	0,04590	1,78	0,03810	2,506	0,04742	2,24
0,04042	1,571	0,04325	1,515	0,03905	2,281	0,05401	1,935	0,10980	4,323	0,1393	
0,09547	2,453	0,10417	2,345	0,09852	3,640	0,13750		0,14591	4,928	0,1817	
0,09904	2,487	0,10757	2,385	0,16756	4,693	0,2276					
0,11978	2,720	0,12814	2,63								
0,16807	3,238	0,1810									
0,17072	3,265	0,1842									

Tabla 94. Comparativa de las velocidades dadas por la experiencia y la fórmula de *Prony* para conducciones de fundición nueva.

Darcy comparó los resultados confrontados en los cuadros precedentes, y logró concluir:

Qué el estado de las superficies ejerce una influencia notable sobre el fluir del agua en los tubos de conducción.

Destacó las siguientes observaciones:

Si en efecto nosotros examinamos primero el cuadro relativo al fluir del agua en las conducciones untadas con asfalto, observaremos que los tubos de los diámetros 0,0826 m, 0,196m 0,285 m las velocidades experimentales son muy superiores a las velocidades acusadas por la fórmula de *Prony*.

La relación entre estas velocidades es de hasta 32/23.

El tubo de vidrio dio resultados en la misma dirección; si la diferencia es menor, se deberá valorar la irregularidad del diámetro de este tubo

Si tomamos por el contrario la conducción de diámetro 0,2432, cuyo diámetro después de hacerle una limpieza se ha convertido en 0,2447 m, encontraremos que, para la pendiente de 0,04105 m por metro, la fórmula de *Prony* da para la velocidad 2,655 m/s, mientras que la experiencia indica 2,073 m/s

Si nos vamos de allí a la conducción de 0,2447 limpiada, veremos que la pendiente de 0,03723 por metro, la fórmula de *Prony* da una velocidad de 2,535 m/s y la experiencia 2,573 m/s.

Los tubos de diámetros:

- 0,0359 m recubiertos con depósitos
- 0,0364 limpiados
- 0,0795 recubiertos de depósitos
- 0,0801 limpiados

Ofrecen los mismos resultados.

La primera conclusión parece inmune a cualquier impugnación.

Si examinamos los cuadros de caudales comparativos de los tubos con los diámetros:

0,0122 m 0,0266 m	De diámetro	y	0,137 m 0,188 m 0,279 m 0,50 m	De diámetro

Veremos que, mientras que para los primeros resultados del experimento son notablemente inferiores a los de la fórmula, para este último, por el contrario, los resultados del experimento superan muy ampliamente.

Podemos pues suponer que los volúmenes crecen con los diámetros en una proporción más grande que la asignada por la fórmula; procuraremos determinar la ley de este crecimiento.

Haremos una observación general, es que las tuberías de plomo de 0,014 m, 0,027 m, 0,041 m dan resultados casi idénticos con la fórmula de *Prony*, mientras que las grandes tuberías de fundición nueva de 0,137 m, 0,188 m, 0,50 m presentan, para las mismas pendientes, velocidades considerablemente mayores.

Esto se explica fácilmente decía *Darcy*:

Es en efecto sobre los tubos de un gran grado de pulido y un diámetro similar a mis tuberías de plomo que los sres. *Dubuat* y *Bossut* actuaron; por consiguiente, debía encontrar sus resultados. Es al contrario sobre tubos de grandes diámetros, pero ya recubiertos con depósitos, que ya formaban parte de una distribución existente, en la que *Couplet* operó. Por lo tanto, las resistencias en estos tubos deben ser más altas, como se verá, de hecho, más tarde, a las encontradas en los de diámetro similar sometidos al experimento (Darcy, 1857).

En cuanto al acuerdo juzgado notable por *Prony* entre sus fórmulas y la experiencia cuarenta tres de su cuadro (43), experiencia relativa al tubo de 0,487259 m, proviene

sólo de la compensación que se estableció entre los resultados dados por tubos de pequeño diámetro, pero bien pulidos, y tubos de un gran diámetro, pero que ya habían estado en servicio mucho tiempo.

Determinando en efecto el coeficiente de la resistencia en la fórmula:

$Ri = aV^2$ **Ecuación 152**

1º Para los experimentos realizados por *Dubuat* en un tubo 0,0270699 m de diámetro y 19,9506 m de longitud, y en donde:

A las cargas de Aux charges de	Y a las pendientes de Et aux pentes de	Corresponden las velocidades Correspondent les vitesses
0m,004,060,5	0m,000,203,528	0m,042,956,5
0 ,013,535	0 ,000,678,426	0 ,098,087
0 ,160,525	0 ,008,046,37	0 ,360,522
0 ,210,604	0 ,010,556,1	0 ,408,696
0 ,242,547	0 ,012,157,5	0 ,441,739
0 ,333,502	0 ,016,716,3	0 ,540,870
0 ,370,858	0 ,018,588,9	0 ,565,217
0 ,395,221	0 ,019,809,9	0 ,591,304
0 ,641,558	0 ,032,157,4	0 ,775,652

Tabla 95. Experimento de Dubuat para relacionar cargas, pendientes y velocidades en tuberías de 0,0270699 de diámetro y 19,9506 m de longitud.

Darcy encontró por el método de los Mínimos Cuadrados el valor:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = 34{,}328$$

Darcy justifica dichas cifras mediante la siguiente cita:

“Las cifras de la página siguiente son extractos de las "investigaciones fisicomatemáticas de *Prony*": las cargas totales expresadas en la primera columna deben deducirse las porciones de estas cargas empleadas en la producción de las velocidades: esta deducción es necesaria cuando se trata de tubos de pequeña

longitud. He conservado sin embargo las cifras de *Prony* porque su rectificación no modificaría las cifras lo suficiente para alterar las conclusiones a la que voy a llegar" (Darcy, 1857).

Como comprobación, se ha realizado en esta tesis el cálculo anterior mediante hoja Excel, arrojado un valor de $\frac{1}{\sqrt{a}} = 38{,}159$

Las operaciones previas para el cálculo mediante Excel es el siguiente:

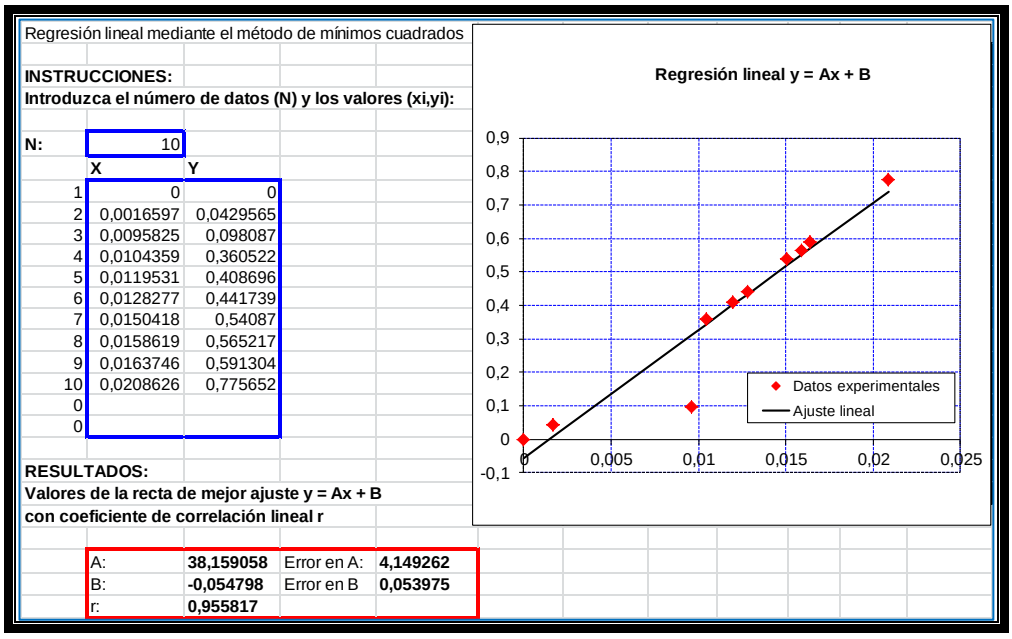
Se despeja la velocidad V de la ecuación (Ecuación 154)

$Ri = aV^2$ **Ecuación 153** → $V = \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{Ri}$ **Ecuación 154**

En donde suponiendo ejes cartesianos se tiene:

$Y = \frac{1}{\sqrt{a}} X$ **Ecuación 155**,

que es la ecuación de una recta que pasa por el origen (Ilustración 59).



Regresión lineal mediante el método de mínimos cuadrados

INSTRUCCIONES:
Introduzca el número de datos (N) y los valores (xi,yi):

N: 10

	X	Y
1	0	0
2	0,0016597	0,0429565
3	0,0095825	0,098087
4	0,0104359	0,360522
5	0,0119531	0,408696
6	0,0128277	0,441739
7	0,0150418	0,54087
8	0,0158619	0,565217
9	0,0163746	0,591304
10	0,0208626	0,775652
0		
0		

RESULTADOS:
Valores de la recta de mejor ajuste y = Ax + B
con coeficiente de correlación lineal r

A:	**38,159058**	Error en A:	**4,149262**
B:	**-0,054798**	Error en B	**0,053975**
r:	**0,955817**		

Ilustración 59. Método de los mínimos cuadrados para deducir $\frac{1}{\sqrt{a}}$ a partir de los experimentos de Dubuat.

2º Para las experiencias hechas por *Couplet*:

1º En un tubo de 0,13535 m de diámetro, previamente establecido, de 3.280,37 m de longitud, para lo cual,

Aux charges de	Et aux pentes de	Correspondent les vitesses
0m,151,132	0m,000,066,274,3	0m,054,416,6
0 ,306,784	0 ,000,134,531	0 ,084,787
0 ,453,422	0 ,000,198,836	0 ,111,685
0 ,570,716	0 ,000,250,275	0 ,130,096
0 ,649,678	0 ,000,284,901	0 ,141,115
0 ,676,749	0 ,000,296,772	0 ,144,068

Tabla 96. Experimento de *Couplet* para relacionar cargas, pendientes y velocidades en tuberías de 0,13535 m de diámetro y 3.280,37 m de longitud.

Darcy también encontró por el método de los Mínimos Cuadrados el valor:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = 30{,}2072$$

Como comprobación (Ilustración 60), se ha realizado en esta tesis el cálculo anterior mediante hoja Excel, arrojando un valor de $\frac{1}{\sqrt{a}} = 32{,}7300$

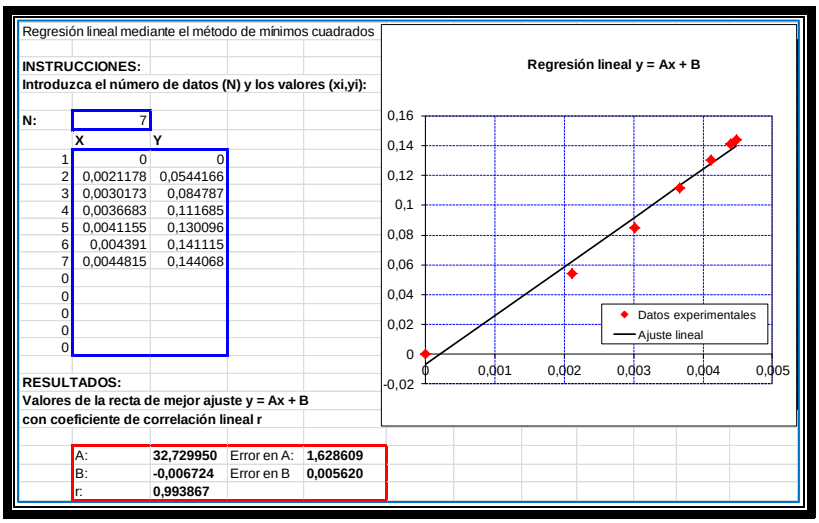


Ilustración 60. Método de los mínimos cuadrados para deducir $\frac{1}{\sqrt{a}}$ a partir de los experimentos de Couplet.

2º en un tubo de diámetro (43º experiencia del cuadro de *Prony*) de 0,487259, de una longitud de 1169,42 m y en el cual a la carga de 3,9279 m correspondió a la velocidad 1,06003, se encontró $\frac{1}{\sqrt{a}} = 37,058$.

Se ve pues que, como consecuencia de las condiciones diversas en las que se coloca el tubo de *Dubuat*, 0,027 de diámetro bien pulido, y al de *Couplet*, de 0,487 m antiguo, se estableció una compensación casi perfecta, ya que el coeficiente de resistencia para uno y otro:

1º 34,328

2º 37,058

Se verá más tarde que los mismos tubos colocados en idénticas condiciones habrían dado para la resistencia:

El 1º, el coeficiente 34,20

La 2ª, el coeficiente 44,10

Prueba nueva de la influencia del diámetro, porque el tubo de plomo estaba, sin duda alguna, con un mayor pulido que el tubo en fundición.

No hace falta señalar todavía que las tablas anteriores justifican completamente la afirmación de que, en diámetros grandes, el tipo de cambio indicado por las fórmulas *Prony* es más baja al que la experiencia indica.

Los coeficientes 34,328, 30,2072, 37,058 dan para las velocidades que corresponden a las velocidades experimentales los números siguientes, a saber:

TUYAUX.					
0m,027		0m,13535		0m,4872	
EXPÉRIENCES.	CALCULS.	EXPÉRIENCES.	CALCULS.	EXPÉRIENCES.	CALCULS.
mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
0,042,956,5	0,056,976,2	0,054,416,6	0,063,899,5	1,060,03	1,060,03
0,098,087	0,104,024	0,084,787	0,091,145,6		
0,360,522	0,358,246	0,111,683	0,110,808,4		
0,408,696	0,410,329	0,130,096	0,124,318		
0,441,739	0,440,356	0,141,115	0,132,639		
0,540,870	0,516,359	0,144,068	0,135,374		
0,565,217	0,544,513				
0,591,304	0,562,112				
0,775,652	0,716,180				
Dubuat.		Couplet.			

Tabla 97. Comparación entre las velocidades dadas por la experiencia y las dadas por la formula en función de los coeficientes $\frac{1}{\sqrt{a}}$

Antes de buscar la ley que vincula la pendiente y las velocidades en cada tubo, haremos una observación, es que, al parecer, cuando se trata de velocidades muy bajas obtenidas en tubos de pequeño diámetro, estas velocidades crecerían en proporción a la pendiente i.

Se observa, por ejemplo, que en el tubo de hierro estirado de 0,0122 m

$$\text{A velocidades}\begin{cases}0{,}0344\ \text{m/s}\\0{,}0718\ \text{m/s}\\0{,}1170\ \text{m/s}\end{cases}\quad\text{Corresponden a las pendientes}\quad\begin{cases}0{,}00085\ \text{m/m}\\0{,}00184\ \text{m/m}\\0{,}00304\ \text{m/m}\end{cases}$$

De donde para las relaciones de las pendientes a las velocidades da:

$$\begin{cases}0{,}024709\\0{,}025627\\0{,}025983\end{cases}$$

Vemos también que para el tubo de chapa y Betún de 0,0268 m.

A velocidades $\begin{cases} 0{,}030 \text{ m/s} \\ 0{,}092 \text{ m/s} \end{cases}$ Corresponden a las pendientes $\begin{cases} 0{,}00022 \text{ m/m} \\ 0{,}00067 \text{ m/m} \end{cases}$

De donde para las relaciones de las pendientes a las velocidades da:

$$\begin{cases} 0{,}007333 \\ 0{,}007283 \end{cases}$$

Igualadas según la vinculación que constituyen la ecuación de una recta que pasa por el origen de coordenadas.

Pero, a partir de las velocidades de 0,10 a 0,12 m/s, esta ley, que se observa en las proximidades del origen de coordenadas, parece detenerse.

Por otra parte, parece desaparecer por completo en las tuberías cubiertas de depósitos.

Así, en tubería de hierro fundido de 0,0359 m, antes de ser limpiadas,

A velocidades $\begin{cases} 0{,}051 \text{ m/s} \\ 0{,}081 \text{ m/s} \end{cases}$ Corresponden a las pendientes $\begin{cases} 0{,}00025 \text{ m/m} \\ 0{,}00071 \text{ m/m} \end{cases}$

De donde para las relaciones de las pendientes a las velocidades da:

$$\begin{cases} 0{,}004902 \\ 0{,}008765 \end{cases}$$

Los puntos aquí pues estarían situados más o menos sobre una parábola producida en su cumbre.

Darcy con estos resultados procuró precisar la influencia ejercida por el estado de las superficies y por los diámetros de las conducciones.

Como ya señaló anteriormente, esto requiere dividir las experiencias por la naturaleza de la conducción y por el diámetro de la tubería, en lugar de reunirlas, como se había hecho hasta ahora, a razón del pequeño número de elementos del que se disponía, y deducir las medias bajo las cuales desaparecen las leyes buscadas.

El gran número de experiencias que presentó en su Memoria le permitió realizar este trabajo, ya que a cada tubo le corresponde una cantidad de datos tales, que es posible sacar con exactitud la Ley de flujo que le es propia.

Comprobó primero si para cada tubo se verifica la relación conocida (Ecuación 145):

$$\frac{Ri}{2} = av + bv^2$$

que se convierte dividendo ambos miembros por R / 2 en:

$$i = Av + Bv^2$$ **Ecuación 156**

Basta para reconocerlo, así como señaló Prony, dividir los dos miembros de esta ecuación por **v**, y considerando " **i/v** " como a una variable z ver si los datos de la cuestión ofrecen, como debería ser en el caso en el que la suposición inicial se basa, en una línea recta para la relación

$$z = A + Bv$$ **Ecuación 157**

Podría hacerse por otra parte que la constante "**A**" fuera igual a cero, o despreciable en ciertas circunstancias,

Es de reconocer debido a la proporcionalidad de la "**z**" con "**v**".

En este caso, es obvio que la parábola correspondiente que representa la ley buscada seria

$$i = Bv^2$$ **Ecuación 158**

Sin embargo, la proporcionalidad sólo era la relación de la diferencia de z con el v correspondiente, a continuación, entonces la parábola se haría

$$i = Av + Bv^2$$ **Ecuación 159**

Las resistencias en este caso crecerían menos rápidamente que en el primero, es decir que el cuadrado de la velocidad.

Por último, si los coeficientes a y b de la fórmula (Ecuación 145) fueran constantes para todos los diámetros y para todos los tubos, así como se había supuesto, se habría obtenido siempre el mismo número dividiendo las diferencias de los z seguidos por las v correspondientes y multiplicando el cociente por R.

Las tablas VII, VIII, IX de la Memoria de *Darcy*, deducidas de los cuadros siguientes, permiten apreciar todas estas hipótesis.

CONDUITES EN FER ÉTIRÉ.

NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,0122 (1).				NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,0266 (2).				NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,0395 (3).			
	PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$.	$\frac{Ri}{v}$.		PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$.	$\frac{Ri}{v}$.		PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$.	$\frac{Ri}{v}$.
	mèt.	mèt.				mèt.	mèt.				mèt.	mèt.		
1	0,00085	0,0344	0,024709	0,000150	14	0,00033	0,0578	0,005709	0,0000759	27	0,00022	0,0626	0,003514	0,0000694
2	0,00184	0,0718	0,025627	0,000156	15	0,00152	0,1310	0,011603	0,000154	28	0,00078	0,1112	0,007014	0,000138
3	0,00304	0,1170	0,025983	0,000158	16	0,00487	0,2480	0,019637	0,000261	29	0,00182	0,1848	0,009848	0,000194
4	0,00533	0,1470	0,036258	0,000221	17	0,01015	0,3680	0,027581	0,000367	30	0,00336	0,2616	0,012844	0,000254
5	0,00754	0,1690	0,044615	0,000272	18	0,01937	0,5220	0,037107	0,000493	31	0,00650	0,3817	0,017029	0,000336
6	0,01659	0,2300	0,072130	0,000440	19	0,03126	0,6670	0,046866	0,000623	32	0,01286	0,5594	0,022988	0,000454
7	0,02580	0,2870	0,089895	0,000548	20	0,04348	0,7960	0,054623	0,000726	33	0,02389	0,7878	0,030324	0,000599
8	0,03472	0,3430	0,101224	0,000617	21	0,06316	0,9610	0,065723	0,000874	34	0,03123	0,9149	0,34200	0,000675
9	0,04399	0,3920	0,112219	0,000684	22	0,10022	1,2350	0,081149	0,001079	35	0,04348	1,0951	0,039704	0,000784
10	0,06264	0,4780	0,131046	0,000799	23	0,10571	1,2810	0,082521	0,001097	36	0,12315	1,9205	0,064123	0,001270
11	0,08554	0,5730	0,149284	0,000911	24	0,17826	1,6820	0,105981	0,001442	37	0,17553	2,3055	0,076135	0,001540
12	0,17862	0,8460	0,211135	0,001290	25	0,25601	1,9980	0,128133	0,001704	38	0,22408	2,5971	0,086281	0,001700
13	0,34426	1,1950	0,288083	0,001757	26	0,30952	2,1840	0,141722	0,001885					

(1, 2, 3) Voyez la planche VII.

Tabla 98. Valores para desarrollar las hipótesis de *Darcy* sobre conducciones de hierro estirado.

CONDUITES EN PLOMB.

NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,014 (1).				NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,027 (2).				NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,041 (3).			
	PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$.	$\frac{Ri}{v}$.		PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$.	$\frac{Ri}{v}$.		PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$.	$\frac{Ri}{v}$.
	mèt.	mèt.				mèt.	mèt.				mèt.	mèt.		
39	0,00064	0,040	0,016000	0,000112	46	0,00044	0,065	0,006769	0,0000914	53	0,00082	0,120	0,006833	0,000140
40	0,00336	0,165	0,020363	0,000142	47	0,00300	0,188	0,015957	0,000215	54	0,00362	0,276	0,013114	0,000269
41	0,00862	0,246	0,035040	0,000245	48	0,00814	0,322	0,025279	0,000341	55	0,00778	0,488	0,015942	0,000327
42	0,02526	0,446	0,056636	0,000396	49	0,02268	0,597	0,037990	0,000512	56	0,02310	0,792	0,029166	0,000598
43	0,06146	0,732	0,083961	0,000588	50	0,05436	1,021	0,053242	0,000719	57	0,05600	1,316	0,042553	0,000872
44	0,11438	1,048	0,109141	0,000764	51	0,10500	1,438	0,073018	0,000986	58	0,11074	1,925	0,057527	0,001179
45	0,16148	1,290	0,125178	0,000876	52	0,14632	1,679	0,087147	0,001175	59	0,15880	2,305	0,068893	0,001412

(1, 2, 3) Voyez la planche VIII.

Tabla 99. Valores para desarrollar las hipótesis de *Darcy* sobre conducciones de plomo.

CONDUITES EN TÔLE ET BITUME.

NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,0268 (1).				NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,0826 (2).				OBSERVATIONS.
	PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$.	$\frac{Ri}{v}$.		PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$.	$\frac{Ri}{v}$.	
	mèt.	mèt.				mèt.	mèt.			
60	0,00022	0,030	0,007333	0,000098	72	0,00027	0,100	0,0027	0,0001115	(1) Voyez pl. VIII.
61	0,00067	0,092	0,007283	0,0000796	73	0,00066	0,176	0,00375	0,000155	(2) *Ibid.*
62	0,00225	0,155	0,014516	0,000194	74	0,00203	9,357	0,005406	0,000223	
63	0,00609	0,271	0,022472	0,000301	75	0,00629	0,665	0,009459	0,000391	
64	0,01133	0,384	0,029505	0,000395	76	0,01220	0,950	0,012842	0,000530	
65	0,02115	0,567	0,037301	0,000500	77	0,02285	1,354	0,016875	0,000698	
66	0,03035	0,678	0,044764	0,000600	78	0,03107	1,613	0,019262	0,000796	
67	0,04540	0,853	0,053224	0,000713	79	0,04070	1,874	0,021718	0,000897	
68	0,11840	1,467	0,080750	0,001082	80	0,07170	2,572	0,027877	0,001151	
69	0,17985	1,859	0,096745	0,001300	81	0,10654	3,211	0,033180	0,001370	
70	0,24419	2,203	0,110844	0,001482	82	0,13880	3,668	0,037840	0,001563	
71	0,30714	2,507	0,122513	0,001642	83	0,15605	3,897	0,040043	0,001654	

Tabla 100. Valores para desarrollar las hipótesis de *Darcy* sobre conducciones de chapa y betún.

CONDUITE EN VERRE.

NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,04968 (1). PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$.	$\frac{Ri}{v}$.	OBSERVATIONS.
	mèt.	mèt.			
102	0,00096	0,153	0,006274	0,000156	(1) Voyez la planche VIII.
103	0,00345	0,312	0,011060	0,000275	
104	0,00771	0,485	0,015900	0,000395	
105	0,02318	0,893	0,025960	0,000645	
106	0,05762	1,478	0,038985	0,000968	
107	0,11191	2,108	0,053088	0,001320	

Tabla 101. Valores para desarrollar las hipótesis de *Darcy* sobre conducciones de vidrio.

CONDUITES EN FONTE.

NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	CHARGÉE DE DÉPÔTS. DIAMÈTRE DE 0m,0359 (1). PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$.	$\frac{Ri}{v}$.	NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	LA MÊME NETTOYÉE. DIAMÈTRE DE 0m,0364 (2). PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$.	$\frac{Ri}{v}$.	OBSERVATIONS.
	mèt.	mèt.				mèt.	mèt.			
108	0,00025	0,051	0,004902	0,00088	115	0,00071	0,113	0,006283	0,000114	(1) Voyez pl. VIII.
109	0,00071	0,081	0,008765	0,000157	116	0,00180	0,188	0,009574	0,000174	(2) *Ibid.*
110	0,00183	0,130	0,014077	0,000253	117	0,00651	0,387	0,016822	0,000305	
111	0,00670	0,253	0,026482	0,000475	118	0,01441	0,601	0,023977	0,000436	
112	0,01525	0,381	0,040026	0,000718	119	0,08018	0,892	0,033834	0,000616	
113	0,03240	0,551	0,058802	0,001056	120	0,03966	1,034	0,038356	0,000698	
114	0,04155	0,633	0,065639	0,001178	121	0,04650	1,126	0,041296	0,000751	

Tabla 102. Valores para desarrollar las hipótesis de *Darcy* sobre conducciones de fundición.

CONDUITES EN FONTE.

NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	CHARGÉE DE DÉPÔTS. DIAMÈTRE DE 0m,0795 (1). PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$.	$\frac{Ri}{v}$.	NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	LA MÊME NETTOYÉE. DIAMÈTRE DE 0m,0801 (2). PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$.	$\frac{Ri}{v}$.	OBSERVATIONS.
	mèt.	mèt.				mèt.	mèt.			
122	0,00065	0,123	0,005284	0,000210	128	0,00084	0,193	0,004652	0,000176	(1) Voir pl. VIII.
123	0,00250	0,251	0,009960	0,000395	129	0,00294	0,385	0,007636	0,000308	(2) *Ibid.*
124	0,00725	0,446	0,016256	0,000645	129 *bis.*	0,00723	0,614	0,011775	0,000475	
125	0,01610	0,678	0,023746	0,000944	130	0,00737	0,624	0,011811	0,000476	
126	0,03100	0,931	0,033298	0,001320	131	0,01557	0,864	0,018025	0,000727	
127	0,04535	1,142	0,039711	0,001576	132	0,02038	1,248	0,023541	0,000950	
					133	0,04473	1,526	0,029312	0,001183	

Tabla 103. Valores para desarrollar las hipótesis de *Darcy* sobre conducciones de fundición (continuación).

CONDUITES EN FONTE NEUVE.

NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,0819 (1). PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$.	$\frac{Ri}{v}$.	NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,137 (2). PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$.	$\frac{Ri}{v}$.	NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,188 (3). PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$.	$\frac{Ri}{v}$.
	mèt.	mèt.				mèt.	mèt.				mèt.	mèt.		
134	0,00020	0,088	0,002273	0,000092	147	0,000240	0,149	0,001611	0,00011	157	0,00027	0,205	0,001348	0,000127
135	0,00083	0,171	0,004854	0,000196	148	0,000870	0,298	0,002919	0,000199	158	0,00175	0,497	0,003521	0,000331
136	0,00232	0,358	0,006480	0,000262	149	0,00209	0,483	0,004327	0,000296	159	0,00368	0,758	0,004855	0,000456
137	0,00531	0,561	0,009465	0,000383	150	0,00475	0,763	0,006225	0,000430	160	0,00805	1,128	0,007136	0,000671
138	0,01020	0,791	0,012895	0,000522	151	0,01260	1,279	0,009851	0,000675	161	0,01340	1,488	0,009005	0,000846
139	0,02255	1,185	0,018987	0,000768	152	0,02250	1,714	0,013127	0,000920	162	0,02250	1,933	0,011640	0,001094
140	0,03208	1,418	0,022623	0,000915	153	0,03318	2,098	0,015815	0,001083	163	0,03810	2,506	0,015238	0,001432
141	0,04042	1,571	0,025728	0,00104	154	0,03905	2,281	0,017119	0,001172	164	0,10980	4,323	0,025399	0,002390
142	0,09547	2,453	0,038819	0,00157	155	0,09852	3,640	0,027065	0,001854	165	0,14591	4,928	0,029608	0,002783
143	0,09904	2,487	0,039823	0,00161	156	0,16756	4,693	0,035704	0,002445					
144	0,11978	2,720	0,044036	0,00178										
145	0,16807	3,238	0,051905	0,002100										
146	0,17072	3,265	0,052188	0,002115										

(1, 2, 3) Voyez la planche IX.

Tabla 104. Valores para desarrollar las hipótesis de *Darcy* sobre conducciones de fundición nueva.

CONDUITES EN FONTE.

NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	CHARGÉE DE DÉPÔTS. DIAMÈTRE DE 0m,2432 (1). PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$.	$\frac{Ri}{v}$.	NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	LA MÊME NETTOYÉE. DIAMÈTRE DE 0m,2447 (2). PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$.	$\frac{Ri}{v}$.	OBSERVATIONS.
	mèt.	mèt.				mèt.	mèt.			
166	0,00094	0,307	0,003062	0,000372	174	0,00052	0,278	0,001828	0,000224	(1) Voyez pl. IX.
167	0,00202	0,452	0,004469	0,000543	175	0,00165	0,537	0,003073	0,000376	(2) *Ibid.*
168	0,00473	0,707	0,006690	0,000813	176	0,00498	0,949	0,005248	0,000642	
169	0,01150	1,106	0,010402	0,001265	177	0,01155	1,420	0,008115	0,000992	
170	0,02290	1,547	0,015112	0,001838	178	0,02035	1,904	0,010688	0,001307	
171	0,03200	1,833	0,017457	0,002123	179	0,02735	2,206	0,012397	0,001516	
172	0,04105	2,073	0,019802	0,002409	180	0,03730	2,572	0,014502	0,001774	
173	0,13981	3,833	0,036475	0,004435	181	0,11343	4,497	0,025223	0,003085	

Tabla 105. Valores para desarrollar las hipótesis de *Darcy* sobre conducciones de fundición.

CONDUITES EN FONTE.

NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	ANCIENNE BIEN NETTOYÉE. DIAMÈTRE DE 0m,297 (1). PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$.	$\frac{Ri}{v}$.	NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	NEUVE. DIAMÈTRE DE 0m,50 (2). PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$.	$\frac{Ri}{v}$.	OBSERVATIONS.
	mèt.	mèt.				mèt.	mèt.			
182	0,0028	0,244	0,001147	0,000170	190	0,00045	0,4207	0,001045	0,000261	(1) Voyez pl. IX.
183	0,00119	0,538	0,002212	0,000328	191	0,00045	0,4480	0,001003	0,000251	(2) *Ibid.*
184	0,00269	0,823	0,003268	0,000485	192	0,00060	0,4752	0,001263	0,000316	
185	0,00537	1,155	0,004649	0,000690	193	0,00120	0,7932	0,001513	0,000378	
186	0,01105	1,652	0,006689	0,000993	194	0,00125	0,7951	0,001572	0,000392	
187	0,02305	2,390	0,009425	0,001400	195	0,00210	1,0412	0,002017	0,000504	
188	0,03205	2,799	0,011450	0,001701	196	0,00230	1,1135	0,002065	0,000516	
189	0,04070	3,160	0,012880	0,001913	198	0,00250	1,1278	0,002217	0,000554	

Tabla 106. Valores para desarrollar las hipótesis de *Darcy* sobre conducciones de fundición.

Se ve:

1º Que para cada tubo las relaciones de las diferencias de z a las v son casi constantes, ya que se obtiene de las líneas rectas, tomando las z para ordenadas y v de abscisas.

Por lo tanto, se llega a la conclusión de que, para cada tubo, la forma de la función (Ecuación 156):

$i = Av + Bv^2$, puede ser adoptada.

Hay una excepción sólo al principio de las coordenadas de los tubos de pequeño diámetro, donde la ley que relaciona las pendientes a las velocidades viene dada por una línea recta.

2º Que, al pasar de un tubo a otro, los valores de a y b en la expresión (Ecuación 145):

$$\frac{Ri}{2} = av + bv^2 ,$$

no son puntos constantes, y que varían con cualquiera de las superficies cuando éste ofrece grados desiguales de pulido o con los radios, cuando las superficies, por el contrario, son casi idénticas.

3º. No obstante, reconocemos, echando la vista en las columnas 1 y 2 de las tablas para tuberías cubiertas de depósitos, 0,0359 m, 0,0795 m y 0,2432 m, las relaciones de:

$$\frac{\frac{i}{v}}{v} = \frac{i}{v^2}$$ **Ecuación 160**, son prácticamente constantes.

De ahí deriva la consecuencia, por lo tanto, que cuanto mayor es el grado de disminución de pulido en las tuberías, más cerca está la relación $\frac{i}{v^2}$ de convertirse en constante, y que la misma relación puede considerarse constante para las tuberías viejas o revestidas de depósitos.

Este experimento demuestra, en primer lugar, que el término v^2 se refiere principalmente a esta parte de la resistencia a destinada a superar las protuberancias dispersas en las superficies; y, en segundo lugar, permite conseguir una expresión muy simple para el movimiento del agua en las tuberías.

La constancia de la relación $\frac{i}{v^2}$ para un diámetro dado da, en efecto, la ley:

$i = B_1 v^2$, correspondiente a la (Ecuación 158).

Sin embargo, como en las distribuciones de agua las tuberías, después de unos pocos años, están recubiertas de depósitos, por lo tanto, se deberá en la práctica recurrir a la fórmula anterior.

Ajustó aún más de cerca las cuestiones que había planteado, para ello, determinó los valores de las cantidades a, b y b_1 en las fórmulas (Ecuación 145) y (Ecuación 161):

$$\frac{Ri}{2} = av + bv^2 \qquad y \qquad \frac{Ri}{2} = b_1 v^2$$ **Ecuación 161**

Y con esos valores hallados trató de presentar:

1) La Ley de la influencia del diámetro en la fórmula, o las curvas formadas por las constantes adoptadas para ordenadas, los diámetros son las abscisas, en las tuberías en superficies también pulidas.
2) El coeficiente de corrección que será importante en la práctica de la aplicación de las fórmulas de las que dio la expresión, o a las tablas que calculó para hacer estas fórmulas o las tablas, obtenidas con tubos nuevos, propios de las tuberías de conducción recubiertos de depósitos.

Para demostrar que la resistencia de las paredes es independiente de la presión que soportaba el líquido en movimiento, se apoyó en los resultados los resultados de los experimentos 12 y 13, cabe destacar:

Para la interpretación de los resultados nos apoyaremos en el siguiente croquis Ilustración 61:

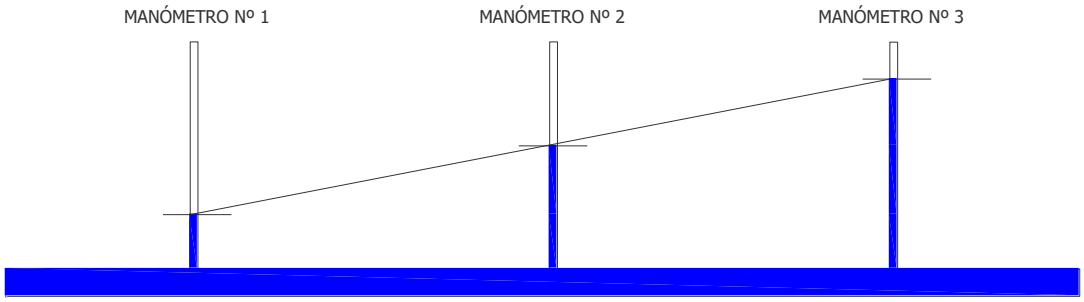


Ilustración 61. Disposición de los manómetros en las experiencias de Darcy para medir las cargas.

EXPERIENCIA 12.

En el manómetro Nº1 la carga fue: 2,41 m

En el manómetro Nº2 la carga fue: 11,321 m

En el manómetro Nº3 la carga fue: 20,283 m

La presión media entre el manómetro N.º 1 y el N.º 2 es de:

$$\frac{11{,}321 + 2{,}421}{2} = 6{,}871 \text{ m}$$

La presión media entre el manómetro N.º 2 y el N.º 3 es de:

$$\frac{11{,}321 + 20{,}283}{2} = 15{,}802 \text{ m}$$

La presión media entre el manómetro N.º 1 y el N.º 2 si añadimos la presión atmosférica es de: 17,201 m.

La presión media entre el manómetro N.º 2 y el N.º 3 si añadimos la presión atmosférica es de: 26,132 m.

EXPERIENCIA 13.

En el manómetro Nº1 la carga fue: 3,291 m

En el manómetro Nº2 la carga fue: 20,437 m

En el manómetro Nº3 la carga fue: 39,308 m

La presión media entre el manómetro N.º 1 y el N.º 2 es de:

$$\frac{3{,}291 + 20{,}437}{2} = 11{,}864 \text{ m}$$

La presión media entre el manómetro N.º 2 y el N.º 3 es de:

$$\frac{20{,}437 + 39{,}308}{2} = 29{,}873 \text{ m}$$

La presión media entre el manómetro N.º 1 y el N.º 2 si añadimos la presión atmosférica es de: 22,194 m.

La presión media entre el manómetro N.º 2 y el N.º 3 si añadimos la presión atmosférica es de: 40,202 m.

Destacó que:

1º Que en la experiencia 12 las presiones de la 1ª y de la 2ª parte del tubo tienen entre ellas la relación de 17/26.

2º Que en la experiencia 13 esta relación es de 22/40

Observó resultados similares en las experiencias 24, 25, 26, etc y, en general, en todas las anteriormente descritas, pero se limitó a las más características.

Sin embargo, si las resistencias dependiesen de la presión, como la misma cantidad de agua fluye en cada parte de tubo, es evidente que los manómetros no acusarían en un punto las mismas diferencias de cargas para vencer los rozamientos en una y otra parte, mientras que las diferencias son:

1º Para el experimento 12, entre $\begin{cases} 1^{er} \text{ y el } 2^{do} \text{ manómetro} \rightarrow 8{,}90 \text{ m} \\ 2^{do} \text{ y el } 3^{er} \text{ manómetro} \rightarrow 8{,}96 \text{ m} \end{cases}$

2º Para el experimento 13, entre $\begin{cases} 1^{er} \text{ y el } 2^{do} \text{ manómetro} \rightarrow 17{,}46 \text{ m} \\ 2^{do} \text{ y el } 3^{er} \text{ manómetro} \rightarrow 17{,}28 \text{ m} \end{cases}$

Luego, no se puede guardar ninguna duda sobre la verdad del principio enunciado.

Realizó aún otras dos experiencias que conducen, de otra manera, al mismo resultado.

Colocó una válvula de cierre en la extremidad de la conducción de 0,0266 m; de tal manera que al cerrar en parte esta válvula para aumentar la carga, he obtuvo los siguientes resultados:

EXPERIENCIA 23

En el manómetro Nº1 la carga fue: 25,407 m

En el manómetro Nº2 la carga fue: 30,733 m

En el manómetro Nº3 la carga fue: 35,978 m

La pendiente del manómetro Nº1 al Nº2 es: 5,326/50 = 0,10652 m/m

La pendiente del manómetro Nº2 al Nº3 es: 5,245/50 = 0,10490 m/m

La pendiente media es de (0,10652 + 0,10490)/2 = 0,10571 m/m

El segundo manómetro puede ser considerado como como el que representa la carga media, la cual, más el peso de la atmósfera, da: 30,733+10,33 = 41,063 m.

Entonces, la velocidad que corresponde a esta carga y a esta pendiente media por metro citado es 1,281 m/s.

Darcy había realizado previamente el experimento N.º 22 en el que la pendiente media era de 0, 10022 m/m, lo que difiere muy poco de la anterior, pero dejó abierta la válvula, a fin de modificar la carga que soportaba el tubo, y obtuvo:

En el manómetro Nº1 la carga fue: 2,394 m

En el manómetro Nº2 la carga fue: 7,443 m

En el manómetro Nº3 la carga fue: 12,416 m

La pendiente del manómetro Nº1 al Nº2 es: 5,049/50 = 0,10098 m/m

La pendiente del manómetro Nº2 al Nº3 es: 4,973/50 = 0,09946 m/m

La pendiente media es de (0,10098+0,09946) /2 = 0,10022 m/m

El segundo manómetro puede ser considerado como como el que representa la carga media, la cual, más el peso de la atmósfera, da: 7,443+10,33 = 17,773 m.

Entonces, la velocidad obtenida que corresponde a esta carga y a esta pendiente media por metro citado es 1,235 m/s.

La relación de la presión soportada por la tubería fue, en números redondos, en los experimentos 22-23 fue de 18/41.

Más adelante, en esta tesis se podrá comprobar que la fórmula de interpolación relativa al tubo de 0,0266 da los resultados siguientes:

1,231 m para la velocidad correspondiente a la pendiente de 0,10022 m

1,265 m para la velocidad correspondiente a la pendiente de 0,10571 m

Es decir que se recae sobre la misma cifra para la velocidad que corresponde a una presión media de 17,77 m, y una tasa algo menor que la velocidad experimental con la correspondiente a la presión media 41.26 m.

La experiencia fue pues concluyente, sin embargo, obtuvo velocidades experimentales más grandes cuando las cargas fueron notablemente superiores.

Esto se debió a que el tubo se expandió muy significativamente bajo estas cargas; pudo medir directamente la dilatación.

Ponía el tubo en carga incorporando sobre él un tubo vertical de vidrio acabado por un grifo en su unión con la tubería; entonces, cuando se obtuvo la carga, cerraba la válvula establecida entre el depósito y el origen del tubo.

Abriendo entonces el grifo colocado en la parte de abajo del tubo de vidrio, la conducción, en virtud de su elasticidad, repetía su diámetro primitivo, y esta elasticidad fue medida por la altura cuya agua subía en el tubo de vidrio.

Este medio podría ser fácilmente aplicado en las experiencias relativas a la búsqueda de la elasticidad del plomo, de la chapa, hierro, vidrio, etc, etc

Resumiendo el método, según los croquis abajo representados, obviando los tubos piezométricos o manométricos que se suponen cerrados para no entorpecer el experimentose tiene lo siguiente:

La conducción entra en carga con la valvulas Nº 1 y Nº 2 abierta y la valvula Nº 3 correspondiente al tubo de vidrio cerrada, de modo que el tubo se expande (Ilustración 62).

Se cierra la válvula Nº 1 y la valvula Nº 2, de tal manera que la conducción queda en carga con el volumen expandido.

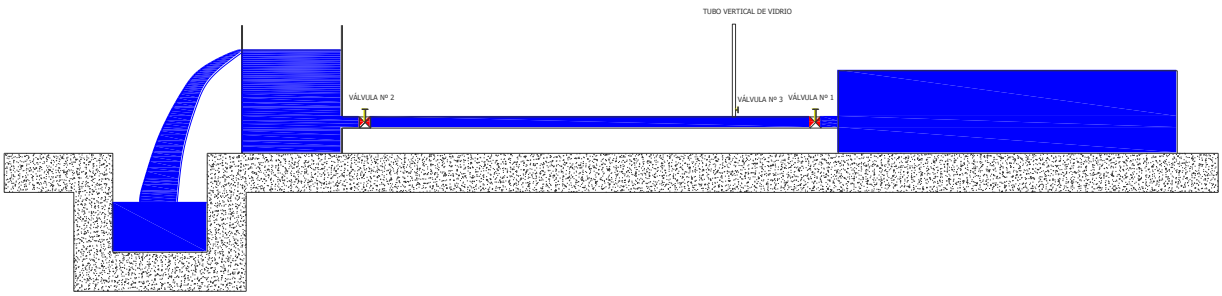


Ilustración 62. Método de *Darcy* para medir la expansión volumétrica de los tubos (1).

Al abrir la válvula Nº 3 correspondiente al tubo de vidrio, la conducción libera el volumen extra correspondiente al que ocupa la dilatación y lo manifiesta mediante la altura de agua h que sube por el tubo vertical de vidrio (Ilustración 63).

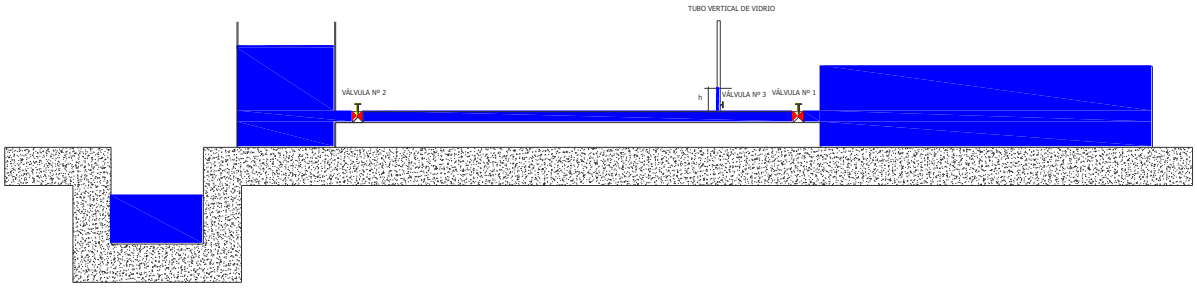


Ilustración 63. Método de Darcy para medir la expansión volumétrica de los tubos (2).

Darcy quiso asegurarse entonces, por qué un fuerte impulso, en el centro de la tubería, no tienden a cambiar la ley de la distribución de velocidades del fluido, y, por lo tanto, si no se observan bajo la influencia de esta impulsión, variaciones en las diferencias de las cargas, entre el 3r y el 2o manómetro de una parte, y el 2º y el 1º por otra parte.

Para eso, colocó entre el depósito y el manómetro 4, inmediatamente contra el cilindro, un diafragma en pared delgada perforado por una apertura de 0,005 m de diámetro; este diafragma de cobre tenía un espesor apenas igual a 0,002 m (Ilustración 64).

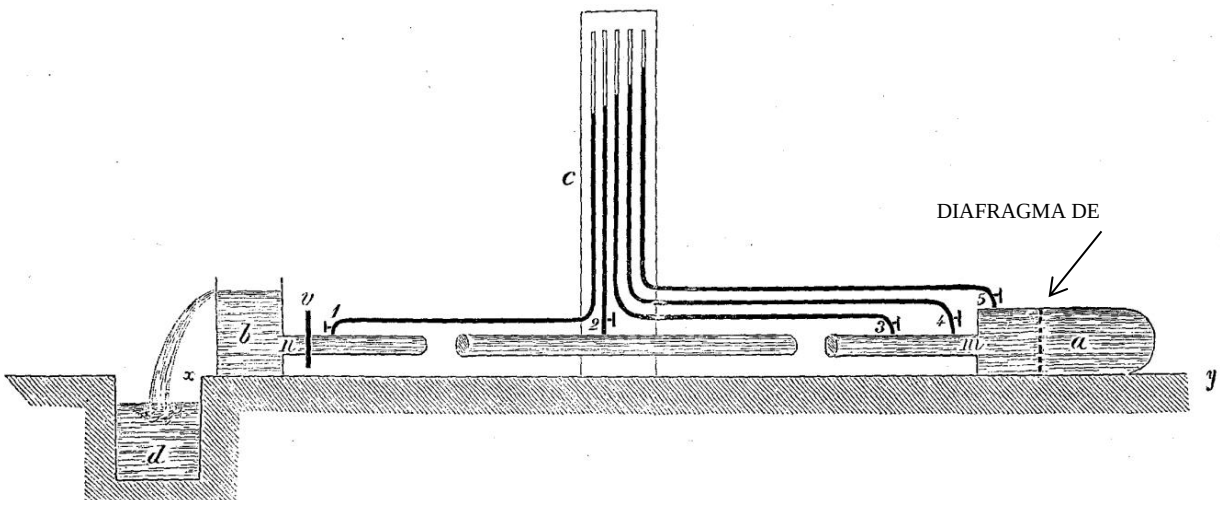


Ilustración 64. Instalación para medir las diferencias de carga por medio de los piezómetros

Realizó tres experimentos sobre la conducción de 0,0266 m, con los números 26 bis, 26b, 26 ter, 26 cuart.; la diferencia acumulada aguas arriba y aguas abajo del orificio fue de:

$$\left.\begin{array}{r}36{,}167\ \text{m}\\ 24{,}721\ \text{m}\\ 1{,}541\ \text{m}\end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \text{Le corresponden las velocidades} \quad \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}26{,}61\ \text{m/s}\\ 21{,}98\ \text{m/s}\\ 5{,}49\ \text{m/s}\end{array}\right.$$

De donde las velocidades vienen dadas en virtud de la fórmula:

$$v = 4{,}42\sqrt{h}$$ **Ecuación 162**

En el tubo los caudales experimentales fueron $\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}0{,}272\ \text{l/s}\\ 0{,}200\ \text{l/s}\\ 0{,}078\ \text{l/s}\end{array}\right.$

Por tanto, las velocidades medias en el tubo cuya sección fue 0.000556 m^2

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}0{,}489\ \text{m/s}\\ 0{,}360\ \text{m/s}\\ 0{,}140\ \text{m/s}\end{array}\right.$$

Esto muestra que el impulso era demasiado fuerte ya que el resultado de diferencias en la velocidad fue de:

$$\left\{\begin{array}{l}26{,}61 - 0{,}489 = 26{,}121\ \text{m/s}\\ 21{,}98 - 0{,}360 = 21{,}620\ \text{m/s}\\ 5{,}49 - 0{,}140 = \ \ 5{,}350\ \text{m/s}\end{array}\right.$$

Sin embargo, observó en los resultados de sus experiencias, en primer lugar, que las diferencias entre los indicadores 1 y 2, 2 y 3, en los experimentos anteriores, son bastante similares a los que existían antes de la utilización del diafragma.

Observó además que el impulso dado no hizo variar de ninguna manera la velocidad media debida a la pendiente acusada por los manómetros.

En efecto, mediante la deducción de la velocidad media de la fórmula aplicable a 0,0266 m, que es:

$$R\,i = 0,000048486\,v + 0,00084003\,v^2$$ **Ecuación 163**

Encontrado para velocidades correspondientes a las diferencias piezométricas

Los valores: ……0,500 m/s 0,366 m/s 0,136 m/s

Mientras que la experiencia acusa……..0,489 m/s 0,360 m/s 0,140 m/s

Esta fórmula da como resultado, como se verá más adelante, con la tabla de cálculo de los coeficientes de 1º y 2º potencias v deducidas de las experiencias.

Estas velocidades se obtienen sustituyendo en las fórmulas las pendientes

$$\left.\begin{array}{l}0,01758\text{ m}\\0,00982\text{ m}\\0,00177\text{ m}\end{array}\right\}\ \text{Dando como resultados las diferencias piezométricas}\ \left\{\begin{array}{l}1,758\text{ m}\\0,982\text{ m}\\0,177\text{ m}\end{array}\right.$$

Al comparar los volúmenes deducidos de la experiencia de los que resultan de la fórmula (Ecuación 162) $v = 4,42\sqrt{h}$ tuvimos

$$\frac{0,273}{0,530}, \frac{0,20}{0,431}, \frac{0,078}{0,108}$$

Y para los coeficientes de contracción

0,522, 0,465 y 0,726

Podremos concluir de lo que precede, que una impulsión central, por fuerte que sea, no modifica de manera apreciable el producto, ni la distribución de las velocidades de los filetes fluidos, y que, por el efecto de la cohesión del agua, esta impulsión se amortigua casi inmediatamente.

Más adelante, en esta tesis se verá desarrollada por *Darcy* una segunda demostración a través del instrumento que le sirvió para determinar la velocidad sobre los filetes fluidos.

Demuestra al mismo tiempo que, aunque la ley de distribución de velocidad no se ve alterada por una impulsión central dada aguas arriba, un aumento de la velocidad aguas abajo, obtenida mediante una conexión cónica del tubo de la experiencia con una tubería de menor diámetro, parece modificar la ley de distribución de velocidades, lo que aumenta la velocidad y la flecha de la curva.

En el capítulo V de su Memoria dio el resultado de esta doble experiencia.

Darcy dio la siguiente información conveniente que le sucedió durante sus experimentos:

Cuando las aguas de un tubo fluían bajo una carga fuerte y cuando precipitadamente se tomaba una carga menor, una condición que era fácil cumplir cuando se hacía uso de los aparatos para este fin, los manómetros, después de una oscilación brusca, se fijaba pronto un nivel constante.

Pero si se buscaba el caudal del tubo, y si repetía muchas veces la experiencia, encontrábamos cada vez volúmenes que iban un poco disminuyendo, y era sólo después de un intervalo largo que los caudales se ajustaban y correspondían a las cargas manométricas.

Esto parecería implicar que en esta circunstancia había variación en la distribución de velocidades de las redes de fluidos: la velocidad a la pared llega rápidamente al estado normal, mientras que la del Centro estaba disminuyendo con menor rapidez.

La carga se reducía súbitamente, el depósito por si mismo no podía entregar el agua contenida en el tubo un volumen igual al que en el primero momento todavía tendía a fluir.

De ahí un tipo de succión que directamente comprobé:

Así que era el líquido tubo que, durante el tiempo necesario para alcanzar el nuevo estado de equilibrio, parecía resultar en parte del depósito de agua.

Esta experiencia muestra por qué teníamos siempre el cuidado, operando, de comenzar con las pequeñas velocidades; actuando de otro modo, nos habríamos expuesto a tener volúmenes más grandes que los resultantes por las pendientes observadas.

Resultado de las experiencias.

Partió de la base de que las relaciones existentes entre las pendientes y la velocidad del agua que fluye en una tubería podrían ser representadas por las siguientes ecuaciones:

$Ri = av + bv^2$ **Ecuación 164** y $Ri = b_1 v^2$ **Ecuación 165**

La segunda ecuación se aplica con mayor precisión a las tuberías existentes viejas y cubiertas con depósitos.

Su reto fue determinar los coeficientes a y b de la primera ecuación y el coeficiente b_1 de la segunda, mediante las experiencias de cada tubo.

Aplicó, además, cada una de las ecuaciones (Ecuación 164) y (Ecuación 164) sobre la representación de los fenómenos, porque si en los límites de la práctica el segundo fuera bastante exacto en todos los casos, hubiese sido mucho más simple recurrir a esa siempre, y haría que fuese posible resolver con gran simplicidad todas las cuestiones relativas a la distribución del agua.

Se cuestionó ¿cuál método convendría recurrir para atenuar lo más posible las anomalías que existían entre las fórmulas y los resultados de la experiencia?

El primer miembro de estas ecuaciones debería ser dividido por 2; así los valores de los coeficientes a, b y b_1, resultantes de los cálculos que van a seguir, presentarán los valores duplicados de los que se deducirán de la fórmula de *Prony* (Ecuación 145) y (Ecuación 161):

$$\frac{Ri}{2} = av + bv^2$$

$$\frac{Ri}{2} = b_1 v^2$$

Habrá que recordar esta observación comparando la fórmula de los tubos de la fórmula a la de los canales abiertos.

Prony en su Compendio de cinco tablas, anunció que en futuras publicaciones se proponía hacer en las aguas corrientes, que se aplicaría a la investigación de los fenómenos observados el hermoso método de los mínimos cuadrados leyes sumas de errores.

Darcy se inspiró en su pensamiento, y es ese proceso el que pensó que debería utilizar.

Pero en lugar de determinar a y b y b_1 con la condición de que la suma de los errores al cuadrado era la más pequeña posible, lo sujetó a la condición de hacer mínima la suma de los cuadrados de la relación entre los errores y los datos experimentales.

Se comprende que una diferencia de 4 a 5 centímetros en una velocidad de 2 a 3 m/s es irrelevante, pero que resulta muy considerable cuando se aplica a una velocidad de 15 a 20 cm/s.

Se ve pues que no se trata precisamente de hacer de manera absoluta la suma de los cuadrados de los errores la más pequeña posible, sino que hay que tratar, así como ha señalado *Eytelwein*, calcular las constantes de manera que hay que obtener los mínimos para las relaciones existentes entre la expresión de las diferencias y los aportes de la cuestión.

Sólo *Eytelwein* no llegaba a este resultado que, utilizando preferentemente, para la formación de las ecuaciones, que debían determinar los coeficientes de los experimentos en que la velocidad es muy baja.

No necesitaba hacer hincapié en las desventajas de esta forma de actuar.

Las experiencias con pendientes y velocidades bajas en general son menos exactas, y por el contrario en pendientes y velocidades considerables ofrecen mayores garantías, y son éstas las que son sacrificadas a los primeros por el proceso antes mencionado.

Le pareció más racional, considerar la relación de todas las diferencias en los datos experimentales, en lugar de tener en cuenta a estas diferencias por sí mismas.

Hizo los cálculos en todas las hipótesis.

Cada una de las fórmulas dan lugar a dos tipos de valores que se pueden comparar entre ellos.

Determinó los valores de a y b, así como de b_1 en las hipótesis antes mencionadas.

En primer lugar, consideró la ecuación (Ecuación 164) que se reduce a la forma lineal, dividiendo ambos lados por v, y haciendo

$$\frac{i}{v} = z$$ **Ecuación 166**

por lo tanto:

$$Rz = a + bv$$ **Ecuación 167**

Sustituyendo en lugar de los valores v derivados de la experiencia, no encontramos exactamente los de z; la expresión general de la diferencia será:

$$\delta = \frac{a}{R} + \frac{b}{R} v - z$$ **Ecuación 168**

que la relación de la diferencia a los datos experimentales será también:

$$\frac{\delta}{z} = \frac{a}{R}\frac{1}{z} + \frac{b}{R}\frac{v}{z} - 1$$ **Ecuación 169**

Sin embargo, el principio de la menor suma del cuadrado de los errores consiste en hacer mínima, la suma de todos los δ^2 o $\sum\delta^2$, o la suma de todos los $\left(\frac{\delta}{z}\right)^2$ o $\sum\left(\frac{\delta}{z}\right)^2$.

Diferenciamos una expresión y la otra teniendo en cuenta a y b como variables independientes; igualaremos a 0 el resultado de la diferenciación, y tendremos para los valores de a y de b:

1ª En el supuesto de que se quiera limitar a hacer la suma de los cuadrados de los errores lo mas más pequeña posible,

$$a = R\,\frac{\dfrac{\sum i}{\sum v^2} - \dfrac{\sum \frac{i}{v}}{\sum v}}{\dfrac{\sum v}{\sum v^2} - \dfrac{n}{\sum v}}$$ **Ecuación 170**

$$b = R\,\frac{\dfrac{\sum \frac{i}{v}}{n} - \dfrac{\sum i}{\sum v}}{\dfrac{\sum v}{n} - \dfrac{\sum v^2}{\sum v}}$$ **Ecuación 171**

n es igual al número de experimentos utilizados para determinar los coeficientes a y b.

Para comprobar la veracidad de estos resultados deducidos por Darcy mediante el método de los mínimos cuadrados, desarrollaremos las operaciones que nos llevarán a la deducción de los coeficientes a y b.

Dicho método suele emplearse para aproximar un conjunto de datos por funciones bastante generales, pero para el caso más simple, la función que se ajustará será a una recta

$Y=a+bX$ **Ecuación 172**.

Aunque una teoría nos asegure que la relación entre dos magnitudes es lineal, en la práctica, la dispersión que causan los errores experimentales hace que no se encuentren exactamente dispuestos a lo largo de una recta como muestra la Ilustración 65. El método de mínimos cuadrados calcula a partir de los N pares de datos experimentales (Xi,Yi) los valores de la pendiente **b** y del punto de corte con el eje **a** que mejor ajustan los datos a una recta. Como se muestra, se entiende por el mejor ajuste aquella recta que hace mínimas las distancias d1, d2,⋯,dN de los puntos medidos a la recta.

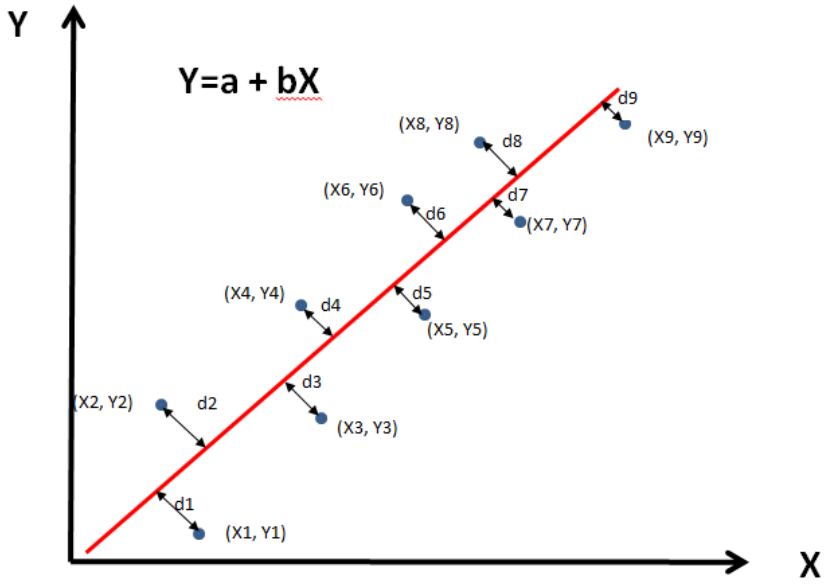


Ilustración 65. Dispersión de datos para el cálculo de la ecuación de una recta por el método de los mínimos cuadrados.

Dicho esto, se parte de la (Ecuación 167), $Rz = a + bv$, y la equiparamos con la (Ecuación 172), $Y = a + bX$, para resolver las incógnitas.

Las ecuaciones que hay que utilizar para ajustar mediante el método de mínimos cuadrados un conjunto de i=1,2,⋯,N datos experimentales agrupados en parejas (X i ,Y i) de medidas que deberían disponerse a lo largo de la recta $Y = a + bX$ son:

$$a = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} X_i^{\,2}\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i\right)}{N\left(\sum X_i^{\,2}\right) - \left(\sum X_i\right)^2}$$ **Ecuación 173**

y la pendiente

$$b = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right)}{N\left(\sum X_i^{\,2}\right) - \left(\sum X_i\right)^2}$$ **Ecuación 174**

Dicho esto, se parte de la (Ecuación 167), $Rz = a + bv$, de la que hacemos un símil con la (Ecuación 172), $Y = a + bX$.

Para el coeficiente **a** se tendría:

$$a = \frac{\left(\sum Rz\right)\left(\sum v^2\right) - \left(\sum v\right)\left(\sum vRz\right)}{N\left(\sum v^2\right) - \left(\sum v\right)^2}$$ **Ecuación 175**

$$a = R\,\frac{\left(\sum z\right)\left(\sum v^2\right) - \left(\sum v\right)\left(\sum vz\right)}{N\left(\sum v^2\right) - \left(\sum v\right)^2}$$ **Ecuación 176**

Si divido entre $\sum v^2$ el dividendo y el divisor quedaría:

$$a = R\,\frac{\left(\sum z\right) - \dfrac{\left(\sum v\right)\left(\sum vz\right)}{\sum v^2}}{N - \dfrac{\left(\sum v\right)^2}{\sum v^2}}$$ **Ecuación 177**

Si divido entre $\sum v$ el dividendo y el divisor quedaría:

$$a = R\frac{\frac{\left(\sum z\right)}{\left(\sum v\right)} - \frac{\left(\sum vz\right)}{\sum v^2}}{\frac{N}{\left(\sum v\right)} - \frac{\left(\sum v\right)}{\sum v^2}}$$ **Ecuación 178**

S multiplico por -1 el dividendo y el divisor quedaría:

$$a = R\frac{\frac{\left(\sum vz\right)}{\sum v^2} - \frac{\left(\sum z\right)}{\left(\sum v\right)}}{\frac{\left(\sum v\right)}{\sum v^2} - \frac{N}{\left(\sum v\right)}}$$ **Ecuación 179**

Haciendo $\frac{i}{v} = z$ (Ecuación 166) quedaría

$$a = R\frac{\frac{\left(\sum i\right)}{\sum v^2} - \frac{\left(\sum \frac{i}{v}\right)}{\left(\sum v\right)}}{\frac{\left(\sum v\right)}{\sum v^2} - \frac{N}{\left(\sum v\right)}}$$ **Ecuación 180**

que coincide con la deducción de *Darcy* como se quería demostrar.

Para el coeficiente **b** se tendría:

$$b = \frac{N\left(\sum vRz\right) - \left(\sum v\right)\left(\sum vRz\right)}{N\left(\sum v^2\right) - \left(\sum v\right)^2}$$ **Ecuación 181**

$$b = R\frac{N\left(\sum vz\right) - \left(\sum v\right)\left(\sum z\right)}{N\left(\sum v^2\right) - \left(\sum v\right)^2}$$ **Ecuación 182**

Si multiplico por -1 el dividendo y el divisor quedaría:

$$b = R\frac{\left(\sum v\right)\left(\sum z\right)-N\left(\sum vz\right)}{\left(\sum v\right)^2-N\left(\sum v^2\right)}$$ **Ecuación 183**

Si divido entre $\sum v$ el dividendo y el divisor quedaría:

$$b = R\frac{\left(\sum z\right)-N\frac{\left(\sum vz\right)}{\left(\sum v\right)}}{\left(\sum v\right)-N\frac{\left(\sum v^2\right)}{\left(\sum v\right)}}$$ **Ecuación 184**

Si divido entre N el dividendo y el divisor quedaría:

$$b = R\frac{\frac{\left(\sum z\right)}{N}-\frac{\left(\sum vz\right)}{\left(\sum v\right)}}{\frac{\left(\sum v\right)}{N}-\frac{\left(\sum v^2\right)}{\left(\sum v\right)}}$$ **Ecuación 185**

Haciendo $\frac{i}{v} = z$ (Ecuación 166) quedaría

$$b = R\frac{\frac{\left(\sum \frac{i}{v}\right)}{N}-\frac{\left(\sum i\right)}{\left(\sum v\right)}}{\frac{\left(\sum v\right)}{N}-\frac{\left(\sum v^2\right)}{\left(\sum v\right)}}$$ **Ecuación 186** ,

que coincide con la deducción de *Darcy* como se quería demostrar.

2º En la hipótesis de que se puede obtener un mínimo para las relaciones de las desviaciones dadas experimentalmente, vendrá para los valores de a y b:

$$a = R\,\frac{\dfrac{\sum \frac{v^2}{i}}{\sum \frac{v^4}{i^2}} - \dfrac{\sum \frac{v}{i}}{\sum \frac{v^3}{i^2}}}{\dfrac{\sum \frac{v^3}{i^2}}{\sum \frac{v^4}{i^2}} - \dfrac{\sum \frac{v^2}{i^2}}{\sum \frac{v^3}{i^2}}}$$ **Ecuación 187**

$$b = R\,\frac{\dfrac{\sum \frac{v}{i}}{\sum \frac{v^2}{i^2}} - \dfrac{\sum \frac{v^2}{i}}{\sum \frac{v^3}{i^2}}}{\dfrac{\sum \frac{v^3}{i^2}}{\sum \frac{v^4}{i^2}} - \dfrac{\sum \frac{v^2}{i^2}}{\sum \frac{v^3}{i^2}}}$$ **Ecuación 188**

A continuación, pasó a representar los fenómenos observados en la (Ecuación 164 **y** (Ecuación 165), el cual, como ya se ha señalado anteriormente, es la más adecuada para las tuberías viejas y cubiertas de depósitos, lo hará, al reducirlo a la forma lineal a los medios mencionados anteriormente, haciendo $\frac{i}{v} = z$ (Ecuación 166) queda:

$$R\,z = b_1\,v$$ **Ecuación 189**

Por lo tanto, la diferencia absoluta está dada por la ecuación:

$$\delta = \frac{b_1}{R}\,v - z$$ **Ecuación 190**

Y la diferencia proporcional por

$$\frac{\delta}{z} = \frac{b_1}{R}\,\frac{v}{z} - 1$$ **Ecuación 191**

Por lo tanto, operando como antes, y sustituyendo z por su valor $\frac{i}{v}$,

$$b_1 = R\frac{\sum i}{\sum v^2}$$ **Ecuación 192**

$$b_1 = R\frac{\sum \frac{v^2}{i}}{\sum \frac{v^4}{i^2}}$$ **Ecuación 193**

La transformación de las funciones parabólicas, las ecuaciones (Ecuación 164) **y** (Ecuación 165):

$$R\,i = av + b\,v^2$$

$$R\,i = b_1\,v^2$$

en funciones lineales las ecuaciones (Ecuación 167) y (Ecuación 189):

$$Rz = a + bv$$

$$Rz = b_1 v\,,$$

permite también determinar gráficamente, con una gran precisión, las constantes a, b, y b1. *Darcy* utilizó este método en conjunción con el de los mínimos cuadrados: este último proceso ciegamente da el mismo valor a las experiencias que puede inspirar grados desiguales de confianza; sin embargo, es bastante fácil de tener en cuenta en la calidad de las experiencias con el aspecto de una construcción gráfica, que pone de relieve las anomalías: estos métodos le produjeron sólo diferencias insignificantes, y las diferencias que presenta menos importantes que los errores en la imperfección de los métodos de observación: el objetivo era que los hechos experimentales fueran representados con precisión por las fórmulas empíricas, y que se reconocieran que a través de la sustitución de los factores conseguidos, esta condición se cumpliera.

Sustituyó en las ecuaciones (Ecuación 180), (Ecuación 186), (Ecuación 187), y (Ecuación 188), (Ecuación 192), (Ecuación 193) los datos experimentales, y obtuvo

los valores de a y b, por una parte, o coeficientes de v y v^2; por otra parte, de b_1, o coeficientes de v^2, en las hipótesis antes mencionadas.

A efectos de comprensión de las tablas de *Darcy* reproducidas en esta tesis se da la nomenclatura de las ecuaciones anteriores:

La ecuación 180 equivale a la ecuación (1) de *Darcy*.

La ecuación 186 equivale a la ecuación (2) de *Darcy*.

La ecuación 187 equivale a la ecuación (3) de *Darcy*.

La ecuación 188 equivale a la ecuación (4) de *Darcy*.

La ecuación 192 equivale a la ecuación (5) de *Darcy*.

La ecuación 193 equivale a la ecuación (6) de *Darcy*.

DIAMÈTRE des TUYAUX.	DÉSIGNATION DE LA FORMULE employée pour le calcul des coefficients.	COEFFICIENT DE v.	COEFFICIENT DE v^2.	$\frac{1}{\sqrt{b_1}}$.	OBSERVATIONS.
CONDUITES EN FER ÉTIRÉ.					
0,0122.....	1-2.	0,000,156,170	0,001,338,968	"	
	3-4.	0,000,142,255	0,001,361,42	"	
	5.	"	0,001,557,841	25,34	
	6.	"	0,001,673,692	24,44	
0,0266.....	1-2.	0,000,045,403	0,000,833,228	"	
	3-4.	0,000,048,486	0,000,840,034	"	
	5.	"	0,000,866,447	33,97	
	6.	"	0,000,918,256	33,00	
0,0395.....	1-2.	0,000,081,589	0,000,626,345	"	
	3-4.	0,000,037,832	0,000,697,532	"	
	5.	"	0,000,673,022	38,55	
	6.	"	0,000,784,505	35,70	
CONDUITES EN PLOMB.					
0,014.....	1-2.	0,000,129,815	0,000,589,18	"	
	3-4.	0,000,038,938	0,000,713,37	"	
	5.	"	0,000,731,056	36,99	
	6.	"	0,000,800,612	35,34	
0,027.....	1-2.	0,000,097,54	0,000,632	"	
	3-4.	0,000,053,950	0,000,701,359	"	
	5.	"	0,000,713,103	37,45	
	6.	"	0,000,821,254	34,90	
0,041.....	1-2.	0,000,145,14	0,000,546,296	"	
	3-4.	0,000,077,63	0,000,610,9	"	
	5.	"	0,000,634,906	39,69	
	6.	"	0,000,732,359	36,95	
CONDUITES EN TÔLE ET BITUME.					
0,0268.....	1-2.	0,000,231,348	0,000,566,963	"	
	3-4.	0,000,062,947	0,000,707,826	"	
	5.	"	0,000,700,866	37,77	
	6.	"	0,000,837,225	34,56	
0,0826.....	1-2.	0,000,175,433	0,000,377,845	"	
	3-4.	0,000,075,752	0,000,430,344	"	
	5.	"	0,000,442,192	47,56	
	6.	"	0,000,505,283	44,49	

Tabla 107. Coeficientes a, b y b1, correspondientes a las velocidades v y v2.

DIAMÈTRE des TUYAUX.	DÉSIGNATION DE LA FORMULE employée pour le calcul des coefficients.	COEFFICIENT DE v.	COEFFICIENT DE v^2.	$\frac{1}{\sqrt{b_1}}$.	OBSERVATIONS.
CONDUITES EN TÔLE ET BITUME. (Suite.)					
0,196.....	1-2.	0,000,255,27	0,000,284,249	"	
	3-4.	0,000,056,138	0,000,378,747	"	
	5.	"	0,000,363,297	52,47	
	6.	"	0,000,433,990	48,00	
0,285.....	1-2.	0,000,122,17	0,000,351,96	"	
	3-4.	0,000,114,189	0,000,356,100	"	
	5.	"	0,000,407,074	49,56	
	6.	"	0,000,439,529	47,70	
CONDUITE EN VERRE.					
0,04968.....	1-2.	0,000,128,322	0,000,550,994	"	
	3-4.	0,000,067,0	0,000,626,9	"	
	5.	"	0,000,655,268	39,07	
	6.	"	0,000,744,309	36,65	
CONDUITES EN FONTE.					
0,0359..... (Chargée de dépôts.)	1-2.	0,000,001,574	0,001,881,995	"	
	3-4.	0,000,030,165	0,002,109,07	"	
	5.	"	0,001,880,706	23,06	
	6.	"	0,001,873,503	23,10	
0,0364..... (La même nettoyée.)	1-2.	0,000,072,518	0,000,604,857	"	
	3-4.	0,000,045,972	0,000,642,634	"	
	5.	"	0,000,689,050	38,10	
	6.	"	0,000,750,605	36,50	
0,0795..... (Chargée de dépôts.)	1-2.	0,000,049,548	0,001,352,693	"	
	3-4.	0,000,045,990	0,001,351,362	"	
	5.	"	0,001,406,042	26,67	
	6.	"	0,001,471,671	26,07	
0,0801..... (La même nettoyée.)	1-2.	0,000,028,735	0,000,747,579	"	
	3-4.	0,000,028,194	0,000,740,836	"	
	5.	"	0,000,774,964	35,92	
	6.	"	0,000,792,017	35,53	
CONDUITES EN FONTE NEUVE.					
0,0819.....	1-2.	0,000,013,654	0,000,641,823	"	
	3-4.	0,000,044,881	0,000,634,45	"	
	5.	"	0,000,660,556	38,91	
	6.	"	0,000,694,765	37,94	

13

Tabla 108. Coeficientes a, b y b1, correspondientes a las velocidades v y v2 (continuación).

98 DU MOUVEMENT DE L'EAU

DIAMÈTRE des TUYAUX.	DÉSIGNATION DE LA FORMULE employée pour le calcul des coefficients.	COEFFICIENT DE v.	COEFFICIENT DE v^2.	$\frac{1}{\sqrt{b_1}}$.	OBSERVATIONS.
CONDUITES EN FONTE NEUVE. (Suite.)					
0,137.....	1-2.	0,000,037,458	0,000,505,379	"	
	3-4.	0,000,038,825	0,000,505,527	"	
	5.	"	0,000,518,828	43,90	
	6.	"	0,000,553,390	42,51	
0,188.....	1-2.	0,000,034,145	0,000,552,468	"	
	3-4.	0,000,012,276	0,000,572,07	"	
	5.	"	0,000,563,048	42,14	
	6.	"	0,000,584,393	41,37	
CONDUITES EN FONTE.					
0,2432..... (Vieille chargée de dépôts.)	1-2.	0,000,002,864	0,001,156,730	"	
	3-4.	0,000,020,310	0,001,143,722	"	
	5.	"	0,001,158,572	29,38	
	6.	"	0,001,167,779	29,26	
0,2447..... (La même nettoyée.)	1-2.	0,000,011,161	0,000,683,699	"	
	3-4.	0,000,083,885	0,000,665,825	"	
	5.	"	0,000,688,012	38,12	
	6.	"	0,000,701,720	37,75	
0,297..... (Nettoyée.)	1-2.	0,000,004,959	0,000,601,89	"	
	3-4.	0,000,023,508	0,000,585,53	"	
	5.	"	0,000,604,121	40,68	
	6.	"	0,000,611,913	40,43	
0,50..... (Neuve.)	1-2.	0,000,081,4	0,000,402,9	"	
	3-4.	0,000,109,90	0,000,369,31	"	
	5.	"	0,000,493,171	45,03	
	6.	"	0,000,509,181	44,32	

Tabla 109. Coeficientes a, b y b1, correspondientes a las velocidades v y v2 (continuación).

Las operaciones realizadas en dichas ecuaciones se han revisado con hoja de cálculo Excel, introduciendo las fórmulas y los datos aportados por *Darcy* y existen diferencias tanto en la operatividad como en la introducción de datos, no obstante,

se seguirá con el planteamiento de *Darcy* dado que dichas diferencias entran dentro de un grado de magnitud aceptable, ya que el error humano en la abundancia de datos y operaciones ha podido llevar a errores, dentro de su genial planteamiento.

El siguiente paso que dio fue el de juzgar el grado de aproximación resultante de los coeficientes determinados en la tabla anterior utilizando las fórmulas que permiten establecer las velocidades que darían las expresiones mediante la sustitución de las pendientes experimentales.

Tomó la diferencia entre las velocidades deducidas de la experiencia y las fórmulas; dividió por las velocidades experimentales, y los cocientes encontrados ofrecieron las relaciones de los errores a los datos experimentales.

Llegó así a las desviaciones expresadas en fracciones decimales de los datos tomados por unidad.

Para estudiar el análisis tomaremos a modo de ejemplo las conducciones de hierro estirado de diámetro D = 0,0122 m

El procedimiento es el siguiente:

Partimos de las fórmulas (Ecuación 164) **y** (Ecuación 165):

$$R\,i = a v + b\,v^2$$

$$R\,i = b_1\,v^2$$

De las que conocemos el radio R, la pendiente i y los coeficientes a, b y b_1 de las ecuaciones (Ecuación 180), (Ecuación 186,), (Ecuación 187), (Ecuación 188), (Ecuación 192), (Ecuación 193) deducidos de las fórmulas de los mínimos cuadrados.

De las ecuaciones (Ecuación 164) y (Ecuación 165) deducimos la velocidad v mediante la ecuación cuadrática en el primer caso y despejando la v en la segunda.

A continuación, se calculan las relaciones entre las diferencias de las velocidades correspondientes a la experiencia y la velocidad deducida de la fórmula y la velocidad experimental. Para tal efecto y para comprobar y analizar la metodología utilizada por *Darcy*, se han efectuado los cálculos por hoja Excel y se han corroborado los resultados.

CONDUCCIONES DE HIERRO ESTIRADO																			
D =	0,0122	R=	0,0061	COEFICIENTES deducidos del metodo de mímos cuadrados						velocidades deducidas de la experiencia	VELOCIDADES deducidas de las fórmulas				RELACIONES entre las diferencias de velocidades deducidas de la experiencia y de la fórmula y la velocidad experimental.			
	RADIO	PENDIENTES																
Nº orden	R	i	Ri	a(1)	b(2)	a(3)	b(4)	b1(5)	b1(6)	V exper	(1)-(2)	(3)-(4)	5	6	(1)-(2)	(3)-(4)	5	6
6	0,0061	0,01659	0,0001012	0,000156170	0,001338968	0,000142255	0,00136142	0,001557841	0,001673692	0,2300	0,223	0,225	0,255	0,246	0,0304	0,0217	-0,1087	-0,0696
7	0,0061	0,0258	0,00015738	0,000156170	0,00133897	0,000142255	0,00136142	0,001557841	0,001673692	0,2870	0,289	0,292	0,318	0,307	-0,0070	-0,0174	-0,1080	-0,0697
8	0,0061	0,03472	0,00021179	0,000156170	0,00133897	0,000142255	0,00136142	0,001557841	0,001673692	0,3430	0,344	0,346	0,369	0,356	-0,0029	-0,0087	-0,0758	-0,0379
9	0,0061	0,04399	0,00026834	0,000156170	0,00133897	0,000142255	0,00136142	0,001557841	0,001673692	0,3920	0,393	0,395	0,415	0,400	-0,0026	-0,0077	-0,0587	-0,0204
10	0,0061	0,06264	0,0003821	0,000156170	0,00133897	0,000142255	0,00136142	0,001557841	0,001673692	0,4780	0,479	0,480	0,495	0,478	-0,0021	-0,0042	-0,0356	0,0000
11	0,0061	0,08554	0,00052179	0,000156170	0,00133897	0,000142255	0,00136142	0,001557841	0,001673692	0,5730	0,569	0,569	0,579	0,558	0,0070	0,0070	-0,0105	0,0262
12	0,0061	0,17862	0,00108958	0,000156170	0,00133897	0,000142255	0,00136142	0,001557841	0,001673692	0,8460	0,846	0,844	0,836	0,807	0,0000	0,0024	0,0118	0,0461
13	0,0061	0,34426	0,00209999	0,000156170	0,00133897	0,000142255	0,00136142	0,001557841	0,001673692	1,1950	1,195	1,191	1,161	1,120	0,0000	0,0033	0,0285	0,0628

Tabla 110. Relación (Vexp. - Vform.) / Vform.

DIAMÈTRE des TUYAUX.	Nos d'ordre.	VITESSES d'après l'expérience.	VITESSES D'APRÈS LES FORMULES				RAPPORTS ENTRE LES DIFFÉRENCES DES VITESSES déduites de l'expérience et de la formule, et les vitesses expérimentales.			
			1-2.	3-4.	5.	6.	1-2.	3-4.	5.	6.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
CONDUITES EN FER ÉTIRÉ.										
		mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.				
0,0122....	6	0,2300	0,223	0,225	0,255	0,246	+0,0304	+0,0217	—0,1087	—0,0696
	7	0,2870	0,289	0,292	0,318	0,307	—0,0070	—0,0174	—0,1080	—0,0697
	8	0,3430	0,344	0,346	0,369	0,356	—0,0029	—0,0087	—0,0758	—0,0379
	9	0,3920	0,393	0,395	0,415	0,400	—0,0026	—0,0077	—0,0587	—0,0204
	10	0,4780	0,479	0,480	0,495	0,478	—0,0021	—0,0042	—0,0356	+0,0000
	11	0,5730	0,569	0,569	0,579	0,558	+0,0070	+0,0070	—0,0105	+0,0262
	12	0,8460	0,846	0,844	0,836	0,807	0,0000	+0,0024	+0,0118	+0,0461
	13	1,1950	1,195	1,191	1,161	1,120	0,0000	+0,0033	+0,0284	+0,0628

Tabla 111. Relación (Vexp. -V form.)/ Vform. (Darcy)

DIAMÈTRE des TUYAUX.	N°s d'ordre.	VITESSES d'après l'expérience.	VITESSES D'APRÈS LES FORMULES.				RAPPORTS ENTRE LES DIFFÉRENCES DES VITESSES déduites de l'expérience et de la formule, et les vitesses expérimentales.			
			1-2.	3-4.	5.	6.	1-2.	3-4.	5.	6.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
CONDUITES EN TÔLE ET BITUME. (Suite.)										
		mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.				
	64	0,384	0,352	0,421	0,465	0,426	+0,0833	—0,0963	—0,2110	—0,1094
	65	0,567	0,548	0,605	0,651	0,595	+0,0335	—0,0670	—0,1481	—0,0494
	66	0,678	0,667	0,715	0,762	0,697	+0,0162	—0,0546	—0,1239	—0,0280
	67	0,853	0,852	0,884	0,932	0,852	+0,0011	—0,0363	—0,0926	+0,0012
0,0268....	68	1,467	1,482	1,454	1,505	1,377	—0,0102	+0,0088	—0,0259	+0,0613
	69	1,859	1,868	1,801	1,854	1,697	—0,0048	+0,0312	+0,0027	+0,0872
	70	2,203	2,207	2,106	2,161	1,977	—0,0018	+0,0449	+0,0191	+0,1025
	71	2,507	2,498	2,367	2,423	2,217	+0,0035	+0,0558	+0,0335	+0,1156
	72	0,100	0,057	0,096	0,159	0,149	+0,430	+0,040	—0,590	—0,4900
	73	0,176	0,123	0,179	0,248	0,232	+0,301	—0,0170	—0,409	—0,3180
	74	0,357	0,293	0,362	0,435	0,407	+0,179	—0,0140	—0,218	—0,1400
	75	0,665	0,629	0,694	0,766	0,717	+0,0391	—0,0436	—0,152	—0,0782
	76	0,950	0,946	0,998	1,068	0,999	+0,0042	—0,0505	—0,124	—0,0516
	77	1,354	1,365	1,395	1,461	1,367	—0,0081	—0,0303	—0,0789	—0,0096
0,0826....	78	1,613	1,625	1,641	1,704	1,594	—0,0074	—0,0174	—0,0564	+0,0111
	79	1,874	1,890	1,890	1,950	1,824	—0,0085	—0,0085	—0,0405	+0,0266
	80	2,572	2,577	2,537	2,588	2,421	—0,0019	+0,0136	—0,0062	+0,0587
	81	3,211	3,196	3,111	3,155	2,951	+0,0046	+0,0311	+0,0174	+0,0809
	82	3,668	3,670	3,563	3,600	3,368	—0,0005	+0,0286	+0,0185	+0,0817
	83	3,897	3,904	3,783	3,818	3,571	—0,0018	+0,0292	+0,0203	+0,0837
	84	0,180	0,071	0,165	0,232	0,213	+0,606	+0,0833	—0,289	—0,1833
	85	0,278	0,157	0,286	0,360	0,329	+0,435	—0,0288	—0,295	—0,1835
	86	0,466	0,355	0,509	0,591	0,540	+0,196	—0,0935	—0,268	—0,1588
	87	0,780	0,708	0,853	0,943	0,863	+0,0923	—0,0936	—0,209	—0,1064
	88	1,076	1,035	1,153	1,251	1,144	+0,0381	—0,0530	—0,163	—0,0632
0,196.....	89	1,657	1,626	1,683	1,792	1,640	+0,0187	—0,0157	—0,0814	+0,0102
	90	1,679	1,634	1,690	1,799	1,646	+0,0268	—0,0065	—0,0714	+0,0196
	91	2,259	2,279	2,259	2,380	2,178	—0,0088	0,0000	—0,0535	+0,0359
	92	2,743	2,782	2,700	2,831	2,590	—0,0142	+0,0157	—0,0321	+0,0558
	93	3,052	3,122	2,997	3,134	2,867	—0,0229	+0,0180	—0,0269	+0,0606
	94	6,010	6,040	5,536	5,726	5,239	—0,0049	+0,0789	+0,0473	+0,1282
	95	0,395	0,386	0,393	0,495	0,476	+0,0228	+0,0050	—0,253	—0,2050
	96	0,848	0,857	0,863	0,945	0,909	—0,0106	—0,0177	—0,114	—0,0719
	97	1,179	1,162	1,166	1,231	1,185	+0,0144	+0,0110	—0,0441	—0,0051
0,285.....	98	1,494	1,501	1,503	1,549	1,490	—0,0046	—0,0060	—0,0368	+0,0027
	99	2,034	2,028	2,028	2,041	1,964	+0,0029	+0,0029	—0,0034	+0,0344
	100	2,698	2,708	2,704	2,675	2,574	—0,0037	—0,0022	+0,0085	+0,0459
	101	3,207	3,202	3,188	3,135	3,017	+0,0015	+0,0059	+0,0224	+0,0592

Tabla 112. Relación (Vexp. -V form.)/ Vform. (*Darcy*) continuación.

DIAMÈTRE des TUYAUX.	N°s d'ordre.	VITESSES d'après l'expérience.	VITESSES D'APRÈS LES FORMULES.				RAPPORTS ENTRE LES DIFFÉRENCES DES VITESSES déduites de l'expérience et de la formule, et les vitesses expérimentales.			
			1-2.	3-4.	5.	6.	1-2.	3-4.	5.	6.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
CONDUITE EN VERRE.										
		mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.				
0,04968...	102	0,153	0,122	0,149	0,191	0,179	+0,203	+0,0261	—0,248	—0,1699
	103	0,312	0,295	0,320	0,362	0,339	+0,0673	—0,0256	—0,160	—0,0865
	104	0,485	0,485	0,502	0,541	0,507	0,0000	—0,0351	—0,115	—0,0454
	105	0,893	0,912	0,906	0,937	0,880	—0,0213	—0,0146	—0,0493	+0,0145
	106	1,478	1,500	1,459	1,478	1,387	—0,0149	+0,0129	0,0000	+0,0616
	107	2,108	2,133	2,053	2,060	1,933	—0,0119	+0,0261	+0,0227	+0,0830
CONDUITES EN FONTE.										
0,0359.... (Chargée de dépôts.)	108	0,051	0,048	0,054	»	»	+0,0588	—0,0588	»	»
	109	0,081	0,082	0,085	0,082	0,082	—0,0123	—0,0493	—0,0123	—0,0123
	110	0,130	0,132	0,132	0,132	0,132	—0,0154	—0,0154	—0,0154	—0,0154
	111	0,253	0,252	0,246	0,253	0,253	+0,0039	+0,0277	0,0000	0,0000
	112	0,381	0,381	0,367	0,382	0,382	0,0000	+0,0367	—0,0026	—0,0026
	113	0,551	0,555	0,532	0,556	0,557	—0,0072	+0,0345	—0,0097	—0,0109
	114	0,633	0,629	0,602	0,630	0,631	+0,0063	+0,0490	+0,0047	+0,0032
0,0364.... (La même nettoyée).	115	0,113	0,098	0,110	0,137	0,131	+0,1330	+0,0265	—0,212	—0,1593
	116	0,188	0,180	0,193	0,218	0,209	+0,0426	—0,0266	—0,160	—0,1117
	117	0,387	0,387	0,395	0,415	0,397	0,0000	—0,0207	—0,0724	—0,0258
	118	0,601	0,601	0,604	0,617	0,591	0,0000	—0,0049	—0,0262	+0,0166
	119	0,892	0,895	0,889	0,893	0,855	—0,0034	+0,0033	—0,0010	+0,0415
	120	1,034	1,034	1,025	1,024	0,981	0,0000	+0,0087	+0,0096	+0,0512
	121	1,126	1,124	1,112	1,108	1,062	+0,0018	+0,0127	+0,0164	+0,0508
0,0795.... (Chargée de dépôts.)	122	0,123	0,121	0,122	0,136	0,133	+0,016	+0,008	—0,105	—0,081
	123	0,251	0,253	0,255	0,266	0,260	—0,008	—0,016	—0,059	—0,036
	124	0,446	0,444	0,445	0,453	0,443	+0,004	+0,002	—0,016	+0,007
	125	0,678	0,670	0,671	0,675	0,659	+0,012	+0,010	+0,004	+0,028
	126	0,931	0,936	0,938	0,936	0,915	—0,005	—0,007	—0,005	+0,017
	127	1,142	1,136	1,138	1,132	1,107	+0,005	+0,003	+0,009	+0,031
0,0801.... (La même nettoyée.)	128	0,193	0,200	0,195	0,208	0,206	—0,036	—0,010	—0,078	—0,072
	129	0,385	0,378	0,380	0,390	0,386	+0,018	+0,013	—0,013	—0,003
	129 *bis*.	0,614	0,603	0,606	0,611	0,605	+0,018	+0,013	+0,005	+0,015
	130	0,624	0,609	0,612	0,617	0,610	+0,024	+0,019	+0,011	+0,022
	131	0,864	0,894	0,899	0,897	0,887	—0,035	—0,040	—0,038	—0,027
	132	1,248	1,236	1,241	1,232	1,219	+0,009	+0,005	+0,013	+0,023
	133	1,526	1,529	1,536	1,520	1,504	—0,002	—0,006	+0,004	+0,014

Tabla 113. Relación (Vexp. -V form.)/ Vform. (*Darcy*) continuación.

DIAMÈTRE des TUYAUX.	Nos d'ordre.	VITESSES d'après l'expérience.	VITESSES D'APRÈS LES FORMULES.				RAPPORTS ENTRE LES DIFFÉRENCES DES VITESSES déduites de l'expérience et de la formule, et les vitesses expérimentales.			
			1-2.	3-4.	5.	6.	1-2.	3-4.	5.	6.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
			CONDUITES EN FONTE NEUVE.							
		mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.				
	134	0,088	0,103	0,084	0,111	0,109	—0,182	+0,045	—0,261	—0,2380
	135	0,171	0,220	0,199	0,227	0,221	—0,286	—0,164	—0,327	—0,2920
	136	0,358	0,374	0,353	0,379	0,370	—0,045	+0,014	—0,059	—0,0335
	137	0,561	0,572	0,551	0,574	0,559	—0,019	+0,018	—0,023	+0,0035
	138	0,791	0,796	0,777	0,795	0,775	—0,006	+0,017	—0,005	+0,0202
	139	1,185	1,189	1,172	1,182	1,153	—0,003	+0,011	+0,003	+0,0270
0,0819....	140	1,418	1,420	1,404	1,410	1,375	—0,005	+0,006	+0,006	+0,0303
	141	1,571	1,595	1,580	1,583	1,544	—0,015	—0,006	—0,008	+0,0172
	142	2,453	2,458	2,447	2,433	2,372	—0,002	+0,002	[illegible]	+0,0330
	143	2,487	2,503	2,493	2,478	2,416	—0,006	—0,002	[illegible]	+0,0285
	144	2,720	2,754	2,745	2,725	2,657	—0,012	—0,009	—0,002	+0,0231
	145	3,238	3,264	3,258	3,228	3,147	—0,008	—0,006	+0,003	+0,0281
	146	3,265	3,290	3,284	3,253	3,172	—0,008	—0,006	+0,004	+0,0284
	147	0,149	0,147	0,146	0,178	0,172	+0,013	+0,020	—0,194	—0,154
	148	0,298	0,308	0,307	0,339	0,328	—0,033	—0,030	—0,137	—0,1000
	149	0,488	0,496	0,495	0,525	0,509	—0,016	—0,014	—0,076	—0,0430
	150	0,763	0,766	0,765	0,792	0,767	—0,004	—0,003	—0,033	—0,0052
0,137.....	151	1,279	1,270	1,269	1,290	1,249	+0,007	+0,008	—0,009	+0,0234
	152	1,714	1,710	1,708	1,724	1,669	+0,008	+0,003	—0,006	+0,0262
	153	2,098	2,084	2,082	2,093	2,027	+0,007	+0,008	+0,002	+0,0338
	154	2,281	2,277	2,275	2,284	2,211	+0,002	+0,003	—0,001	+0,0307
	155	3,640	3,614	3,612	3,603	3,489	+0,007	+0,007	+0,010	+0,0415
	156	4,693	4,729	4,727	4,704	4,554	—0,008	—0,007	—0,002	+0,0296
	157	0,205	0,186	0,200	0,212	0,208	+0,093	+0,024	—0,034	—0,015
	158	0,497	0,516	0,526	0,541	0,531	—0,038	—0,058	—0,090	—0,068
	159	0,758	0,761	0,767	0,784	0,769	—0,004	—0,012	—0,034	—0,014
	160	1,128	1,140	1,140	1,159	1,138	—0,010	—0,010	—0,027	—0,009
0,188.....	161	1,488	1,479	1,473	1,496	1,468	+0,006	+0,010	—0,005	+0,013
	162	1,933	1,926	1,912	1,938	1,902	+0,004	+0,011	—0,002	+0,016
	163	2,506	2,515	2,491	2,522	2,476	—0,003	+0,006	—0,006	+0,012
	164	4,323	4,292	4,237	4,282	4,203	+0,007	+0,020	+0,009	+0,028
	165	4,928	4,952	4,886	4,936	4,845	—0,005	+0,008	—0,002	+0,017
			CONDUITES EN FONTE.							
0,2432....	166	0,307	0,313	0,307	0,314	0,313	—0,019	0,000	—0,023	—0,019
(Chargée	167	0,452	0,460	0,455	0,460	0,459	—0,018	—0,007	—0,018	—0,015
de dépôts.)	168	0,707	0,704	0,700	0,705	0,702	+0,004	+0,010	+0,003	+0,007

Tabla 114. Relación (Vexp. -V form.)/ Vform. (*Darcy*) continuación.

DIAMÈTRE des TUYAUX.	Nos d'ordre.	VITESSES d'après l'expérience.	VITESSES D'APRÈS LES FORMULES.				RAPPORTS ENTRE LES DIFFÉRENCES DES VITESSES déduites de l'expérience et de la formule, et les vitesses expérimentales.			
			1-2.	3-4.	5.	6.	1-2.	3-4.	5.	6.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
CONDUITES EN FONTE. (Suite.)										
		mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.				
0,2432.... (Chargée de dépôts.)	169	1,106	1,098	1,097	1,099	1,094	+0,007	+0,008	+0,006	+0,010
	170	1,547	1,550	1,552	1,550	1,544	—0,002	—0,003	—0,002	+0,002
	171	1,833	1,833	1,836	1,833	1,825	0,000	—0,002	0,000	+0,004
	172	2,073	2,076	2,080	2,076	2,068	—0,001	—0,003	—0,001	+0,002
	173	3,833	3,833	3,847	3,831	3,816	0,000	—0,004	+0,001	+0,004
0,2447.... (La même nettoyée.)	174	0,278	0,297	0,283	0,304	0,301	—0,068	—0,018	—0,093	—0,083
	175	0,537	0,535	0,524	0,542	0,536	+0,004	+0,024	—0,009	+0,002
	176	0,949	0,936	0,930	0,941	0,932	+0,0137	+0,0200	+0,0084	+0,0178
	177	1,420	1,430	1,430	1,433	1,419	—0,0070	—0,0070	—0,0091	+0,0007
	178	1,904	1,900	1,907	1,902	1,884	+0,0021	—0,0015	+0,0010	+0,0105
	179	2,206	2,204	2,215	2,205	2,184	+0,0009	—0,0040	+0,0004	+0,0100
	180	2,572	2,576	2,591	2,575	2,550	—0,0015	—0,0073	—0,0012	+0,0086
	181	4,497	4,497	4,539	4,491	4,447	0,0000	—0,0093	+0,0013	+0,0111
0,297..... (Nettoyée.)	182	0,244	0,259	0,247	0,262	0,261	—0,0615	—0,0123	—0,0738	—0,0697
	183	0,538	0,538	0,530	0,541	0,537	0,0000	+0,0149	—0,0055	+0,0018
	184	0,823	0,811	0,806	0,813	0,808	+0,0146	+0,0207	+0,0122	+0,0182
	185	1,155	1,147	1,147	1,149	1,142	+0,0069	+0,0069	+0,0051	+0,0112
	186	1,652	1,647	1,654	1,648	1,638	+0,0030	—0,0012	+0,0024	+0,0084
	187	2,390	2,381	2,398	2,381	2,365	+0,0037	—0,0033	+0,0037	+0,0105
	188	2,799	2,808	2,831	2,807	2,789	—0,0032	—0,0114	—0,0028	+0,0035
	189	3,160	3,165	3,193	3,163	3,143	—0,0015	—0,0104	—0,0009	+0,0054
0,50..... (Neuve.)	190-91	0,43475	0,4370	0,4228	0,4776	0,4701	—0,0051	+0,0274	—0,0984	—0,0812
	192	0,4752	0,5175	0,5057	0,5515	0,5428	—0,0890	—0,0641	—0,1605	—0,1423
	193	0,7932	0,7678	0,7647	0,7799	0,7676	+0,0320	+0,0359	+0,0167	+0,0323
	194	0,7951	0,7855	0,7830	0,7960	0,7834	+0,0120	+0,0152	—0,0011	+0,0147
	195	1,0412	1,0450	1,0528	1,0318	1,0154	—0,0036	—0,0111	+0,0090	+0,0248
	196	1,1135	1,0979	1,1078	1,0798	1,0627	+0,0140	+0,0051	+0,0303	+0,0456
	198	1,1278	1,1486	1,1606	1,1257	1,1079	—0,0184	—0,0290	+0,0017	+0,0176

Tabla 115. Relación (Vexp. -V form.)/ Vform. (Darcy) continuación.

Si se observan las columnas (8), (9), 10) y (11) del cuadro precedente, las cuales columnas dan las relaciones de las diferencias que existen entre las velocidades

experimentales y las deducidas de las fórmulas, y estas mismas velocidades experimentales, y las cuales formó por tubo, las medias de estos dividendos totalmente tomados con signo +, conforman el cuadro sinóptico siguiente:

DIAMÈTRE des TUYAUX.	NATURE DES TUYAUX.	NUMÉROS d'ordre.	MOYENNES DES RAPPORTS ENTRE LES ÉCARTS et les vitesses expérimentales des formules.				OBSERVATIONS.
			1-2.	3-4.	5.	6.	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	
mèt.							
0,0122	Fer étiré.....	1	0,0065	0,0090	0,0547	0,0416	Je n'ai pas compris dans ces moyennes les vitesses au-dessous de 0m,10, parce que, comme je l'ai déjà dit, et comme on le verra plus tard, une loi nouvelle lie aux pentes les vitesses inférieures à 0m,10.
0,0266	*Idem*.....	2	0,0113	0,0097	0,0427	0,0369	
0,0395	*Idem*.....	3	0,0190	0,0473	0,1120	0,0867	
0,014	Plomb.....	4	0,0734	0,0453	0,0731	0,0557	
0,027	*Idem*.....	5	0,0262	0,0575	0,1031	0,0963	
0,041	*Idem*.....	6	0,0382	0,0395	0,1116	0,0994	
0,0268	Tôle et bitume.....	7	0,0646	0,0571	0,1251	0,0932	
0,0826	*Idem*.....	8	0,0506	0,0258	0,1443	0,1192	
0,196	*Idem*.....	9	0,0858	0,0443	0,1397	0,0914	No he incluido en estas velocidades medias por debajo de 0,10 m/s, porque, como ya he dicho anteriormente, y como se verá más tarde, una nueva ley obliga a las pendientes las velocidades inferiores a 0,10 m/s.
0,285	*Idem*.....	10	0,0086	0,0072	0,0689	0,0606	
0,04968	Verre.....	11	0,0530	0,0234	0,0992	0,0768	
0,0359	Fonte (chargée de dépôts).	12	0,0066	0,0326	0,0065	0,0064	
0,0364	Fonte (nettoyée).....	13	0,0258	0,0148	0,0711	0,0661	
0,0795	Fonte (chargée de dépôts).	14	0,0080	0,0077	0,0330	0,0330	
0,0801	Fonte (nettoyée).....	15	0,0200	0,0150	0,0230	0,0250	
0,0819	Fonte (neuve).....	16	0,0350	0,0220	0,0380	0,0470	
0,137	*Idem*.....	17	0,0105	0,0100	0,0470	0,0487	
0,188	*Idem*.....	18	0,0180	0,0170	0,0232	0,0210	
0,2432	Fonte (chargée de dépôts).	19	0,0060	0,0040	0,0067	0,0080	
0,2447	Fonte (nettoyée).....	20	0,0121	0,0114	0,0154	0,0180	
0,297	*Idem*.....	21	0,0118	0,0101	0,0133	0,0161	
0,50	Fonte (neuve).....	22	0,0249	0,0268	0,0454	0,0512	

Tabla 116. Cuadro sinóptico de los valores positivos.

Del examen de las columnas (4), (5), (6) (7) demuestra, como se debía al resto de esperar, que la ecuación donde los coeficientes de V y V^2 se han calculado utilizando las fórmulas (Ecuación 187) y (Ecuación 188), equivalentes con las ecuaciones (3) y (4) según nomenclatura de *Darcy*, dan en general los mínimos valores para las relaciones medias. Se demuestra, al mismo tiempo, que los errores

medios son muy bajos, sea cual sea el método de cálculo que se ha recurrido, como la ecuación donde v entra sólo en la segunda potencia, y cuyo coeficiente único ha sido calculado por la fórmula (Ecuación 193), ecuación (6) según nomenclatura de *Darcy*, ofrece resultados casi coincidentes con los proporcionados por las ecuaciones (Ecuación 187) y (Ecuación 188) (3 y 4 según Informe de *Darcy*). Esta coincidencia existe principalmente para los tubos recubiertos de una capa de depósitos; de donde se puede deducir, como consecuencia el resto ya presentado, que, en la práctica donde los tubos se recubren rápidamente de lima, tubérculos o de depósitos calcáreos, es preferible, a razón de la facilidad resultante para los cálculos, utilizar la fórmula monómica.

El siguiente paso que dio fue el de precisar la influencia de las superficies en los tubos del mismo diámetro, y los radios de los tubos en las conducciones donde las paredes presentan más o menos un grado igual de pulido.

Para ello se sirvió de los coeficientes deducidos de la fórmula (Ecuación 193), cuya exactitud acaba de ser comprobada.

En la siguiente Tabla 117**,** observó los resultados de los coeficientes de resistencia deducidos con anterioridad y llegó a la conclusión que, en los tubos recubiertos de asfalto, de fundición nueva, fundición recubierta con depósitos, este varia aproximadamente según las relaciones 1, 1,5 y 3; la fundición recubierta de depósitos presenta a la salida una resistencia que casi duplica a la de la fundición nueva.

TABLEAU INDIQUANT L'INFLUENCE DU DEGRÉ DE POLI DES SURFACES.

	TÔLE ET BITUME. D = 0,196	FONTE NEUVE. D = 0.188	FONTE RECOUVERTE DE DÉPÔTS. D = 0,2432	OBSERVATIONS.
Coefficient de la résistance..	0,000,433,990	0,000,584,393	0,001,167,779	

Tabla 117. Cuadro sobre la influencia del grado de pulido de superficies

La siguiente (Tabla 118) se diseñó para observar la influencia de los radios de los tubos del mismo grado de pulido sobre el coeficiente de resistencia:

TABLEAU INDIQUANT L'INFLUENCE DES RAYONS DES TUYAUX DE MÊME DEGRÉ DE POLI SUR LE COEFFICIENT DE LA RÉSISTANCE.

NATURE DES TUYAUX.	NUMÉROS d'ordre.	DIAMÈTRE.	COEFFICIENT DE LA RÉSISTANCE.	OBSERVATIONS.
		mèt.		
Fer étiré.....	1	0,0122	0,001,673	
	2	0,0266	0,000,918	
	3	0,0395	0,000,785	
Fonte.....	16	0,0819	0,000,695	
	17	0,137	0,000,553	
	18	0,188	0,000,584	
	21	0,297	0,000,612	
	22	0,50	0,000,509	

Tabla 118. Cuadro indicativo influencia de los radios de los tubos del mismo grado de pulido sobre el coeficiente de resistencia

En esta serie de coeficientes, el que corresponde al tubo de 0,137 m está por debajo del valor que debía seguir a medida que aumentan los diámetros en la tabla, mientras que el del tubo de 0,297 m es superior a ese valor, cuando debía de estar por debajo. *Darcy* al constatar el tubo de 0,137 de fundición observó que tenía un notable grado de pulido, mientras que en contraposición la tubería de 0,297 metros

ya había servido, y no era más que un tubo limpiado cuidadosamente; su superficie era por tanto menos clara que la otra, y, por otra parte, solo la más mínima causa al respecto para hacer variar la resistencia al flujo.

Esta anomalía la achacó a que, si se realiza una experiencia con un tubo no oxidado, y se renueva dos o tres días más tarde, cuando los rastros de óxido unten la pared, el coeficiente de resistencia crecerá notablemente, luego volverá a su estado inicial en consecuencia de la circulación rápida de los caudales, durante la cual el agua roja demuestra que provocó las causas del crecimiento de la resistencia.

Siempre procuró operar sin discontinuidad por la misma tubería, o colocarla por lavado en las mismas circunstancias.

En la tubería de 0,50, que circulaban 219 l/s tuvo dificultad de tomar todas las precauciones, ya que los depósitos de agua se vaciaban tan rápidamente, que era complicado coordinar el suministro de agua a París y los experimentos a realizar, por lo que estos se realizaron en diferentes momentos.

Darcy procuró en diferentes ocasiones comenzar los experimentos, con el fin de multiplicar los datos experimentales que más se adecuaran a los resultados, ya que las velocidades influían en la limpieza de las paredes y por lo tanto en los coeficientes de resistencia.

En el tubo de 0,50 m de diámetro colocó todas las experiencias sobre las tablas, sin omitir ninguna, para la búsqueda del coeficiente de la resistencia en la ecuación donde se conserva solo la segunda potencia de la velocidad.

Pero en la ecuación en función de v y v2 la introducción de las primeras experiencias aumentó demasiado el coeficiente de v aplastando la curva.

*Darc*y comprobó que, en el último resultado, esto no altera sustancialmente el valor definitivo de la velocidad, porque si el coeficiente de la primera potencia aumenta, el del segundo es disminuido.

Consideró que era indispensable tomar en consideración las observaciones que preceden, cuando se trata de determinar la ley que vincula a los coeficientes de v y v2 en tuberías de diferentes radios.

Hasta ahora se ha visto la influencia de la superficie sobre la resistencia, y que el coeficiente relativo a la fundición, por ejemplo, doblaba en los tubos sobre las superficies en las que se habían formado depósitos.

A estos efectos, *Darcy* especificó que cuando se tratara del cálculo de una distribución de agua, había que considerar este último coeficiente, ya se emplee tubos en chapa y asfalto o plomo, ya que es en definitiva sobre la pared untada con depósitos que las aguas acabarán por fluir.

Al realizar la búsqueda del valor de los coeficientes de v y v2 con respecto del diámetro de las conducciones, empezó por la ecuación donde v entraba solo la segunda potencia.

Después de haber buscado la ley más simple, y la que parecía satisfacer mejor a los datos de la última tabla, llegó a la expresión:

$$b_1 = \alpha + \frac{\beta}{R}$$ **Ecuación 194**

b_1 representa el coeficiente a sustituir para un tubo de radio R.

α y β son dos números constantes.

El término $\frac{\beta}{R}$ disminuye cuando el radio aumenta, desde el momento en que se puede eliminar de forma segura, el coeficiente b_1 en la fórmula se vuelve constante e igual a α.

Se determinan ahora los coeficientes α y β después de haber convertido la ecuación anterior a la forma lineal multiplicando sus dos miembros por R.

$$R\,b_1 = \alpha R + \beta$$ **Ecuación 195**

y haciendo:

$$R\,b_1 = z$$ **Ecuación 196**

Se obtiene

$$z = \alpha R + \beta$$ **Ecuación 197**

De donde

$$\delta = \alpha\, R + \beta - z$$ **Ecuación 198**

que dividiendo por z quedaría

$$\frac{\delta}{z} = \alpha \frac{R}{z} + \frac{\beta}{z} - 1$$ **Ecuación 199**

Y se llega a los valores de

α y β

$$\alpha = \frac{\sum \frac{1}{R\gamma} \times \sum \frac{1}{R\gamma^2} - \sum \frac{1}{\gamma} \times \sum \frac{1}{R^2\gamma^2}}{\sum \left(\frac{1}{R\gamma^2}\right)^2 - \sum \left(\frac{1}{\gamma^2}\right) \times \sum \frac{1}{R^2\gamma^2}}$$ **Ecuación 200**

$$\beta = \frac{\sum \frac{1}{R\gamma^2} \times \sum \frac{1}{\gamma} - \sum \left(\frac{1}{\gamma^2}\right) \times \sum \frac{1}{R\gamma}}{\sum \left(\frac{1}{R\gamma^2}\right)^2 - \sum \left(\frac{1}{\gamma^2}\right) \times \sum \frac{1}{R^2\gamma^2}}$$ **Ecuación 201**

R = radio de la tubería

γ =las resistencias b_1 variables con el radio en tuberías que tienen aproximadamente el mismo grado de pulimento.

Sustituyendo, en lugar de R y de γ los ocho datos experimentales de la tabla anterior, se tendrá para los valores de α y β:

α = 0,000502

β = 0,00000636

La siguiente Tabla 119 muestra los valores de b_1, correspondientes a las deducidas de la experiencia y de la fórmula para las ocho radios.

DIAMÈTRES.	VALEURS DE b_1 DÉDUITES DE L'EXPÉRIENCE.	VALEURS DE b_1 DÉDUITES DE L'INTERPOLATION.	OBSERVATIONS.
mèt.			Voir l'observation placée dans la colonne (6) du tableau suivant, en ce qui concerne l'expression qui donne les différentes valeurs de b_1.
0,0122	0,001,673	0,001,568	
0,0266	0,000,918	0,000,993	
0,0395	0,000,785	0,000,835	
0,0819	0,000,695	0,000,665	
0,137	0,000,553	0,000,601	Ver la observación colocada en la columna
0,188	0,000,584	0,000,576	(6) del cuadro, en cuanto a la expresión
0,297	0,000,612	0,000,551	que da los diferentes valores de b1.
0,50	0,000,509	0,000,532	

Tabla 119. Valores de b1, correspondiente a las deducidas de la experiencia y de la fórmula para las ocho radios.

DIAMETROS	RADIOS
0,0122	0,0061
0,0266	0,0133
0,0395	0,01975
0,0819	0,04095
0,137	0,0685
0,188	0,094
0,297	0,1485
0,5	0,25

Tabla 120. Cuadro Diámetros - radios correspondientes.

Darcy resaltó que las desviaciones relativas a los tubos de 0,137 m y de 0,297 m sobrepasan bastante notablemente a los otros, y que debía de ser así, según las observaciones que tuvo la oportunidad de hacer sobre estos tubos.

Darcy construyó la siguiente Tabla 121 con los valores de b_1, b_1/R, $\sqrt{(R/b_1)}$ para los diámetros desde 0,01 m hasta 1 metro.

DIAMÈTRES. (1)	RAYONS. (2)	b_1. (3)	$\frac{b_1}{R}$. (4)	$\sqrt{\frac{R}{b_1}}$. (5)	OBSERVATIONS. (6)
mèt.	mèt.				
0,01	0,005	0,001,801	0,360,20	1,666	NOTA. Nous venons de poser pour calculer les valeurs de b_1, la formule $b_1 = 0{,}00051 + \frac{0{,}0000065}{R}$ où il n'entre que deux chiffres significatifs; mais, en fait, tous les calculs ont été effectués au moyen de la formule $b_1 = 0{,}000507 + \frac{0{,}00000647}{R}$ déduite de procédés graphiques, et presque identique à celle obtenue par la méthode des moindres carrés. Si l'on a compris, dans ce tableau, les diamètres 0,027, 0,054, 0,081, 0,108, 0,135, 0,162, 0,216, 0,325, c'est qu'ils sont employés dans la fourniture d'eau de Paris.
0,02	0,01	0,001,154	0,115,40	2,943	
0,027	0,0135	0,000,986	0,073,056	3,699	
0,03	0,015	0,000,938	0,062,555	3,998	
0,04	0,02	0,000,830	0,041,525	4,907	
0,05	0,025	0,000,765	0,030,632	5,713	
0,054	0,027	0,000,746	0,027,653	6,013	
0,06	0,03	0,000,722	0,024,089	6,443	
0,07	0,035	0,000,691	0,019,767	7,112	
0,08	0,04	0,000,668	0,016,718	7,733	
0,081	0,0405	0,000,666	0,016,463	7,793	
0,09	0,045	0,000,650	0,014,461	8,315	
0,10	0,05	0,000,636	0,012,728	8,863	
0,108	0,054	0,000,626	0,011,607	9,231	
0,11	0,055	0,000,624	0,011,357	9,383	
0,12	0,06	0,000,614	0,010,247	9,878	
0,13	0,065	0,000,606	0,009,331	10,352	
0,135	0,067	0,000,602	0,008,931	10,581	
0,14	0,07	0,000,599	0,008,563	10,806	
0,15	0,075	0,000,593	0,007,910	11,243	
0,16	0,08	0,000,587	0,007,348	11,665	

Tabla 121. Valores de b1, b1/R, $\sqrt{\frac{R}{b1}}$ para los diámetros después 0,01 m hasta 1 metro.

Nota. Nous venons de poser pour calcular les valeurs de b1, la formule	Nota. Acabamos de plantear para calcular los valores de b1, la fórmula
$b_1 = 0{,}00051 + \frac{0{,}0000065}{R}$	$b_1 = 0{,}00051 + \frac{0{,}0000065}{R}$
Où il n'entre que deux chiffres significatifs; mais, en fait, tous les calculs ont été effectués au moyen de la formule	Donde entra sólo dos cifras significativas; pero de hecho, todos los cálculos se realizaron usando la fórmula
$b_1 = 0{,}000507 + \frac{0{,}00000647}{R}$	$b_1 = 0{,}000507 + \frac{0{,}00000647}{R}$
Déduite de procédée graphiques, et presque identique à celle obtenue par la méthode des moindres carrés.	Deducida a partir de métodos gráficos, y casi idéntica a la obtenida por el método de los mínimos cuadrados.
Si l'on a compris, dans ce tableau, les diamètres 0,027, 0,054,0,081,0,108,0,135,0,162,0,216,0,325 c'est qu'ils sont employés dans la forniture d'eau de Paris.	Si se ha comprendido, en este cuadro, los diámetros 0,027, 0,054,0,081,0,108,0,135,0,162,0,216,0,325 es que se utilizan en la forniture de agua de París.

Ilustración 66. Traducción del contenido apartado observaciones de la Tabla 121.

DIAMÈTRES. (1)	RAYONS. (2)	b_1. (3)	$\frac{b_1}{R}$. (4)	$\sqrt{\frac{R}{b_1}}$. (5)	OBSERVATIONS. (6)
mèt.	mèt.				
0,162	0,081	0,000,586	0,007,245	11,748	
0,17	0,085	0,000,583	0,006,860	12,073	
0,18	0,09	0,000,578	0,006,432	12,468	
0,19	0,095	0,000,575	0,006,053	12,705	
0,20	0,10	0,000,571	0,005,717	13,225	
0,21	0,105	0,000,568	0,005,415	13,588	
0,216	0,108	0,000,566	0,005,249	13,802	
0,22	0,11	0,000,565	0,005,143	13,943	
0,23	0,115	0,000,563	0,004,897	14,288	
0,24	0,12	0,000,560	0,004,674	14,626	
0,25	0,125	0,000,558	0,004,470	14,956	
0,26	0,13	0,000,556	0,004,282	15,280	
0,27	0,135	0,000,554	0,004,110	15,597	
0,28	0,14	0,000,553	0,003,951	15,908	
0,29	0,145	0,000,551	0,003,804	16,213	
0,30	0,15	0,000,550	0,003,667	16,512	
0,31	0,155	0,000,548	0,003,540	16,806	
0,32	0,16	0,000,547	0,003,421	17,095	
0,325	0,1625	0,000,546	0,003,365	17,238	
0,33	0,165	0,000,546	0,003,310	17,380	
0,34	0,17	0,000,545	0,003,206	17,660	
0,35	0,175	0,000,543	0,003,108	17,936	
0,36	0,18	0,000,542	0,003,016	18,207	
0,37	0,185	0,000,541	0,002,929	18,475	
0,38	0,19	0,000,541	0,002,847	18,739	
0,39	0,195	0,000,540	0,002,770	18,999	
0,40	0,20	0,000,539	0,002,696	19,256	
0,41	0,205	0,000,538	0,002,627	19,510	
0,42	0,21	0,000,537	0,002,561	19,760	
0,43	0,215	0,000,537	0,002,498	20,007	
0,44	0,22	0,000,536	0,002,438	20,251	
0,45	0,225	0,000,535	0,002,381	20,493	
0,46	0,23	0,000,535	0,002,326	20,731	
0,47	0,235	0,000,534	0,002,274	20,967	
0,48	0,24	0,000,533	0,002,224	21,200	
0,49	0,245	0,000,533	0,002,177	21,431	
0,50	0,25	0,000,532	0,002,131	21,659	
0,55	0,275	0,000,530	0,001,929	22,767	
0,60	0,30	0,000,528	0,001,761	23,823	
0,65	0,325	0,000,526	0,001,621	24,835	
0,70	0,35	0,000,525	0,001,501	25,807	
0,75	0,375	0,000,524	0,001,398	26,745	
0,80	0,40	0,000,523	0,001,307	27,650	
0,85	0,425	0,000,522	0,001,228	28,527	
0,90	0,45	0,000,521	0,001,158	29,378	
0,95	0,475	0,000,520	0,001,096	30,205	
1,00	0,50	0,000,519	0,001,039	31,010	

Tabla 122. Valores de b1, b1/R, $\sqrt{\frac{R}{b1}}$ para los diámetros después 0,01 m hasta 1 metro (continuación).

Aconsejó que no conviene hacer uso, en las distribuciones, de tubos que estén por debajo de 0,06 m de diámetro; este mismo calibre debe ser empleado sólo excepcionalmente, debido a los depósitos que se agazapan prontamente en las paredes; su opinión fue que debe fijarse en 0,08 m. (No se refería a tubos de plomo de 0,027 m a 0,04 del diámetro destinados a la alimentación de las fuentes y a las distribuciones interiores.)

Por otra parte, el límite que adoptó en su momento hasta ese momento para los diámetros superiores fue de 1 metro.

Los coeficientes de la resistencia que están para los tubos de 0,06 m son de 0,00072267 y para los de 1 metro de 0,00051994, por lo que la relación máxima entre los coeficientes y las resistencias es de 72/52. Pero se acerca rápidamente a la unidad.

Cuando se utiliza con más frecuencia diámetros que varían entre 0,12 m y 0,30 m, esta relación se convierte en 61/55.

Además, las velocidades, entre ellas son como las raíces cuadradas del numerador y el denominador, es decir, como 7,81 es a 7,42, no hay gran inconveniente en considerar como constante, dentro de estos límites, el mayor coeficiente, si la simplificación de los cálculos de la distribución de agua lo exigía.

Darcy al principio de su libro de memorias dio la ecuación calculada por *Prony* cuando se emplea sólo la segunda potencia de v^2 para evaluar las resistencias.

Esta ecuación es la (Ecuación 137):

$$v = 26{,}79\sqrt{DJ}$$

Se corresponde con el diámetro de 0,10 m para lo que el coeficiente de arrastre es 0,0006364.

Pues es muy natural que esta fórmula dé, por debajo y por encima de este diámetro, productos, o sea más bajos, o más altos que los resultados de las experiencias.

En consecuencia, diseñó tablas calculadas usando la tabla de valores de

$$b_1, \frac{b_1}{R}, \sqrt{\frac{R}{b_1}}$$

Estas tablas incluyen todos los tubos enumerados en este cuadro, y velocidades de uno en un cm/s entre 0,10 m/s y 0,50 m/s.

De dos en dos cm/s entre 0,50 m/s y 2 m/s y finalmente de cinco en cinco cm/s entre 2 y 3 m/s.

Ellas terminan en la velocidad de 3 m/s. Pero como sus experiencias llegan a la velocidad de 6 m/s, se comprende que se puede recurrir a las fórmulas de al menos hasta esta última.

La conclusión a lo que se refieren estas tablas vienen derivadas por dos observaciones prácticas.

Primera observación. - En virtud de los hechos anteriormente demostrados, conviene, cuando se busca la pendiente que corresponde a una velocidad determinada, de doblar esta pendiente en la práctica, o, si la pendiente es dada, de dividirla por dos, y a contar sólo la velocidad que corresponde al cociente de esta división. Así, se tendrá en cuenta el retraso que los depósitos infringen a la velocidad.

Segunda observación. - La segunda observación. - pero, independientemente de este retraso que proviene de asperezas de las paredes, existe otra causa que debilita el volumen del flujo: es debida al espesor de la capa depositada.

Para remediar esto, es importante, de acuerdo con la naturaleza del agua para conducir, el aumento de los diámetros encontrados ya que dicha capa disminuye el diámetro original de los mismos.

La siguiente investigación que realizó *Darcy* fue la deducción de las fórmulas de interpolación para los coeficientes de la primera y segunda potencias de v en la ecuación general (Ecuación 164) **y** (Ecuación 165),

$$Ri = av + bv^2$$

Partió de la tabla de composición de los valores deducidos de la experiencia:

NATURE DES TUYAUX.	NUMÉROS d'ordre.	DIAMETRE.	COEFFICIENT DE v.	COEFFICIENT DE v^2.	OBSERVATIONS.
		mét.			
Fer étiré	1	0,0122	0,000,142,235	0,001,361,42	
	2	0,0266	0,000,048,486	0,000,840,034	
	3	0,0395	0,000,037,832	0,000,697,592	
Fonte	16	0,0819	0,000,044,881	0,000,634,45	
	17	0,137	0,000,038,825	0,000,505,527	
	18	0,188	0,000,012,276	0,000,572,07	
	21	0,297	0,000,023,508	0,000,585,53	
	22	0,50	0,000,100,482	0,000,387,113	

Tabla 123. Coeficientes de las v y v2 para interpolar.

El examen de este cuadro da lugar a varias observaciones:

1. Se entiende que el coeficiente de v^2 del tubo de 0, 137 debe ser demasiado pequeño a causa del hecho que ya hemos informado, a saber: que este tubo salía de las fundiciones y presentaba una superficie perfectamente limpia.
2. Que en el tubo de 0,50 el coeficiente de la primera potencia de la velocidad tenía un valor relativo demasiado fuerte, en comparación con el coeficiente de la segunda potencia de la velocidad, dado que las experiencias (del 5 de agosto), por las razones que indico, han dado para las pequeñas velocidades de los valores demasiado bajos, lo que, en particular, incluyen el aumento del coeficiente de v, y la disminución al mismo tiempo el de v^2.

Por lo tanto, es apropiado buscar de nuevo los coeficientes a y b utilizando sólo los experimentos realizados en exactamente las mismas circunstancias, para obtener un informe tan preciso como sea posible entre los factores mencionados.

Así pues, empezó de nuevo los cálculos de las fórmulas (Ecuación 187) y (Ecuación 188) introduciendo allí sólo los datos siguientes:

i	*v*	DATES.
0m,000,45	0m,4488	29 juillet,
0 ,000,12	0 ,7932	29 juillet,
0 ,000,21	1 ,0412	5 août[1],
0 ,000,23	1 ,1135	2 août,
0 ,000,25	1 ,2278	29 juillet,
0 ,000,26	1 ,1197	5 août,

Tabla 124. Datos para deducir los coeficientes a y b.

De donde

a = 0,000049780

b = 0,000438124

3. El tubo de 0,297 m. era, como se observó, un tubo bien limpiado, pero no un tubo nuevo: el coeficiente de la segunda potencia debía pues ser excesivamente alto, y el de la primera potencia demasiado bajo; observamos constantemente, en efecto, que cuanto más crecen las asperezas, más disminuyen al mismo tiempo los coeficientes de v.
4. Por fin, como se había llevado las experiencias en el tubo de 0,188 m hasta una velocidad media de 4,928 m/s comprendemos que las altas velocidades debían obtener en la formación de la ecuación de la curva una influencia que naturalmente se traducía por la disminución desproporcionada del coeficiente de v.

Del resto, cabe destacar que las fórmulas (Ecuación 180) y (Ecuación 186) que cambian en un sentido adecuado el informe de los coeficientes a y b, presentan para

las velocidades teóricas exactamente el mismo grado de aproximación; se pueden aplicar los coeficientes:

a = 0,000034154

b = 0,000552448

El cuadro de datos para calcular las leyes existentes entre los coeficientes de la primera potencia de v, por una parte, y de la segunda potencia v^2 por otra parte, se convertirá, por lo tanto:

[1] He conservado los resultados del 5 y 2 de agosto, porque los lavados operado por las experiencias anteriores habían retirado suficientemente todas las asperezas de óxido.

NATURE DES TUYAUX.	NUMÉROS d'ordre.	DIAMÈTRE.	COEFFICIENT DE		OBSERVATIONS.
			v. (a)	v^2. (b)	
		mèt.			
Fer étiré.....	1	0,0122	0,000,142,255	0,001,361,42	
	2	0,0266	0,000,048,486	0,000,840,034	
	3	0,0395	0,000,037,382	0,000,697,532	
Fonte.....	16	0,0819	0,000,044,881	0,000,634,45	
	17	0,137	0,000,038,825	0,000,505,527	
	18	0,188	0,000,034,145	0,000,552,448	
	21	0,297	0,000,023,508	0,000,585,53	
	22	0,500	0,000,049,780	0,000,438,124	

Tabla 125. Nuevos coeficientes de a y b correspondientes a v y v2.

Interpoló estos resultados para los coeficientes de v^2, y utilizó la fórmula:

$$b = \alpha + \frac{\beta}{R}$$ **Ecuación 202**

Para los coeficientes de v, utilizó la siguiente:

$$a = \alpha' + \frac{\beta'}{R^2}$$ **Ecuación 203**

Esta diferencia de ambas fórmulas de interpolación puede, como se verá más tarde, recibir una interpretación satisfactoria.

Haciendo pues en las fórmulas:

$$\alpha = \frac{\sum \frac{1}{R\gamma} \times \sum \frac{1}{R\gamma^2} - \sum \frac{1}{\gamma} \times \sum \frac{1}{R^2\gamma^2}}{\sum \left(\frac{1}{R\gamma^2}\right)^2 - \sum \left(\frac{1}{\gamma^2}\right) \times \sum \frac{1}{R^2\gamma^2}}$$ (**Ecuación 200**)

$$\beta = \frac{\sum \frac{1}{R\gamma^2} \times \sum \frac{1}{\gamma} - \sum \left(\frac{1}{\gamma^2}\right) \times \sum \frac{1}{R\gamma}}{\sum \left(\frac{1}{R\gamma^2}\right)^2 - \sum \left(\frac{1}{\gamma^2}\right) \times \sum \frac{1}{R^2\gamma^2}}$$ (**Ecuación 201**)

$$\alpha' = \frac{\sum \frac{1}{R^2\gamma} \times \sum \frac{1}{R^2\gamma^2} - \sum \frac{1}{\gamma} \times \sum \frac{1}{R^4\gamma^2}}{\sum \left(\frac{1}{R^2\gamma^2}\right)^2 - \sum \left(\frac{1}{\gamma^2}\right) \times \sum \frac{1}{R^4\gamma^2}}$$ **Ecuación 204**

$$\beta' = \frac{\sum \frac{1}{R^2\gamma^2} \times \sum \frac{1}{\gamma} - \sum \left(\frac{1}{\gamma^2}\right) \times \sum \frac{1}{R^2\gamma^2}}{\sum \left(\frac{1}{R^2\gamma^2}\right)^2 - \sum \left(\frac{1}{\gamma^2}\right) \times \sum \frac{1}{R^4\gamma^2}}$$ **Ecuación 205**

Las sustituciones deducidas de los datos experimentales, obtuvo:

α = 0,000442939

β = 0,000006201

$$\begin{cases} \alpha' = 0{,}000031635 \\ \beta' = 0{,}0000000037556 \end{cases}$$

De donde se obtiene:

$$a = 0{,}000031635 + \frac{0{,}0000000037556}{R^2}$$ **Ecuación 206**

$$b = 0{,}000442939 + \frac{0{,}000006201}{R}$$ **Ecuación 207**

Darcy puso en el sitio de R sus valores sucesivos, y construyó la siguiente Tabla 126:

NATURE DES TUYAUX.	NUMÉROS d'ordre.	DIAMÈTRE DES TUYAUX.	VALEURS DE *a* expérimentales.	VALEURS DE *a* d'après la formule.	VALEURS DE *b* expérimentales.	VALEURS DE *b* d'après la formule.
		mèt.				
Fer étiré...	1	0,0122	0,000,142,255	0,000,132,562	0,001,361,42	0,001,459,419
	2	0,0266	0,000,048,486	0,000,052,866	0,000,840,034	0,000,909,146
	3	0,0395	0,000,037,832	0,000,041,263	0,000,697,532	0,000,756,691
Fonte.....	16	0,0819	0,000,044,881	0,000,033,874	0,000,634,45	0,000,594,537
	17	0,137	0,000,038,825	0,000,032,435	0,000,505,527	0,000,533,458
	18	0,188	0,000,034,145	0,000,032,060	0,000,552,448	0,000,508,903
	21	0,297	0,000,023,508	0,000,031,805	0,000,585,53	0,000,484,685
	22	0,500	0,000,049,780	0,000,031,695	0,000,438,124	0,000,467,741

Tabla 126. Coeficientes de a y b correspondientes a v y v2 sustituyendo el radio R en las fórmulas (200) y (201)

[1] recordamos que γ representa los valores sucesivos de los coeficientes de v y v2.

Dio la serie de valores de a y b corresponden a todos los radios incluidos en sus tablas:

DIAMÈTRES.	RAYONS.	*a*. (1)	*b*. (2)	a_1. (3)	OBSERVATIONS.
mèt.	mèt.				
0,01	0,005	0,000,181,854	0,001,683,039	0,000,178,824	Les valeurs a_1 de la colonne 3 se rapportent, comme on va le voir, aux vitesses au-dessous de 0m,10 et données par l'équation $Ri = a_1 v$ dans les tuyaux de petit diamètre.
0,02	0,01	0,000,069,189	0,001,062,989	0,000,103,735	
0,027	0,0135	0,000,052,240	0,000,902,239	0,000,084,268	
0,03	0,015	0,000,048,325	0,000,856,309	0,000,078,705	
0,04	0,02	0,000,041,023	0,000,752,969	0,000,066,191	
0,05	0,025	0,000,037,643	0,000,690,959	0,000,058,682	
0,054	0,027	0,000,036,786	0,000,672,589	0,000,056,457	
0,06	0,03	0,000,035,807	0,000,649,619	0,000,053,676	
0,07	0,035	0,000,034,700	0,000,620,099	0,000,050,100	Valores a_1 en la columna 3 se refieren, como se verá, a velocidades inferiores a 0,10 m y datos por la ecuación $R = a_1 v$ en tuberías de pequeño diámetro.
0,08	0,04	0,000,033,981	0,000,597,949	0,000,047,419	
0,081	0,0405	0,000,033,924	0,000,596,039	0,000,047,187	
0,09	0,045	0,000,033,489	0,000,580,729	0,000,045,333	
0,10	0,05	0,000,033,136	0,000,566,949	0,000,043,664	
0,108	0,054	0,000,032,922	0,000,557,759	0,000,042,552	
0,11	0,055	0,000,032,876	0,000,555,679	0,000,042,299	
0,12	0,06	0,000,032,677	0,000,546,279	0,000,041,161	
0,13	0,065	0,000,032,523	0,000,538,332	0,000,040,199	
0,135	0,0675	0,000,032,458	0,000,534,799	0,000,039,771	
0,14	0,07	0,000,032,401	0,000,531,518	0,000,039,373	
0,15	0,075	0,000,032,302	0,000,525,613	0,000,038,658	
0,16	0,08	0,000,032,221	0,000,520,446	0,000,038,033	
0,162	0,031	0,000,032,207	0,000,519,489	0,000,037,917	
0,17	0,085	0,000,032,154	0,000,515,887	0,000,036,980	
0,18	0,09	0,000,032,098	0,000,511,834	0,000,036,990	
0,19	0,095	0,000,032,050	0,000,508,208	0,000,036,551	
0,20	0,10	0,000,032,010	0,000,504,944	0,000,036,155	
0,21	0,105	0,000,031,975	0,000,501,992	0,000,035,798	
0,216	0,108	0,000,031,956	0,000,500,351	0,000,035,599	
0,22	0,11	0,000,031,945	0,000,499,308	0,000,035,473	
0,23	0,115	0,000,031,918	0,000,496,857	0,000,035,176	
0,24	0,12	0,000,031,895	0,000,494,610	0,000,034,904	
0,25	0,125	0,000,031,875	0,000,492,543	0,000,034,654	
0,26	0,13	0,000,031,856	0,000,490,636	0,000,034,422	
0,27	0,135	0,000,031,840	0,000,488,869	0,000,034,209	
0,28	0,14	0,000,031,826	0,000,487,229	0,000,034,010	
0,29	0,145	0,000,031,813	0,000,485,701	0,000,033,825	
0,30	0,15	0,000,031,801	0,000,484,276	0,000,033,652	
0,31	0,155	0,000,031,791	0,000,482,943	0,000,033,491	
0,32	0,16	0,000,031,781	0,000,481,692	0,000,033,339	
0,325	0,1625	0,000,031,776	0,000,481,096	0,000,033,267	
0,33	0,165	0,000,031,772	0,000,480,518	0,000,033,197	
0,34	0,17	0,000,031,764	0,000,479,413	0,000,033,063	
0,35	0,175	0,000,031,757	0,000,478,371	0,000,032,937	

Tabla 127. Coeficientes de a y b correspondientes a todos los radios.

DIAMÈTRES.	RAYONS.	a. (1)	b. (2)	a_1. (3)	OBSERVATIONS.
mèt.	mèt.				
0,36	0,18	0,000,031,750	0,000,477,386	0,000,032,818	
0,37	0,185	0,000,031,744	0,000,476,455	0,000,032,705	
0,38	0,19	0,000,031,738	0,000,475,573	0,000,032,598	
0,39	0,195	0,000,031,733	0,000,474,737	0,000,032,497	
0,40	0,20	0,000,031,728	0,000,473,942	0,000,032,401	
0,41	0,205	0,000,031,724	0,000,473,186	0,000,032,309	
0,42	0,21	0,000,031,719	0,000,472,465	0,000,032,222	
0,43	0,215	0,000,031,715	0,000,471,779	0,000,032,139	
0,44	0,22	0,000,031,712	0,000,471,123	0,000,032,060	
0,45	0,225	0,000,031,708	0,000,470,497	0,000,031,984	
0,46	0,23	0,000,031,705	0,000,469,898	0,000,031,911	
0,47	0,235	0,000,031,702	0,000,469,324	0,000,031,842	
0,48	0,24	0,000,031,699	0,000,468,775	0,000,031,775	
0,49	0,245	0,000,031,697	0,000,468,247	0,000,031,711	
0,50	[illegible]	0,000,031,694	0,000,467,741	0,000,031,650	
0,55	0,275	0,000,031,684	0,000,465,486	0,000,031,377	
0,60	0,30	0,000,031,676	0,000,463,607	0,000,031,149	
0,65	0,325	0,000,031,670	0,000,462,018	0,000,030,957	
0,70	0,35	0,000,031,665	0,000,460,655	0,000,030,792	
0,75	0,375	0,000,031,661	0,000,459,474	0,000,030,549	
0,80	0,40	0,000,031,658	0,000,458,440	0,000,030,524	
0,85	0,425	0,000,031,655	0,000,457,529	0,000,030,413	
0,90	0,45	0,000,031,653	0,000,456,718	0,000,030,315	
0,95	0,475	0,000,031,651	0,000,455,993	0,000,030,227	
1,00	0,50	0,000,031,649	0,000,455,340	0,000,030,148	

Tabla 128. Coeficientes de a y b correspondientes a todos los radios (continuación).

Hasta cierto punto se podía explicar por qué existe una diferencia en la expresión algébrica que representa los decrecimientos de los coeficientes de la primera y de la segunda potencia de v, a partir del diámetro de 0,0122 m.

Es natural, en efecto, que el decrecimiento del primero sea más rápido, porque, a las verdaderas causas que originan estas reducciones, viene a añadir la resultante de lo que, en las grandes velocidades, las fórmulas de interpolación tienden a sacrificar el primer coeficiente en el segundo, en este punto, que a partir de cierta velocidad el valor del caudal no parece verse afectada por la supresión del primer término.

Como vio más tarde que, dirigiendo las experiencias para obtener sólo velocidades muy bajas, el coeficiente del primer término repetirá su carácter, y que hasta la ley algébrica de su decrecimiento reaparecerá bajo la forma:

$$a_1 = \alpha' + \frac{\beta'}{R}$$ **Ecuación 208**

En la que

$$\begin{cases} \alpha' = 0{,}000028647 \\ \beta' = 0{,}000000751 \end{cases}$$

Son los valores deducidos de la fórmula anterior que son indicados en la columna (3) del cuadro precedente.

La similitud de las columnas (1) y (3), a partir del diámetro de 0,15, hace uso indiferente de uno o el otro. Pero tiene más sentido usar los valores en la columna (1), ya que se unen a los de la columna (2) por medio de la interpolación.

Sólo habrá que recurrir a los de la columna (3) cuando las velocidades no excedan de 0,10 m/s en tuberías de paredes suficientemente lisas: entonces evidentemente habrá que tomar en consideración el término v^2; velocidad dada en esta circunstancia, como veremos más adelante, por una expresión de la forma:

$$Ri = a_1 v$$ **Ecuación 209**

También se observará, echando un vistazo en la tabla de valores de a y b, que los coeficientes de la primera potencia se aproximan muy rápidamente a la uniformidad. También ocurre lo mismo en los de la segunda, aunque a un menor grado.

En las aplicaciones, será muy posible observar los coeficientes a y b como constante dentro de los límites que serán considerados, siempre y cuando no actúe en tubos de diámetro muy pequeño, a los que además raramente se recurre en las aplicaciones, excepto para el caso especial de alimentación de las fuentes.

La fórmula *Prony* (Ecuación 135), se informó en el primer capítulo, es:

$$\frac{1}{4}DJ = 0,0000173314v + 0,000348259v^2$$

o

$$R\,i = 0,0000346628\,v + 0,000696518\,v^2$$ **Ecuación 210**

Que se corresponde aproximadamente a la de la tubería de 0,05 m de diámetro.

A la vista de esto, *Darcy* señaló que por encima o debajo de este diámetro la experiencia arroja resultados más pequeños o mayores que los de la fórmula anterior, y que el uso de la fórmula de dos términos, a la que el resto, parece bastante innecesario el uso en la práctica, exigirá, para su utilización, las mismas precauciones que para la fórmula de un solo término.

La reflexión se produce cuando se examinan los valores pasados de a y b que figura en la tabla.

Darcy resaltó que: "Se podría decir: ¿ya que estos valores no parecen ser más susceptibles de reducción, cualquiera que sea el diámetro, no deberían ser consideradas como los coeficientes de resistencia que pueden utilizarse para determinar la velocidad media de agua en los ríos?"

En este caso la fórmula se convierte en:

$$0,0000155v + 0,0002275v^2 = \frac{R}{2}i$$ **Ecuación 211**

Ya que es el radio medio o $\frac{\pi R}{2\pi R^2} = \frac{R}{2}$ quien debe entrar en el segundo término.

Pero es evidente que esta solución daría en general los resultados demasiado, fuertes.

En primer lugar, en las tuberías, la proporción del perímetro a la superficie es siempre un mínimo.

Por otra parte, la regularidad matemática, y la nitidez relativa de sus paredes asegurarán siempre a los tubos una gran superioridad para el drenaje.

También las fórmulas experimentales de *Prony* y de *Eytelwein* son:

$$0{,}0000444499\,v+0{,}000309314\,v^2=R\,i$$ **Ecuación 212**

y

$$0{,}000024265\,v+0{,}000365543v^2=R\,i$$ **Ecuación 213**

Si la fórmula de Prony para tuberías (Ecuación 135):

$$0{,}0000173314v+0{,}000348259v^2=\frac{R}{2}i\,,$$

parece contraria a lo que resulta de estas tablas que coinciden con la de los ríos, esto se debe a que la primera, establecida por medio de tuberías de pequeño diámetro, o de una gran sección, pero revestidos de depósitos, da a la resistencia de los valores mayores que las exigidas a los grandes diámetros cuyas paredes tenían el grado de pulido ordinario.

Siempre es la consecuencia de la misma compensación confusa que ya había señalado *Darcy* anteriormente.

Es inútil buscar las ecuaciones que se adapten a la corriente de agua en la hoja de tubos de metal y asfalto, porque, como se observa, con el transcurso del tiempo acabarán por cubrirse de depósitos, y que, en último resultado, es siempre ese fin, el que hay que considerar.

Bastó con mostrar que, en estos tubos, cuando eran nuevos, el coeficiente de v^2 disminuía notablemente, mientras que el de v, al contrario, tomaba un valor más grande: doble resultado que contribuía haciendo bajar debajo del eje de abscisas el origen de la parábola, y que tendía por consiguiente a presentar para la ley de flujo de la línea cuyo radio de curvatura era mucho más grande.

Así aumentaba en estas conducciones la influencia relativa del coeficiente de la primera potencia.

Las tuberías de plomo llevan a otra observación:

Es que, mientras que en los tubos de hierro estirado los coeficientes de resistencia, calculados mediante la fórmula (Ecuación 193), toman como las tuberías de 0,0122 m y 0,0395 m valores sucesivos 0,001684 y 0,000808 respectivamente.

Los mismos coeficientes convertido en tuberías de plomo de 0,014 m y 0,041 m toman los valores 0,000810 y 0,000757 respectivamente.

Así, a partir de los pequeños diámetros, el debilitamiento de los coeficientes de la resistencia parece mucho más rápido, lo que debe ser porque la capa anular y casi inmovilizada, que ya ha sido mencionada, tenía que ser mucho más delgada en los tubos empujados en plomo, que eran de pulido casi perfecta, que en los tubos de hierro estirado.

Por supuesto, habríamos tenido el mismo problema en las tuberías de chapa y betún, si hubiéramos podido operar tuberías de un metro.

En resumen, la fórmula (Ecuación 164) **y** (Ecuación 165) se aplica sólo a velocidades superiores a 0,10 m por segundo, y el coeficiente b1 varía con el radio r de la tubería, de manera que uno puede expresar este coeficiente por la fórmula:

$$b1=\alpha+\frac{\beta}{R}$$ **Ecuación 214**

Para el hierro estirado y la fundición lisa, ambos coeficientes del segundo miembro tienen los valores α= 0,000507 y β=0,0000065.

Estos valores deben duplicarse cuando la superficie metálica se cubre con un depósito después de algún tiempo de uso.

Finalmente, para satisfacer todos los casos, incluso las bajas velocidades en una sola fórmula, *Darcy* dio la expresión general:

$$R\,i = (\alpha + \frac{\alpha_1}{R^2})\,v + (\beta + \frac{\beta_1}{R})\,v^2$$ **Ecuación 215**

y en el caso de las paredes metálicas nuevas y lisas, los cuatro coeficientes toman los valores siguientes:

$$\begin{cases} \alpha = 0{,}000034 \\ \alpha_1 = 0{,}00000000752 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = 0{,}0001286 \\ \beta_1 = 0{,}0000129 \end{cases}$$

5.2 SEGUNDO PERIODO: ANÁLISIS CRONOLÓGICO DE LAS FÓRMULAS DE PÉRDIDAS DE CARGA. (Desde los experimentos de Darcy hasta los realizados por Stanton).

5.2.1- Julius Ludwig Weisbach (1806-1871)

Biografía sucinta

Ilustración 67. Retrato de Julius Ludwig Weisbach.

Matemático e ingeniero nacido en *Mittelschmiedeberg Erzgebirge*, actual Mildenau, de familia pobre, segundo hermano de nueve, su padre, *Christian Gottlieb Weisbach* fue un capataz de minas y su madre *Christina Rebekka Stephan* ama de casa. Estos condicionantes no le permitieron estudiar hasta que empezó a trabajar en la Universidad de *Göttingen* con *Friedrich Mohs*, famoso mineralista alemán que descubrió una escala para comparar la dureza de un mineral. Después de dos años, en 1829, cuando *Mohs* se trasladó a la Universidad de Viena, *Weisbach* se fue con él, y allí pudo estudiar Matemáticas, Física y Mecánica. Pasó seis meses del año siguiente viajando a pie por Hungría, Tirol, Baviera y Bohemia.

La mayor parte de su vida la dedicó a la docencia, como profesor de Matemáticas y Mineralogía. De 1831 a 1835 asumió gradualmente la responsabilidad de toda instrucción en Matemáticas en la Escuela de *Freiberg* y, a partir de 1832, en la *Bergakademie* también, a pesar de un salario bajo y poco reconocimiento. En 1832

contrae matrimonio con *Marie Winkler* y posteriormente, su hijo *Albin*, se convirtió en profesor de Mineralogía en la *Bergakademie* (Biography, 2018).

A partir de 1835 empezó a indagar en la Hidráulica, ciencia a la que aportó sus más importantes trabajos. Este interés en Hidráulica parece haber sido como resultado de *Weisbach* visitar la exposición industrial de París en 1839.

Sus escritos aparecen en más de 40 libros, en los que los de mayor relevancia fueron los relacionados con la Hidráulica, tan sumamente importantes que se siguieron usando sus descubrimientos a través del siglo XX y XXI. La primera de las numerosas publicaciones de *Weisbach*, *Bergmaschinenmechanik*, apareció en 1835, (varias veces ampliada y reeditada entre 1845 y 1866), y al año siguiente le supuso un ascenso a profesor titular de Matemáticas, Maquinaria de Minas y Topografía, contribuyendo en gran medida al desarrollo de los métodos de la prospección minera, introduciendo el teodolito en lugar de la brújula y el transportador.

Como premio a su labor, a partir de 1850 *Weisbach* recibió una serie de distinciones honoríficas, incluyendo un doctorado honorario de la Universidad de *Leipzig* en 1859 y el primer miembro honorario otorgado por el *Deutsche Ingenieri* en 1860. Fue miembro correspondiente de la Academia de Ciencias de *San Petersburgo*, en La Real Academia Sueca de Ciencias y la *Accademia dei Lincei*.

Falleció el 24 de febrero de 1871 en *Freiberg*, Alemania.

Aporte y desarrollo de su fórmula

En dinámica de fluidos, la ecuación de *Darcy-Weisbach* es una ecuación empírica que relaciona la pérdida de carga hidraúlica (o pérdida de presión) debido a la fricción a lo largo de una tubería dada con la velocidad media del flujo del fluido. La ecuación obtiene su nombre en honor al francés *Henry Darcy* y al suyo (ingenieros que proporcionaron las mayores aportaciones en el desarrollo de tal ecuación), debido a que *Weisbach* se apoyó en los experimentos realizados por *Darcy* para su desarrollo.

Para su deducción hay que tener presentes los siguientes conceptos (Salas, 2008):

Regímenes de movimiento

Cuando un fluido circula por una conducción o tubería lo puede hacer de dos formas: en régimen laminar o en régimen turbulento (Ilustración 68). La diferencia entre estos dos regímenes se encuentra en el comportamiento de las partículas fluidas, que a su vez depende del balance entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas o de rozamiento.

Régimen laminar: las partículas del líquido se mueven siempre a lo largo de trayectorias uniformes, en capas o láminas, con el mismo sentido, dirección y magnitud. En tuberías de sección circular, si hacemos un corte transversal, las capas de igual velocidad se disponen de forma concéntrica, con v = 0 junto a las paredes de la tubería y velocidad máxima en el centro.

Régimen turbulento: las partículas se mueven siguiendo trayectorias erráticas, desordenadas, con formación de torbellinos. Cuando aumenta la velocidad del flujo, y por tanto el número de *Reynolds*, la tendencia al desorden crece. Ninguna capa de fluido avanza más rápido que las demás, y sólo existe un fuerte gradiente de velocidad en las proximidades de las paredes de la tubería, ya que las partículas en contacto con la pared han de tener forzosamente velocidad nula.

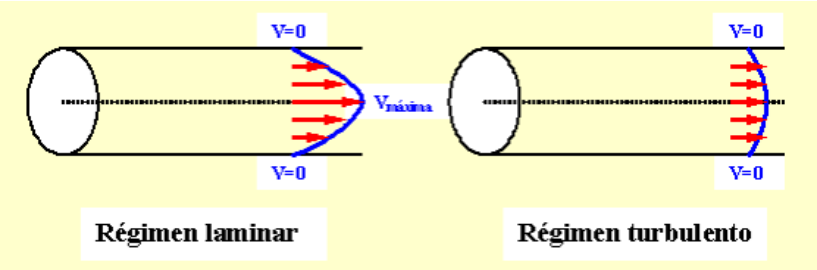


Ilustración 68. Gráfico de velocidades en régimen laminar y turbulento.

Concepto de tensión tangencial para secciones circulares.

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr}$$ Ecuación 216

En el que

μ = Viscosidad dinámica

$\frac{du}{dr}$ = Gradiente de velocidad **Ecuación 217**

du = Velocidad local distribuida a través del área

dr = Variación del radio en un punto específico

Concepto de viscosidad cinemática μ.

Es un parámetro específico de viscosidad y se define como la relación entre la viscosidad dinámica μ y la densidad del líquido ρ (Ecuación 6).

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Supongamos que tenemos una tubería (Ilustración 69), en la que seleccionamos 2 secciones, la sección 1-1 y la sección 2-2, en la que haremos el análisis. Estas dos secciones están separadas por una distancia L. La distancia desde el eje de la tubería a la pared será el radio r_0 (diámetro d= 2 r_0).

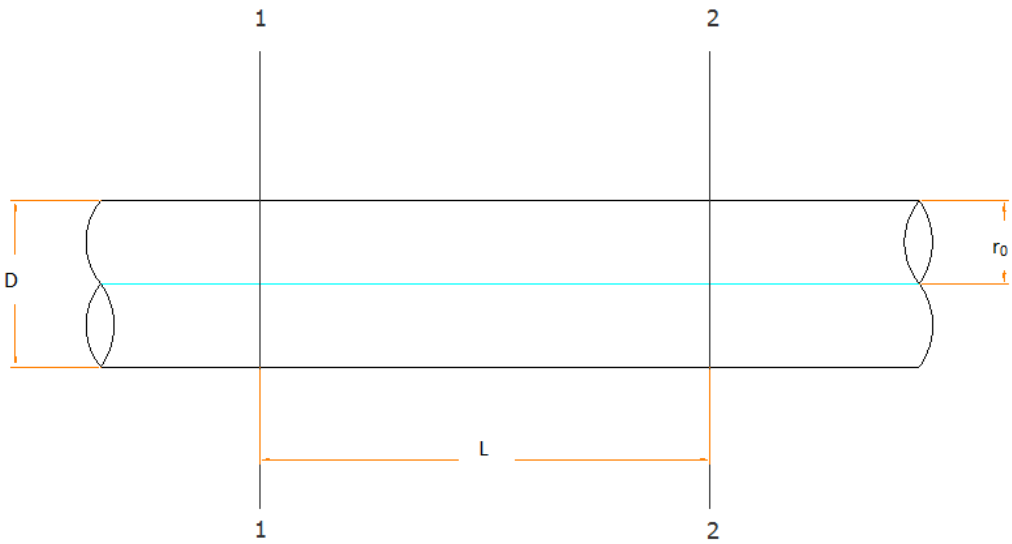


Ilustración 69. Secciones de estudio en la tubería.

Se tiene un régimen laminar, que presupone un movimiento uniforme, en donde la velocidad media es constante a lo largo de toda la conducción.

El diagrama de tensiones varía de la siguiente forma (Ilustración 70):

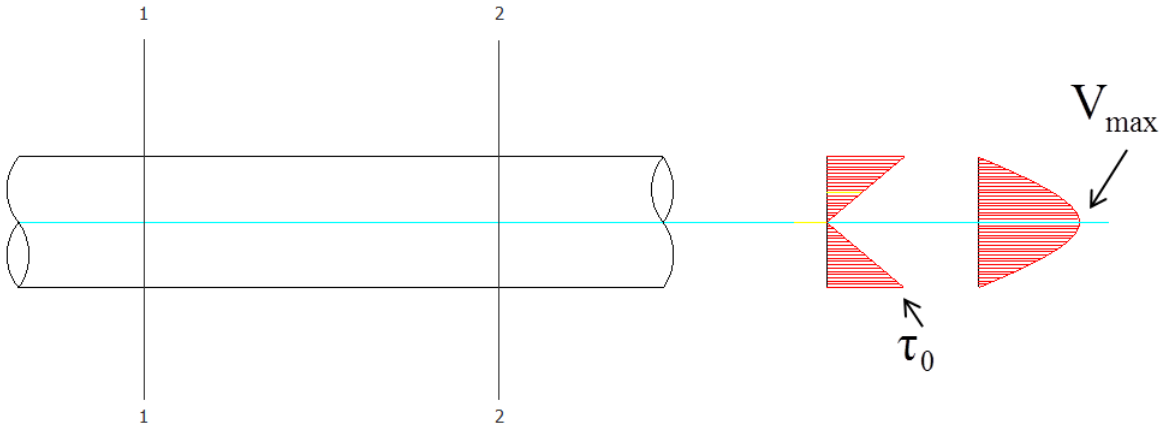


Ilustración 70. Diagrama de tensiones y de velocidades en el interior de una tubería en régimen laminar.

En el centro la tensión es cero y en las paredes alcanza su valor máximo.

En el centro la velocidad es máxima, en la que el diagrama de velocidades resulta ser una parábola.

Para el régimen laminar la velocidad máxima U_{max} es el doble que la velocidad media.

$$U_{max} = 2U_{media}$$ **Ecuación 218**

Estas son las condiciones de partida que se tienen.

Ahora se van a analizar las fuerzas que intervienen en este sistema, que son fundamentalmente dos (Ilustración 71):

Fuerza que tiende a provocar el movimiento.

Fuerza tangencial que va en contra del movimiento y actúa en todo el perímetro de la conducción.

Las fuerzas de presión P1 y P2.

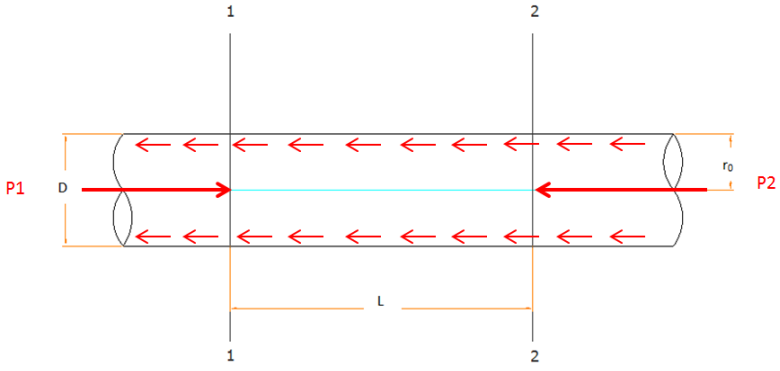


Ilustración 71. Sistema de fuerzas actuantes en el interior de la conducción.

Con estas consideraciones se va a plantear la dependencia física del movimiento, en el que se había manifestado de que el movimiento es uniforme, consecuentemente tenemos que la sumatoria de fuerzas es igual a cero.

$$\sum F = 0$$ **Ecuación 219**

En este caso tenemos dos tipos de fuerzas: unas fuerzas directas que son las que provocan el movimiento P1 y P2 y las fuerzas que se oponen, que son las correspondientes a la tensión tangencial (Educativo, 2017).

Por lo tanto, la expresión sería, tomando como positivo la dirección del movimiento:

$$P_1 - P_2 = P_\tau$$ **Ecuación 220**

En donde

P_τ = Fuerza tangencial perimetral del movimiento

Como la fuerza de presión es igual a la presión p por el área A, se tiene:

$$P_1 A - P_2 A = 2 \pi r L \tau$$ **Ecuación 221**

El área A, como se corresponde con una sección circular, se puede expresar de la siguiente manera:

$$(p_1 - p_2)\,\pi\, r^2 = 2\,\pi\, r\, L\, \tau$$ **Ecuación 222**

Eliminando factores comunes nos quedaría:

$$(p_1 - p_2)\, r = 2\, L\, \tau$$ **Ecuación 223**

Despejando la tensión tangencial τ:

$$\tau = \frac{(p_1 - p_2)\, r}{2\, L}$$ **Ecuación 224**

Se transforma esta expresión multiplicando y dividiendo por el peso específico γ:

$$\tau = \frac{\gamma \left(\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} \right) r}{2\, L}$$ **Ecuación 225**

El miembro $\frac{\left(\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} \right)}{L}$ viene a ser la pendiente piezométrica que se representa por la letra i, luego:

$$i = \frac{\left(\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} \right)}{L}$$ **Ecuación 226**

Si se consideran dos piezómetros específicos en el siguiente gráfico (Ilustración 72), se observa que el agua subirá a un determinado nivel en cada uno, y la diferencia de esos niveles es lo que se está buscando, la perdida de carga h_f.

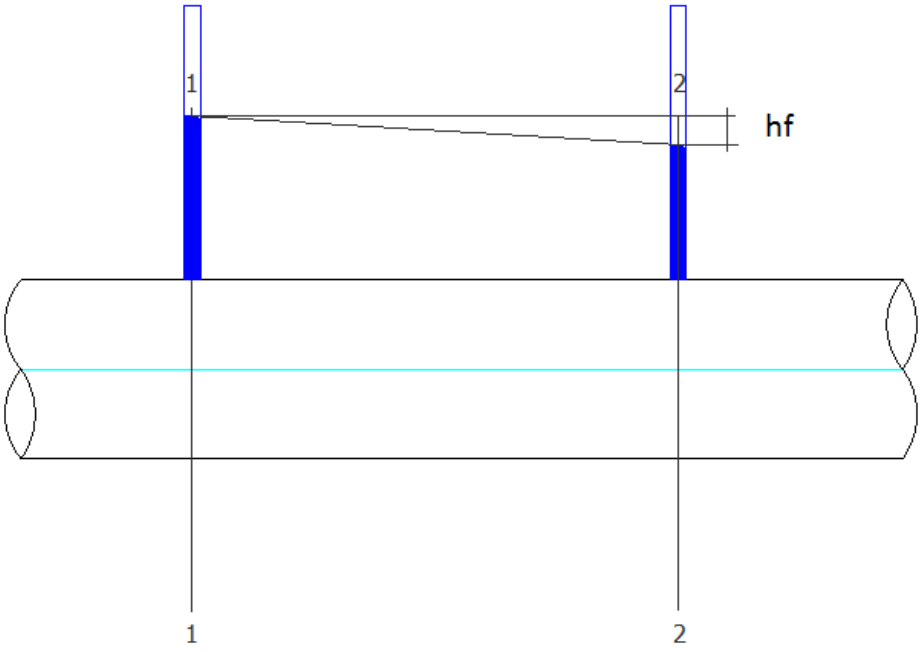


Ilustración 72. Piezómetros para medir la perdida de carga hf.

Es decir, se tendría la pendiente hidráulica que sería:

$$i = \frac{h_f}{L} = \frac{\left(\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma}\right)}{L}$$ Ecuación 227

Por lo tanto

$$\tau = \frac{\gamma\, i\, r}{2}$$ Ecuación 228

Si se vuelve a la (Ecuación 216)

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr}$$

Y la igualamos con la Ecuación 228), se tiene que:

$$-\mu \frac{du}{dr} = \frac{\gamma\, i\, r}{2}$$ Ecuación 229

Despejando du,

$$du = \frac{\gamma i}{2\mu} r\, d\, r$$ **Ecuación 230**

Integrando para obtener la ecuación final se tiene:

$$\int du = \int \frac{\gamma i}{2\mu} r\, dr$$ **Ecuación 231**

$$u = \frac{\gamma i}{2\mu} \frac{r^2}{2} + C$$ **Ecuación 232**

Esta constante C es importante y hay que obtenerla buscando los valores límites.

En el centro la velocidad es máxima y en la pared la velocidad es cero, para el límite de integración, en este caso, utilizaremos el de la pared, cuando $r = r_0$ y $u = 0$, luego

$$0 = \frac{\gamma i}{2\mu} \frac{r^2}{2} + C$$ **Ecuación 233**

Despejando C,

$$C = \frac{\gamma i}{2\mu} \frac{r_0^2}{2}$$ **Ecuación 234**

En definitiva, con estos datos se tiene:

$$u = \frac{\gamma i}{2\mu} \frac{r_0^2}{2} - \frac{\gamma i}{2\mu} \frac{r^2}{2}$$ **Ecuación 235**

Esta es la fórmula para el régimen laminar, movimiento uniforme, de la velocidad en cualquier punto es la misma.

Ahora aplicando la otra condición límite, cuando r = 0, entonces se tiene la velocidad máxima:

Si r = 0 --> $u = u_{max}$

Esto significa que, reemplazando en esta última fórmula, me quedaría la siguiente:

$$u_{max} = \frac{\gamma\, i}{4\,\mu}\, r_0^{\,2}$$ **Ecuación 236**

Pero en régimen permanente

$$u_{max} = 2\, v$$ **Ecuación 237**

Despejando la pendiente hidráulica

$$i = \frac{4\,\mu}{\gamma\, r_0^{\,2}}\, u_{max}$$ **Ecuación 238**

$$i = \frac{4\,\mu}{\gamma\, r_0^{\,2}}\, 2\, v$$ **Ecuación 239**

$$i = \frac{8\,\mu}{\gamma\, r_0^{\,2}}\, v$$ **Ecuación 240**

Haciendo $r_0 = \frac{d}{2}$ **Ecuación 241** nos quedaría

$$i = \frac{32\,\mu}{\gamma\, d^2}\, v$$ **Ecuación 242**

Esta es la expresión base para obtener la ecuación de *Darcy-Weisbach*.

Considerando que $i = \frac{h_f}{L}$ (Ecuación 227) y sustituyendo se obtiene:

$$\frac{h_f}{L} = \frac{32\,\mu}{\gamma\, d^2}\, v$$ **Ecuación 243**

Despejando h_f se tiene

$$h_f = \frac{32\,\mu\,L}{\gamma\,d^2}\,v$$ **Ecuación 244**

Hacemos ahora la siguiente operación, se multiplica y divide por v y también por 2:

$$h_f = \frac{32\,\mu\,L}{\gamma\,d^2}\,v\,\frac{v}{v}\,\frac{2}{2}$$ **Ecuación 245**

y teniendo en cuenta que $\gamma = \rho\,g$, se obtiene:

$$h_f = \frac{64\,\mu\,L}{\rho\,g\,d\,d\,v}\,\frac{v^2}{2}$$ **Ecuación 246**

Pero como $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ es la viscosidad cinemática, se obtiene:

$$h_f = \frac{64\,\nu\,L}{v\,d\,d}\,\frac{v^2}{2g}$$ **Ecuación 247**

$$h_f = \frac{64}{\frac{v\,d}{\nu}\,d\,v}\,\frac{L}{d}\,\frac{v^2}{2g}$$ **Ecuación 248**

El término $\frac{v \times d}{\nu}$ es el número de *Reynolds* que se verá más adelante, quedaría:

$$h_f = \frac{64}{R}\,\frac{L}{d}\,\frac{v^2}{2g}$$ **Ecuación 249**

A el valor $\frac{64}{R}$ se le denomina el coeficiente de fricción de *Darcy-Weisbach* f.

Finalmente, la fórmula de *Darcy-Weisbach* es:

$$h_f = f\,\frac{L}{d}\,\frac{v^2}{2g}$$ **Ecuación 250**

Esta fórmula se dedujo con las condiciones para régimen laminar, pero hoy día es aplicable también para régimen turbulento, solo que para la determinación del parámetro f existen otros métodos que parten de fórmulas empíricas de la utilización de ciertos gráficos como son el de *Nikuradse* o el gráfico de *Moody*.

Esta ecuación es posterior a *Darcy*, por lo que no llegó a conocerla bajo esta denominación.

5.2.2 Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen (1797-1884)

Biografía sucinta

Ilustración 73. Retrato de Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen.

Ingeniero hidráulico, investigador y escritor técnico alemán, *Hagen* nació en *Königsberg*, Prusia del este (*Kaliningrad, Rusia*), hijo de *Friedrich Ludwig Hagen* y *Helene Charlotte Albertine Hagen*. Su padre era un funcionario del Gobierno y su madre era la hija de *Christian Reccard*, profesor de Teología en la Universidad de *Königsberg*, concejal y astrónomo consistorial. Demostró tener buenas cualidades en Matemáticas en High School secundaria y se fue a estudiar a la Universidad de *Königsberg* donde su tío, *Karl Gottfried Hagen* era Profesor de Física y Química.

En 1816 Hagen comenzó a estudiar Matemáticas y Astronomía con *Friedrich Wilhelm Bessel*, pero en 1818 cambió y se puso a estudiar ingeniería civil, ya que estaba más atraído por la ciencia aplicada que teórica. Sin embargo, permaneció en estrecho contacto con *Bessel* durante toda su vida. En 1819 emprendió el examen para inspectores (*Landvermesserprüfung*) y después de graduarse tomó un trabajo como ingeniero junior (*Baukondukteur*) en la función pública. Su principal responsabilidad fue la ingeniería hidráulica y la gestión del agua. En 1822 aprobó el examen estatal en Berlín para calificar como maestro constructor (*Baumeister*). Se dio a conocer a través de sus publicaciones sobre varias construcciones hidráulicas que había visitado durante sus viajes por Europa (Berlin, 2017).

En 1824 fue nombrado director de la construcción (*Baukondukteur*) por la comunidad mercantil en *Königsberg* y en 1825 se convirtió en oficial adjunto del gobierno (*stellvertretender Regierungs- und Baurat*) para *Danzig* (*Gdańsk*). Un año más tarde se trasladó a convertirse en inspector de construcción de puertos (*Hafenbauinspektor*) en *Pillau*, donde fue responsable de la construcción del puerto y dique. Los métodos que desarrolló siguen siendo pertinentes para la gestión portuaria actual en la región.

El 27 de abril de 1827 se casó con su sobrina *Auguste Hagen* (1806-1884), con quien tuvo dos hijas y cinco hijos. Su hijo *Ludwig Hagen* también se hizo un notable ingeniero civil en la Escuela de Ingeniería y Artillería Unida, Berlín.

En 1830, *Hagen* se unió a la Autoridad Suprema de la Construcción (*Oberbaudeputation*) en Berlín y se convirtió en el principal Inspector de Edificios del Gobierno (*Oberbaurat*) en 1831. De 1834 a 1849 enseñó como profesor de ingeniería hidráulica en la Bauakademie y la Artillería y Escuela de ingeniería de Berlín.

Contribuyó al cálculo de probabilidad para el levantamiento de tierras y este interés llevó a sus contribuciones a la teoría de la probabilidad. En una carta a *Bessel* fechada el 2 de agosto de 1836, *Hagen* presentó su hipótesis de errores elementales y dedujo una distribución gaussiana para errores de observación. Esta idea fue desarrollada más adelante en un libro publicado en 1837 "*Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit besonderer Anwendung*" en la Operación del *Feldmebkunst* ("Fundamentos del Cálculo de Probabilidad con Aplicación Especial a las Operaciones de Topografía") que aplicó teoría de probabilidad y técnicas de mínimos cuadrados a la construcción y dedujo una ley de error que no se basa en argumentos de probabilidad inversa.

Se dedicó antecediendo a *Osborne Reynolds*, al estudio de resistencias a los flujos en la franja de transición entre el régimen laminar y el turbulento (Cruz, 2015).

En 1839, *Hagen* realizó experimentos cuidadosos en tubos de latón que le permitieron descubrir la relación entre la caída de presión y el diámetro del tubo en condiciones de flujo laminar de líquidos viscosos homogéneos. *Hagen* observó una relación exponencial empírica entre la caída de presión (ΔP) y el radio (R) de un tubo correspondiente a:

$$\Delta P \ \alpha \ \frac{1}{R^{4,12}}$$ **Ecuación 251**

pero sugirió en vista de posibles errores de medición que se asume un valor de 4.0. Esta relación también fue descubierta de manera independiente al mismo tiempo por el físico y fisiólogo francés *Jean Poiseuille* y por lo tanto ahora se conoce como la ecuación de *Hagen-Poiseuille* o la ley de *Poiseuille*.

En 1849 fue designado como asesor experto (*Sachverständiger*) en la Asamblea Nacional de *Francfort* y en 1850 fue nombrado consejero experto (*Vortragenden Rat*) en el Ministerio de Comercio de Prusia.

En 1852, *Hagen* publicó un notable artículo que describía y explicaba dos aspectos fundamentales sobre materiales granulares.

En 1863 *Hagen* publicó su manual enciclopédico sobre la ingeniería hidráulica. Esto representó el estado de la técnica para la protección costera y sirvió durante décadas como la guía para la Ingeniería Costera en Alemania.

En 1866 *Hagen* fue ascendido a director general (*Oberbaudirektor*) en el Departamento de ingeniería hidráulica y presidente (*Vorsitzenden*) de la sección de Obras Públicas en el Ministerio de Comercio (*Baudeputation*).

En 1869 se hizo director nacional mayor del Edificio (*Oberlandesbaudirektor*). Este papel implicó la responsabilidad para las grandes obras hidráulicas y del puerto en *Prusia* y otros estados alemanes. Él llevó a cabo este puesto hasta su jubilación en 1875.

En 1872 sufrió un accidente en un viaje de negocios y fue incapaz de caminar en el período posterior. *Hagen* murió en 1884, su tumba se encuentra en el *Invalidenfriedhof* de Berlín, *Scharnhorststraße* cerca de la estación de tren principal.

Aporte y desarrollo de su fórmula

En la primera publicación de *Hagen* de 1839 sobre el flujo de agua a través de tubos cilíndricos, puntualizó que el tipo de flujo estudiado por él (el laminar) cesaba cuando la velocidad aumentaba más allá de cierto límite, es decir, intuyó que pasaba a otro régimen, aunque no fue hasta después de los experimentos de *Reynolds* en 1883 que se establece una clara distinción entre el flujo laminar y el turbulento.

Hagen reportó en esa primera publicación en 1839, los experimentos realizados con tres tubos de latón con diámetros de 0,255 cm, 0,401 cm y 0,591 cm y longitudes de 47,4 cm, 109 cm y 105 cm respectivamente, y dedujo una ley, que, en unidades del sistema métrico, se expresa de la siguiente manera (Pérez Franco, 2001):

$$\Delta P = 8\mu\left(\frac{L}{r^2}\right)U + 2{,}7\rho\frac{U^2}{2}$$ **Ecuación 252**

Donde

ΔP = Caída de presión a lo largo de la tubería en m.

μ = Viscosidad del líquido kg/(ms), o bien, N·s/m² (Pa·s).

ρ = Densidad absoluta del líquido kg/m^3.

U = Velocidad media en m/s.

Hagen mostró un buen entendimiento del fenómeno que se producía, observó que el término en U^2 era utilizado para impartir energía cinética al fluido, y que el término en U era necesaria para contrarrestar la resistencia friccional.

Posteriormente, en 1854, reanalizando de nuevo las experiencias de *Couplet*, *Bossut* y *Dubuat*, propuso la siguiente fórmula monómica:

$$J\, r^{1,25} = b_1\, U^{1,75}$$ **Ecuación 253**

Donde:

J = Rasante hidráulica (m)

r = Radio interior de la tubería (m)

U = Velocidad media de circulación (m/s)

5.2.3 Jean Léonard Marie Poiseuille (1797-1869)

Biografía sucinta

Ilustración 74. Retrato de Jean Léonard Marie Poiseuille.

Poiseuille nació en París, fue hijo de Jean *Baptiste Poiseuille*, un carpintero, y *Anne Victoire Caumont*. Entró a la técnica de "*Ecole Polytechnique*" a la edad de 18 años en el otoño de 1815. Su residencia terminó allí el 13 de abril de 1816, cuando toda la *Ecole* fue disuelta por razones políticas. No regresó cuando se reabrió, pero cambió al estudio de la medicina en su lugar. Durante sus meses en la Escuela Politécnica *Poiseuille* tomó cursos con *Cauchy*, *Ampere*, *Hachette*, *Arago*, *Petit* y *Thenard*. *Brillouin* (1930) atribuye el extraordinario sentido experimental de *Poiseuille* a la influencia de su profesor de Física, el brillante, pero de corta duración (1791-1820) *Alexis Petit*, quien junto con *PL. Dulong* descubrió en 1819 que el calor específico molar de todos los sólidos tiende a una constante a alta temperatura (regla *Dulong Petit*). Durante su investigación doctoral sobre la fuerza del corazón aórtico (*Poiseuille* 1828), inventó el manómetro de mercurio en tubo U (denominado hemodinamómetro) y lo utilizó para medir presiones en las arterias de caballos y perros. Una copia de la versión del manómetro, denominado hemodinamómetro *Poiseuille-Ludwig*, se utilizó en las escuelas de medicina hasta la década de 1960 y hasta la actualidad las presiones sanguíneas se informan en mm Hg debido a la invención de *Poiseuille*.

Entre 1828 y 1868 *Poiseuille* publicó 15 artículos que iban desde breves comunicaciones a la Academia Francesa de Ciencias hasta extensas monografías. Una lista completa de las publicaciones de *Poiseuille* se da en la sección de literatura citada (de *Pappenheimer* 1978). Es notable que estos pocos trabajos experimentales hayan hecho el nombre de *Poiseuille* familiar en una variedad de campos incluyendo la Ingeniería, la Física, la Medicina, y la Biología.

Tras completar su tesis doctoral sobre el corazón y el pulso, *Poiseuille* volvió su atención a la Hemodinámica en la microcirculación. Sus observaciones de la microcirculación mesentérica de la rana (Poiseuille 1835) reveló que el flujo sanguíneo en las arteriolas y vénulas presenta una capa de plasma en la pared del vaso en la que hay pocos glóbulos rojos, que se produce "descamación del plasma" en las bifurcaciones de los vasos, y que los glóbulos blancos tienden a adherirse a la pared del vaso. La realización de estudios en vivo incontrolada no permitiría una clara formulación de las leyes que regulan el flujo sanguíneo en la microcirculación, lo que lo llevó a emprender sus cuidadosos y amplios estudios sobre el flujo de líquidos en capilares de vidrio de diámetro pequeño.

Estos estudios supuestamente comenzaron en algún momento en la década de 1830, ya que en 1838 él presentó un informe oral preliminar sobre los efectos de la presión y de la longitud del tubo a la *Societe Philomatique* (Poiseuille 1838). Entonces, en 1839, *Poiseuille* depositó en la Academia Francesa de Ciencias un paquete sellado que contenía los resultados de sus estudios sobre el flujo de agua a través de los tubos de efectos de la caída de presión, longitud del tubo, diámetro del tubo y temperatura.

Durante el curso académico 1840-1841 hizo tres comunicaciones orales (*Memoires Ius*) a la Academia de Ciencias. Extractos de éstos fueron publicados posteriormente en los *Comptes Rendus* de la Academia (Poiseuille 1840a, b, 1841). En enero de 1841, Poiseuille depositó otro paquete sellado de resultados experimentales relacionados con el flujo de una variedad de líquidos a través de los

capilares de vidrio. Algunos de estos resultados fueron comunicados a la Academia en 1843 (Poiseuille 1843).

Los resultados y conclusiones presentados por *Poiseuille* en 1840-1841 fueron considerados lo suficientemente importante que la Academia designó una Comisión Especial de élite para investigar su validez. Esta Comisión, con de los miembros *Arago*, *Babinet*, *Piobert y Regnault*, se reunieron en 1842 y con *Poiseuille* que repitió algunos de sus experimentos usando su aparato.

En el curso de esta revisión, la Comisión impuso a *Poiseuille* hacer algunos nuevos experimentos preliminares utilizando mercurio y éter etílico. La Comisión informó a la Academia el 26 de diciembre de 1842 recomendando que el trabajo de *Poiseuille* fuera aprobado e incluido en ella en su totalidad en *Memoires des Savants Etrangers*, una publicación de la Academiade Ciencias. Apareció en los *Memoires Presentes par Divers Savants a l, Academie Royale des Sciences de l'Institut de France* en 1846, siete años después de haber entregado su primer paquete sellado a la Academia.

La contribución final de *Poiseuille* altema de flujo de líquido en tubos estrechos apareció en septiembre de 1847. Este artículo presentó mediciones para (i) soluciones salinas acuosas diluidas, (ii)soluciones acuosas de bases, (iii) soluciones acuosas de ácidos, (iv) aguas minerales(v) tés, (vi) vinos y bebidas espirituosas, (vii) extractos de plantas y raíces, (viii) suero bovino y sus soluciones ácidas, y (ix) un grupo mixto de éteres, alcoholes y soluciones de amoniaco. En cada grupo se compararon los tiempos de flujo con el de agua destilada bajo las mismas condiciones. Parece que estos estudios fueron motivados por el interés de *Poiseuille* en la posible facilitación del flujo sanguíneo capilar a través de la medicación.

No hay registro de dónde *Poiseuille* hizo su trabajo o cómo fue apoyado financieramente. Sus aparatos eran elaborados y ciertamente requería los servicios de un experto soplador de vidrio. Los experimentos tardaron mucho tiempo (la calibración de un solo tubo capilar tomó hasta doce horas), por lo que probablemente tuvo asistencia técnica. *Brillouin* (1930) sugiere la posibilidad de

que la bien establecida fisióloga *Magendie* proporcionara espacio y recursos necesarios en el Hospital *La Salpetrière de París*. *Pappenheimer* (1978) sugiere que un suegro rico podría haberlo hecho posible para que *Poiseuille* se dedicara a la investigación. Al parecer, *Poiseuille* practicó la medicina por un tiempo porque estaba inscrito en un directorio de médicos de París fechado en 1845, pero otra evidencia indica que no practicó la medicina después de 1844.

La información biográfica original sobre la vida de *Poiseuille* es escasa. *Brillouin* (1930), *Joly* (1968) y *Pappenheimer* (1978) resumen la mayor parte de la información conocida. La nota biográfica de *Joly*, que fue entregada antes de la presentación de la primera medalla de *Poiseuille* a *Robin Fahraeusin* en 1966, es un testimonio especialmente elocuente de las muchas facetas de este científico y sus logros. *Joly* señala que durante su vida *Poiseuille* fue sólo modestamente reconocido. En 1835, la Academia de Ciencias le concedió la mitad del premio de fisiología experimental (valor no mencionado); en 1845, ganó el premio de Medicina y Cirugía (por valor de 700 francos), y en 1860 recibió una mención honorífica, otra vez de la Academia de Ciencias. Aunque *Poiseuille* fue un miembro elegido de la Academia de Medicina de París, sus numerosos intentos de ganar la elección a la Academia de Ciencias en 1840, 1850 y 1860 nunca tuvieron éxito.

Otro aspecto misterioso de la vida de *Poiseuille* se refiere a sus circunstancias y empleo en la vida posterior. En 1858, presentó una solicitud para un puesto en el sistema de escuelas públicas de París. En 1860, el Dr. *Poiseuille* fue a trabajar como inspector de saneamiento Escolar en el distrito de *Sena*. *Poiseuille*, nacido el 22 de abril de 1799, murió en París, la ciudad de su nacimiento el 26 de diciembre de 1869 (Ribeiro, 2014).

Aporte y desarrollo de su fórmula

Poiseuille se propuso encontrar una relación funcional entre cuatro variables: el caudal volumétrico de agua destilada de un tubo Q, el diferencial de presión de accionamiento P, la longitud del tubo L y el diámetro del tubo D. Los diámetros de sus tubos de vidrio oscilaban entre 0,015 a 0,6 mm, abarcando los tamaños de los

vasos que se encuentran en la mayoría de los sistemas microcirculatorios, pero no exactamente los de los capilares humanos (5 a 10 micras), inicialmente planeaba mantener una temperatura constante de 10º C, examinando posteriormente la influencia de la temperatura desde 0 a 45º C, todavía utilizando agua destilada como líquido de ensayo. Más tarde extendió sus estudios a una gran variedad de otros líquidos (Poiseuille 1847).

En esta tesis se explicará someramente el aparato experimental que utilizó y como dedujo su fórmula, para ello partimos de la (Ilustración 75). El aparato entero media aproximadamente de 2,50 a 3,00 metros de altura.

El corazón del sistema es el viscosímetro capilar pequeño cerca del centro de la figura, justo debajo del bulbo en forma de huso M. Debido a que está sumergido en agua dentro de un cilindro de vidrio, el viscosímetro se muestra en líneas de puntos. Se utilizó una bomba accionada manualmente (h, rodeada por una envoltura de agua X-Y) para cargar el depósito vertical a la izquierda con aire y simultáneamente elevar una columna de agua en el manómetro alto i-i o una columna de mercurio en el manómetro corto i’-i’. Durante la presurización se cerró la válvula R que conduce al viscosímetro. Una vez que se alcanzó la presión deseada, como se indicó por uno de los manómetros, se cerró la válvula de descarga de la bomba R', se abrió la válvula R y se llevó el flujo a través del capilar de ensayo d (Carpentier, 2013).

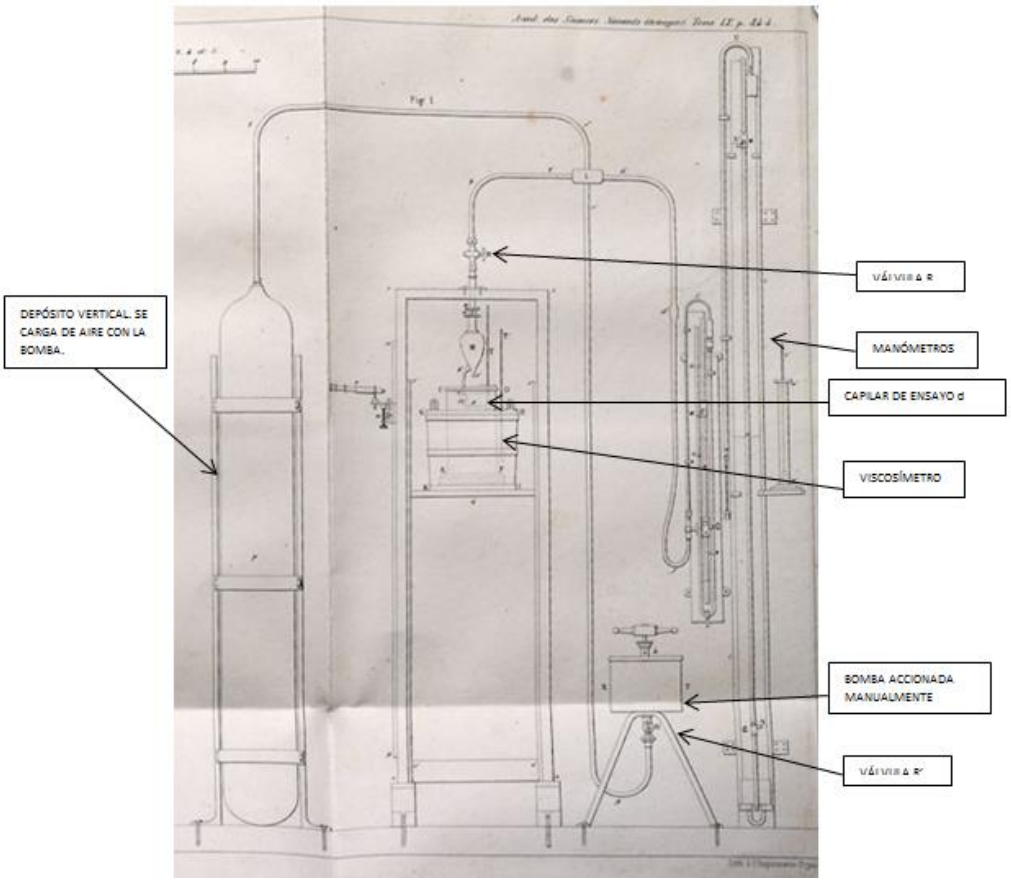


Ilustración 75. Vista en alzado frontal del aparato de Poiseuile. Imagen escaneada de un segmento de una placa pliegue de diez partes publicada con el resumen de Poiseuile (1846).

El fondo puntiagudo del bulbo M sirvió para atrapar partículas de polvo, que tendían a asentarse fuera del aire o del líquido utilizado para limpiar la cristalería, impidiéndolas caer en la rama capilar. *Poiseuille* encontró necesario filtrar su agua destilada repetidamente, a veces hasta 20 veces, para eliminar las partículas extrañas. Todo el capilar de prueba estaba situado bajo el agua en un cilindro de vidrio que estaba rodeado por un baño de agua.

El eflujo subacuático de los tubos capilares fue necesario cuando *Poiseuille* descubrió que no podía obtener resultados reproducibles cuando el líquido minúsculo fluía (algunos tan bajos como 0,10 cc en varias horas) salía en el aire contra la resistencia errática de la tensión superficial. Logro eliminar este problema

mediante el eflujo subacuático y realizando correcciones de dicha tensión. Esto fue crucial para la definición precisa de la longitud del tubo.

Poiseuille amplió su estudio de la influencia de la presión hasta aproximadamente ocho atmósferas. (A una presión de 10 atmósferas, uno de los bulbos M explotó) Para presiones por encima de una atmósfera, los bulbos esféricos fueron reemplazados por un recipiente cilíndrico. Estos cilindros y el adjunto (marcado se ensayaron en aire). En estos casos, los eflujos eran lo suficientemente grandes para que la tensión superficial no fuera un problema.

La diferencia de presión fue la variable independiente primaria en el diseño experimental de *Poiseuille*. Sin embargo, la cota disminuyó durante el flujo de salida debido a los cambios en los niveles de líquido en el manómetro, el bulbo del viscosímetro y el recipiente receptor. Siguiendo el entendimiento contemporáneo entre los ingenieros hidráulicos, *Poiseuille* utilizó el promedio aritmético de las cotas inicial y final para P en su análisis de datos. Incluso realizó un experimento auxiliar (uno de varios) para probar la exactitud de esta suposición.

Bingham señaló en su crítica (1940) que la media aritmética no es rigurosamente el promedio correcto de usar, pero que, dadas las dimensiones de sus bulbos de viscosímetro y el total de cotas aplicadas, *Poiseuille* probablemente evitó errores apreciables de esta aproximación. *Poiseuille* fue meticuloso al hacer correcciones de segundo orden para (a) la diferencia en las presiones atmosféricas que actúan sobre el agua en la pata del manómetro abierto S ' y la superficie libre del recipiente receptor, (b) los pesos de las columnas de aire desiguales confinadas dentro las patas presurizadas del aparato, y (c) capilaridad en el bulbo del viscosímetro. En una muestra de cálculo, *Poiseuille* mostró que la corrección debida a diferentes pesos de las columnas aéreas ascendía a aproximadamente 0,15%.

A partir de un gran número de tubos de vidrio que examinó, *Poiseuille* seleccionó unos cuantos que parecían ser bastante cilíndricos a lo largo de su longitud. Esta primera prueba se realizó midiendo la longitud de un hilo de mercurio de unos pocos centímetros de largo en diferentes posiciones a lo largo de la longitud del tubo. La

sección transversal de un tubo se examinó después cortando una pequeña sección perpendicular de 2 a 3 mm de longitud desde un extremo y rectificando y puliendo sus caras hasta que su espesor se redujo a aproximadamente 0,1 mm. Este delgado disco anular se colocó luego entre dos placas de vidrio junto con un poco de bálsamo de Canadá y se calentó. El calentamiento hizo que el bálsamo fluyera hacia el pequeño diámetro interior. Este sándwich fue entonces examinado bajo el objetivo de un microscopio Amici horizontal. Debido a la delgadez del disco anular, se eliminaron los problemas debidos a la reflexión, refracción y difracción y la imagen de su orificio era distinta y clara. Por medio de una cámara iluminada, una cámara lucida, fijada al microscopio, una imagen del ánima se proyectó a una ampliación conocida en la mesa horizontal del microscopio y se midieron sus diámetros máximo y mínimo con divisores y una escala milimétrica. Por esta técnica *Poiseuille* especificó sus diámetros de tubo en milímetros, nominalmente de 0.015 a 0.6, a cuatro y a veces cinco lugares, es decir a décimas o centésimas de un micrómetro! Se puede cuestionar la importancia de los dígitos cuarto y quinto en estos diámetros medidos, sin embargo, dado que las mediciones originales de las imágenes proyectadas aumentadas fueron hechas por divisores y una escala milimétrica y podrían ser leídas quizás dentro de 1/2 parte en 10 a 300 mm.

Se midieron las longitudes de los tubos de vidrio, después de que los dos extremos fueron moldeados lisos, por medio de un compás de haz equipado con una escala *Vernier*. Esta herramienta (que se tomó prestada del laboratorio físico del Colegio de Francia, cortesía de *Monsieur Savart*) se podía leer dentro de 1/20 a 1/40 mm. La serie de siete tubos utilizados en el "estudio de longitud" osciló entre 6,77 y 100,5 mm de longitud (Sutera P., 1993).

En la mayoría de los experimentos relacionados con la influencia de la presión, el diámetro del tubo y la longitud, *Poiseuille* mantuvo la temperatura del baño que rodea el recipiente receptor a 10ºC. La temperatura fue indicada por el termómetro T situado en el receptor con su bulbo al mismo nivel que el capilar de ensayo. Este termómetro tenía divisiones de quintas de un grado *Celsius*. Los papeles de *Poiseuille* no dicen nada sobre cómo se controlaba la temperatura. En dos

subconjuntos de sus experimentos sobre el efecto de la presión en que los cabezales de conducción eran altos, *Poiseuille* utilizó tubos que eran demasiado largos para encajar en el recipiente receptor. Por lo tanto, estas pruebas se realizaron en el aire a temperaturas ambiente que varía desde aproximadamente 20 ° C hasta el final a 7ºC (Aparentemente el laboratorio no estaba caliente).

Poiseuille estudió primero el efecto de la presión sobre el flujo. La presión más baja aplicada fue 74,29 mm de agua y la más alta fue más de 6000 mm Hg (aproximadamente 8 atmósferas).

Poiseuille resumió sus hallazgos en esta etapa con la ecuación:

$Q = K\ P$ **Ecuación 254**

donde el coeficiente K era una función, a determinar, de la longitud, diámetro y temperatura del tubo. Para investigar la influencia de la longitud del tubo, *Poiseuille* tomó de sus experimentos previos en la serie A de todos los datos de aquellas pistas donde la presión era cercana a 775 mm Hg. Luego, usando su "ley de presiones" ajustó los tiempos de flujo medidos para corresponder a un estándar P de exactamente 775 mm Hg. Entonces pudo demostrar que el tiempo de flujo era proporcional a la longitud del tubo (la "ley de las longitudes") en la mayoría de sus experimentos. En este punto Poiseuille podría afirmar que $K=K'/L$ Ecuación 255 y, por lo tanto, $Q=K'P/L$ Ecuación 256, donde K 'era una función del diámetro y la temperatura del tubo.

Para determinar el efecto del diámetro del tubo sobre el flujo, *Poiseuille* (1847) afirmó que "hemos medido los volúmenes de líquido que fluyen a través de tubos de diferentes diámetros bajo la misma presión, a la misma temperatura, al mismo tiempo, los tubos con igual longitud, y hemos comparado el eflujo teniendo en cuenta los diámetros de los tubos". De hecho, *Poiseuille* utilizó los datos que ya tenía a mano, interpolando según fuera necesario y aplicando las" leyes de presión y longitud ", para llegar a un conjunto de los datos de diámetro volumétrico normalizados a P = 775 mm Hg, L = 25 mm, δt = 500 s y T = 10ºC. El volumen

del bulbo utilizado en cada experimento se determinó con precisión pesando el mercurio contenido entre las líneas C y E (Ilustración 76) a la dosis más próxima de 0,5 mg. Dado que estas pesadas se llevaron a cabo a temperatura ambiente, se corrigieron los volúmenes de bulbo calculados para la expansión térmica del vidrio para encontrar la temperatura estándar de 10ºC.

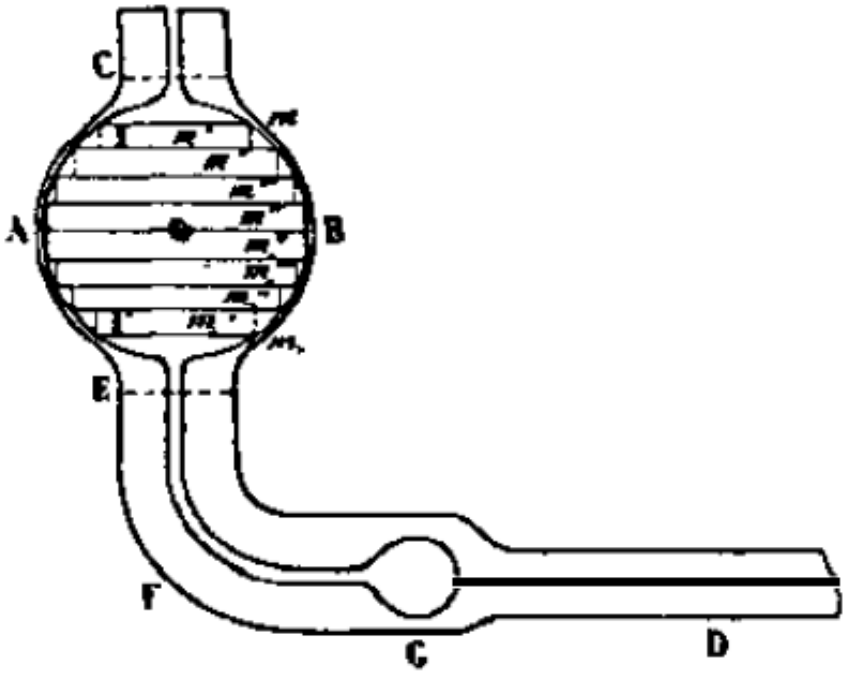


Ilustración 76. Esquema detallado del bulbo de viscosímetro esférico (0) con el capilar de prueba adjunto (D) (de Poiseuille 1846). Las líneas horizontales m, m ', ..., m, construidas dentro del bulbo fueron utilizadas por Poiseuille para argumentar que la elevación del plano medio (AOB) podría ser usada para determinar la presión media bajo la cual se descargó el volumen del bulbo.

Para asignar un diámetro a uno de sus tubos no cilíndricos, *Poiseuille* calculó primero un diámetro medio geométrico para cada extremo. Esto se definió como el diámetro del círculo que tiene la misma área que una elipse con los diámetros máximo y mínimo de la sección del tubo. El promedio aritmético de los medios geométricos en los dos extremos se tomó como el diámetro medio del tubo.

Siguiendo el esquema anterior, *Poiseuille* analizó los datos de siete de sus anteriores experimentos, de los cuales pudo discernir que los volúmenes de eflujo (en 500 s) variaban directamente como la cuarta potencia del diámetro medio. Ahora diría que

$$Q = K''\frac{P\,D^4}{L}$$ **Ecuación 257**

K" es simplemente una función de la temperatura y el tipo de líquido que fluye. Para 10 º C sus datos arrojó un valor promedio de K" = 2.495,224 para el agua destilada expresada en unidades mixtas de (mg/s) / mmHg mm^3.

En su serie final de experimentos, *Poiseuille* exploró la influencia de la temperatura de unas pocas décimas de grado e a 45ºC. Utilizó cuatro de sus tubos originales (antes de truncarlos): A, e, D 'y E. En cada caso, corrigió tanto el diámetro del tubo como el volumen del bulbo para expansión o contracción térmica con respecto al estado de referencia de 10ºC. Reconociendo que la dependencia de K" en la temperatura T no era lineal, eligió buscar un ajuste polinomial de la forma K" = K1 (1 + AT + A'T2 + A"T3 +...) (Ecuación 258) y encontró para agua destilada:

$$K''=1836{,}7\left(1+0{,}033679T+0{,}00022099T^2\right)$$ **Ecuación 259**

donde T está en ºC.

Poiseuille reconoció lo que ahora se conoce como efectos de entrada, pero no llegó a conclusiones precisas. En su primera serie de experimentos sobre el efecto de presión que comienza con el tubo A, *Poiseuille* encontró que los resultados obtenidos de tubos más cortos se desviaban de la proporcionalidad Q = KP.

Relegó estos experimentos a una "segunda serie de experimentos" y excluyó sus datos de sus análisis posteriores. *Poiseuille* concluyó que la "ley de presión" sólo se mantendría si la longitud del tubo excedía un cierto límite y que este límite dependería del diámetro del tubo. Observó que cuanto menor era el diámetro, menor será la longitud límite o mínima. Más allá de esta observación *Poiseuille* no tenía

ninguna explicación para la "segunda serie". En un caso, refiriéndose al tubo que tenía aproximadamente 1 mm de largo, opinó que el "movimiento de las moléculas fluidas" a través del tubo no era rectilíneo. Recordó su observación del flujo sanguíneo en un pequeño diámetro (0,15 mm), rama lateral de la arteria mesentérica de una rana viva. Los "glóbulos de la sangre" podrían verse moviéndose a lo largo de trayectorias lineales sólo si la arteria era más larga que aproximadamente 2 mm.

Los experimentos aberrantes (Segunda Serie) abarcaban una gama bastante amplia de números de *Reynolds*, de cerca de 1 a 2600, pero *Poiseuille* no consideró los roles relativos de las fuerzas inerciales y viscosas en el desarrollo del flujo del tubo. Sin embargo, expresó la creencia de que la proporcionalidad de flujo de presión se mantendría en vasos capilares de más de 300 micras.

Estrictamente hablando, la ley de Poiseuille escrita por Poiseuille es la ecuación

Q = KP anterior. La ecuación que más comúnmente se conoce como la ley de Poiseuille no fue derivada por Poiseuille. La forma más habitual es:

$$Q = \frac{\pi D^4 P}{128 \mu L}$$ **Ecuación 260**

La diferencia entre la (Ecuación **260**) y la Ecuación de *Poiseuille* (Ecuación 257) es simplemente que en la Ecuación 260 la constante de *Poiseuille* K" es reemplazada por $\frac{\pi}{128\mu}$ donde μ es la viscosidad del fluido. Aunque la viscosidad había sido definida por *Navier* (1823), no se mencionó la viscosidad *per se* (por si misma) por Poiseuille. Sin embargo, él reconoció claramente que K" era una función de la temperatura y del líquido que fluía." Las determinaciones de *Poiseuille* de K" para el agua eran tan exactas que la viscosidad derivada de K" coincide con los valores aceptados dentro del 0,1% (Bingham 1922).

La primera derivación de la (Ecuación 260) de las ecuaciones de *Navier-Stokes* se atribuye generalmente a *Eduard Hagenbach* (1833-1910), un físico de Basilea. El artículo de *Hagenbach* de 1860 se reimprime en un libro editado por *L. Schiller*

(1933), que afirma en un apéndice que, aproximadamente al mismo tiempo que el artículo de *Hagenbach* apareció, otra derivación de la ley de *Poiseuille* fue publicada por *H. Jacobson* (1860) basado en conferencias de *Franz Neumann*, un físico de *Königsberg*. El propio tratado de *Neumann* no apareció hasta algunos años más tarde (Neumann, 1883). Bingham (1922) señala que las derivaciones de la ley de *Poiseuille* también fueron publicadas por *H. Helmholtz* (1860), *L. Stephan* (1862), y *E. Mathieu* (1863).

Sir *George Gabriel Stokes* (1813-1903) de la Universidad de *Cambridge* resolvió aparentemente el problema del flujo de *Poiseuille* como una aplicación de las ecuaciones de *Navier-Stokes* que él derivó en el mismo papel en 1845. Sin embargo, él no publicó el resultado porque estaba inseguro de la condición límite de la velocidad cero en la pared del tubo. Escribe: "Pero habiendo calculado, según las condiciones que he mencionado, la descarga de largas tuberías rectas circulares y canales rectangulares y comparado las fórmulas resultantes con algunos de los experimentos de *Bossut* y *Dubuat*, he encontrado que las fórmulas no están de acuerdo con el experimento". [*Charles Bossut* (1730-1814), *Pierre Louis Georges Dubuat* (1734-1809)]. Al parecer, *Stokes* desconocía el trabajo de *Poiseuille* en aquel momento. Más adelante en el mismo artículo (*Stokes* 1845), él discute el flujo en canales y señala la similitud al flujo del tubo bajo la gravedad a la presión constante. Para el caso de un tubo circular escribe: "En este caso la solución es extremadamente fácil" y da la solución:

$$w = \frac{g\,\rho\,\sin\alpha}{4\,\mu}(a^2 - r^2) + U \quad \textbf{Ecuación 261}$$

Aquí w es la velocidad axial, r y a son el radio y la inclinación de la tubería y U es la velocidad del fluido en la pared, que *Stokes* todavía deja abierta. En 1851, Stokes se sentía bastante seguro de la condición de no-deslizamiento para un fluido viscoso en una pared rígida como él explícitamente lo discute y lo utiliza en su famoso documento en el que deriva *Stokes* ley de arrastre en una esfera a bajo

número de *Reynolds* (Stokes 1851). Pero no hizo más comentarios sobre el flujo de tuberías.

La denominación de la (Ecuación 260) como ley de *Poiseuille* se debe a *Hagenbach* (1860) que, después de dar la derivación, generosamente sugirió que la llamara ley de *Poiseuille*: "*wir werden daher die obige Formel die Poiseuille'sche Formel nennen*" (Por lo tanto, llamaremos a la fórmula anterior la fórmula de Poiseuille). *Jacobson* (1860) también llama la (Ecuación 260) la ley de *Poiseuille*.

Hagenbach (1860) indica una nota de pie de página que explica que *Navier* (1823) había llegado a una ecuación diferente, a saber, $Q = C\,P\,D^3/L$ Ecuación 262, donde C es una constante [*Claude Louis Marie Henri Navier* (1785-1836)]. Es interesante notar que *Thomas Young* (1773-1829) trató de resumir fórmulas de caída de presión existentes para el flujo de líquidos en tubos en su Conferencia Crooniana de 1809, cuyo objetivo era estudiar varios aspectos del flujo sanguíneo, incluyendo la propagación de ondas, en la vida organismos. También cita datos de *Bossut* y *Dubuat*. Sus ecuaciones también dan una dependencia de Q aproximadamente proporcional a D3. Esto era aparentemente una opinión generalizada y explica por qué *Bingham* (1940) observa en la obra de *Poiseuille*: "No era una cosa simple ir exactamente en contra de todos los datos establecidos y las fórmulas propuestas de los hidráulicos. Hizo necesario utilizar el máximo posible de precisión" (Sutera P., 1993).

Un aspecto de la ley de *Poiseuille* que no está explícitamente cubierto en la obra de *Poiseuille* es el efecto de la gravedad si el capilar está inclinado. Para este caso la ley de *Poiseuille* puede escribirse:

$$Q = \frac{\pi D^4}{128\,\mu}\left(\frac{P}{L} + \rho X\right)$$ **Ecuación 263**

donde ρ es la densidad del fluido y X es la componente de la fuerza del cuerpo por unidad de masa en la dirección del flujo. Todas las pruebas de *Poiseuille* se llevaron a cabo en tubos horizontales.

Otro aspecto poco documentado de las historias de flujo de *Poiseuille* es quien primero resolvió y denominó el flujo unidireccional entre placas paralelas comúnmente llamadas flujos bidimensionales de *Poiseuille*. La forma de la ley de *Poiseuille* que es la contrapartida a la (Ecuación 263) en este caso es:

$$q = \frac{H^4}{12\,\mu}\left(\frac{P}{L} + \rho\, X\right)$$ **Ecuación 264**

donde q se define como la velocidad de descarga en una anchura H del flujo y H es la separación de las placas. *Poiseuille* nunca mencionó el flujo entre placas paralelas, pero tales flujos eran bien conocidos por *Stokes* (1898) y probablemente se derivaron antes.

En 1839, el ingeniero hidráulico alemán, *Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen* (1797-1884) de Berlín (estudiado anteriormente), publicó un artículo sobre el flujo de agua en tubos cilíndricos. Sus resultados fueron similares a los de *Poiseuille*, pero menos extensos y precisos. Sin embargo, incluyeron algunos efectos de entrada y observaciones de las diferencias entre flujos laminares y turbulentos. En la notación utilizada anteriormente, se supone que la expresión de *Hagen* para la diferencia de presión de conducción es de la forma:

$$\Delta P = \frac{1}{D^4}\left(A\,L\,Q + B\,Q^2\right)$$ **Ecuación 265**

donde A y B son constantes. *Hagen* encontró que A dependía de la temperatura y la expresó en la forma

$$A = a - b\,T + c\,T^2$$ **Ecuación 266**

En el subcapítulo “5.3.2 **“**de la presente tesis sobre *Hagen*, se presentó su fórmula de la forma (Ecuación 252):

$$\Delta P = 8\,\mu\left(\frac{L}{r^2}\right)U + 2{,}7\,\rho\,\frac{U^2}{2}$$

Donde

ΔP = Caída de presión a lo largo de la tubería.

μ = Viscosidad del líquido.

ρ = Densidad absoluta del líquido.

En el que *Hagen* observó que el término U^2 era utilizado para impartir energía cinética al fluido, y que el término U en era necesario para contrarrestar la resistencia friccional. Es la misma fórmula, tan solo que las velocidades van en función de los caudales que representan.

Se ve fácilmente que, para valores suficientemente pequeños de Q, el término Q^2 de la (Ecuación 265) debería ser insignificante. Entonces la resolución de la (Ecuación 265) para Q da la misma forma que la propuesta por *Poiseuille*. *Prandtl* y *Tietjens* (1934) han convertido las mediciones de *Hagen* del coeficiente A en las ecuaciones (Ecuación 265) y (Ecuación 266) para derivar una gráfica de un factor de fricción frente al número de *Reynolds*,

$$R_N = \frac{D\,V}{\nu}$$

donde **V** es la velocidad media y ν es la viscosidad cinemática. Los datos de *Hagen* se sitúan muy cerca de la línea teórica $f = \frac{64}{R_N}$, (donde f es el factor de fricción usual de la tubería) para una gama de números de Reynolds de aproximadamente 70 a 1000 correspondiente a régimen laminar como se verá más adelante. También se muestra el coeficiente de viscosidad del agua extraída de los datos de *Hagen* están de acuerdo con los valores aceptados. Debido a que los resultados de *Hagen* eran bastante precisos y precedieron a la publicación de los principales documentos de *Poiseuille* en 1840 y 1841, *Prandtl* y *Tietjens* sugieren que la ley de flujo laminar debería llamarse la ley de *Hagen-Poiseuille* como lo propugna *Ostwald* (1925). Parece, sin embargo, que la opinión mayoritaria, expresada por el uso común, se ha

establecido en llamarla ley de *Poiseuille*. Hay algunos puntos de razonamiento que se pueden plantear a favor de esta decisión. Parece que *Poiseuille* y *Hagen* trabajaron bastante independientemente y estaban haciendo sus experimentos casi al mismo tiempo. Sus trabajos no se entrecruzan entre sí, pero *Hagen* publicó en 1869 un artículo en el que señalaba que su obra de 1839 precedía a la obra de *Poiseuille* (Hagen, 1869). El primer trabajo de *Poiseuille* data de 1838, aunque sus principales resultados no fueron publicados hasta 1840 y 1841.

Las pruebas de *Hagen* se realizaron en tres tubos de latón de diámetros 0,255, 0,401 y 0,591 cm y longitudes de 47,4, 109 y 105 m, respectivamente. Al buscar la dependencia de la caída de presión en el diámetro del tubo, utilizó un ajuste de mínimos cuadrados para determinar el exponente apropiado del diámetro y reportó un valor de -4,12, pero sugirió que, dado que los posibles errores en las mediciones no eran exactamente conocidos, el valor de – 4,0. En la obra de *Poiseuille*, se utilizaron varios diámetros más diferentes y el exponente -4.0 fue establecido más definitivamente. *Bingham* (1940) concluye:

“No parece que toda la justicia histórica se puede hacer en un nombre y el acoplamiento de varios nombres juntos es engorroso e innecesario. La mayor importancia debe atribuirse al hecho de que el documento de *Poiseuille* trajo convicción, mientras que sin ella los escritos reológicos de todos los demás podrían haber permanecido durante mucho tiempo desconocidos o nunca haber sido escritos” (Sutera P., 1993).

Otra forma de deducir la fórmula de *Poiseuille* es el régimen de un escurrimiento a presión cuando se comporta como laminar, que como se ha definido en párrafos anteriores, es cuando el movimiento se presenta de forma ordenada, suave, estratificada (en láminas o capas), con apariencia transparente e inmóvil del fluido. En estas condiciones resulta preponderante la acción de las fuerzas viscosas sobre las inerciales, no existiendo transferencia lateral de masa, razón por la cual no se producen torbellinos ni se mezclan los filetes del fluido.

Este tipo de régimen es característico de aquellos fluidos que circulan a bajas velocidades y/o con altas viscosidades, y se manifiesta en tuberías cilíndricas para escurrimientos con valores menores del número de *Reynolds* crítico (Recrítico = 2000) como se verá más adelante en esta tesis. Son muy pocos los casos de régimen laminar y un ejemplo de ello es la circulación sanguínea.

El análisis del presente tipo de escurrimiento se efectúa partiendo de las siguientes premisas básicas:

- Régimen laminar. ……..... Corresponde a números de *Reynolds* bajos.

- Movimiento permanente. … $\partial Q / \partial t = 0$ → aceleración local nula.

- Movimiento uniforme. ..... $\partial U / \partial t = 0$ → aceleración convectiva cero.

- Fluido incompresible. ……. ... $\rho = cte$.

- Conducto cerrado.

- Tubería cilíndrica. → Implica velocidad media constante.

No se consideran las fuerzas debidas a la energía superficial ni las de origen elástico, debido a lo irrelevante de su influencia en el movimiento.

Como aclaración de las aceleraciones arriba mencionadas se tiene que:

<u>Aceleración local</u>: variación de la velocidad de una partícula en la posición ocupada por esta. Representa los efectos no permanentes existentes en el flujo.

<u>Aceleración convectiva</u>: variación de la velocidad de una partícula debido al movimiento de esta.

El objetivo principal es determinar una expresión que permita cuantificar la pérdida de carga en un régimen laminar, para ello es necesario en primer término precisar la distribución de velocidades en la sección. Para este fin se procede efectuando un planteamiento físico del problema, para lo cual se define previamente un tramo Δl_{1-2}

en la tubería de radio R, y concéntricamente a la misma, otro cilindro de la misma longitud y radio genérico r menor (Ilustración 77).

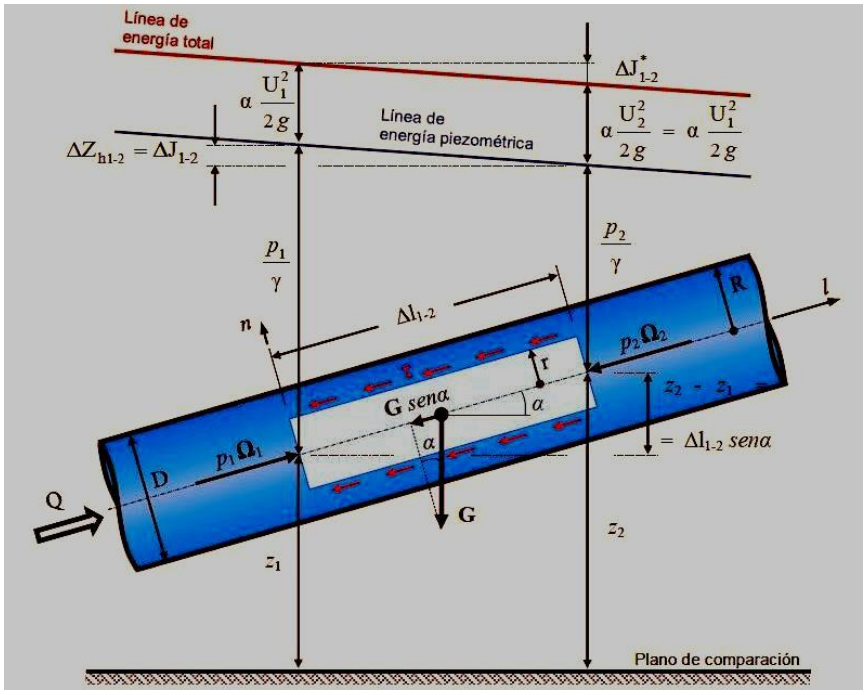


Ilustración 77. Sistema de fuerzas que actúan en una tubería con régimen laminar.

Sobre la conducción cilíndrica se realiza el estudio correspondiente al equilibrio de las fuerzas activas que actúan, recordando de las hipótesis planteadas que la aceleración total es nula (en los postulados de partida se suponen individualmente tanto la aceleración local como la convectiva, ambas iguales a cero (Educativo, 2017).

Las fuerzas actuantes consideradas relevantes para el presente análisis se agrupan en:

a) Fuerzas de superficie.

a1) Fuerzas de presión Fp.

Actúan dos de ellas forma perpendicular a cada una de las secciones Ω_1 y Ω_2 respectivamente.

a2) Fuerzas de roce Fr.

Es la fuerza que se origina mediante la acción de las tensiones tangenciales τ que actúan sobre la superficie lateral del cilindro considerado. Es una fuerza de tipo resistente que se debe a la viscosidad del fluido.

b) Fuerzas de masa Fm.

Solo interviene el peso propio **G** del fluido.

Planteando de manera general la ecuación de equilibrio dinámico, se tiene que la suma de las fuerzas activas debe ser igual a la fuerza inercial **Fi**:

$$F_p + F_r + F_m = F_i$$ **Ecuación 267**

La ecuación correspondiente a las fuerzas inerciales es $F_i = m\,a = 0$ (Ecuación 268) debido a que la aceleración total es cero, por las características correspondientes al régimen laminar, según las hipótesis de partida.

Si se proyectan las fuerzas planteadas de equilibrio sobre el eje tangente l correspondiente a la terna intrínseca, y coincidente con el eje longitudinal de la tubería, se obtiene:

$$\underbrace{p_1\Omega_1 - p_2\Omega_2}_{(F_p)l} \underbrace{- \tau 2\pi r \Delta l_{1-2}}_{(F_r)l} \underbrace{- G\,\mathrm{sen}\alpha}_{(F_m)l} \underbrace{= 0}_{(F_i)l}$$ **Ecuación 269**

Donde:

1) Secciones

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \pi r^2$$ **Ecuación 270**

2) p1, p2 = presiones aplicadas en las secciones Ω_1 y Ω_2.

3) Si se considera que el fluido circulante se comporta como newtoniano, se tiene en general:

$$\tau = \mu \frac{\partial V}{\partial n}$$ **Ecuación 271**

Para este caso específico:

$$\tau = \mu \left[-\frac{\partial V}{\partial r} \right]$$ **Ecuación 272**

Debido a que la velocidad V disminuye cuando aumenta el radio r, cuando se trata de ecuaciones diferenciales, se sigue este criterio.

4) Peso →: $G = \gamma V = \gamma \pi r^2 \Delta l_{1-2}$ **Ecuación 273**

El témino

$$G \operatorname{sen}\alpha = \gamma \pi r^2 \underbrace{\Delta l_{1-2} \operatorname{sen}\alpha}_{(z_2 - z_1)}$$ **Ecuación 274**,

luego

$$G \operatorname{sen}\alpha = \gamma \pi r^2 (z_2 - z_1)$$ **Ecuación 275**

Sustituyendo en la ecuación se obtiene:

$$\pi r^2 (p_1 - p_2) + \mu \frac{\partial V}{\partial r} 2\pi r \Delta l_{1-2} - \gamma \pi r^2 (z_2 - z_1) = 0$$ **Ecuación 276**

Si se divide por $\gamma \pi r$ se obtiene:

$$\frac{\pi r^2 (p_1 - p_2)}{\gamma \pi r} + \mu \frac{\partial V}{\partial r} \frac{2 \pi r \Delta l_{1-2}}{\gamma \pi r} - \frac{\gamma \pi r^2 (z_2 - z_1)}{\gamma \pi r} = 0$$ **Ecuación 277**

$$\frac{r(p_1 - p_2)}{\gamma} + \mu \frac{2 \Delta l_{1-2}}{\gamma} \frac{\partial V}{\partial r} - r(z_2 - z_1) = 0$$ **Ecuación 278**

$$r\left[\frac{(p_1 - p_2)}{\gamma} - (z_2 - z_1)\right] = -\mu \frac{2\Delta l_{1-2}}{\gamma} \frac{\partial V}{\partial r}$$ **Ecuación 279**

$$r\left[\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right)\right] = -\mu \frac{2\Delta l_{1-2}}{\gamma} \frac{\partial V}{\partial r}$$ **Ecuación 280**

Para movimiento uniforme la ecuación de *Bernoulli* es la siguiente:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g} + \Delta J_{1\text{-}2}^*$$ **Ecuación 281**

Para este caso particular se cumple que:

$$\alpha 1 \frac{U_1^2}{2g} = \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g}$$ **Ecuación 282** y

$$\Delta J_{1-2}^* = \Delta J_{1-2}$$ **Ecuación 283**

Luego sustituyendo y despejando resulta que:

$$\Delta J_{1\text{-}2} = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right)$$ **Ecuación 284**

Reemplazando (Ecuación 284) en (Ecuación 280):

$$r\,\Delta J_{1-2} = -\mu \frac{2\Delta l_{1\text{-}2}}{\gamma} \frac{\partial V}{\partial r}$$ **Ecuación 285**

La derivada parcial de la velocidad V con respecto al radio se convierte en derivada total, debido a que el movimiento es permanente y uniforme y la velocidad se

comporta de forma constante respecto al tiempo y al recorrido, por lo que resulta que solo varia con relación al radio, por lo tanto:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{dV}{dr}$$ **Ecuación 286**

Introduciendo y despejando dV :

$$dV = -\frac{\Delta J_{1\text{-}2}}{\Delta l_{1\text{-}2}} \frac{\gamma}{2\mu} r\,dr \; - \frac{j\gamma}{2\mu} r\,dr$$ **Ecuación 287**

Por ser un escurrimiento en régimen laminar, se comporta la viscosidad dinámica de manera constante (μ = cte.). Además, previo a la integración de la (Ecuación 287), se fijan las condiciones de borde:

Debido a que el flujo transita en régimen tipo laminar, la viscosidad es constante (μ = cte.). Antes de la integración de la (Ecuación 287) se fijan las condiciones en función del radio r:

Si: r = R → V = 0 (principio de *Meyer*)

Si: r = r → V = V (velocidad genérica)

Integrando la (Ecuación 287):

$$\int_0^V dV = -\frac{j\gamma}{2\mu} \int_R^r r dr$$ **Ecuación 288**

Luego

$$V = -\frac{j\gamma}{4\mu}\left(R^2 - r^2\right)$$ **Ecuación 289**

La (Ecuación 289) es una función parabólica que permite determinar el valor de la velocidad en cualquier punto de una sección transversal correspondiente a una conducción cilíndrica, en régimen laminar con movimiento permanente y uniforme.

En los extremos se obtiene, por aplicación directa de la (Ecuación 289):

Para r = R (sobre las paredes) → $V = 0$

Para r = r (en el eje hidráulico) → $V = V_{máx}$

En el baricentro de la sección, la velocidad máxima resulta ser:

$$V_{máx} = -\frac{j\gamma}{4\mu} R^2$$ **Ecuación 290**

La gráfica se representa en la siguiente Ilustración 78:

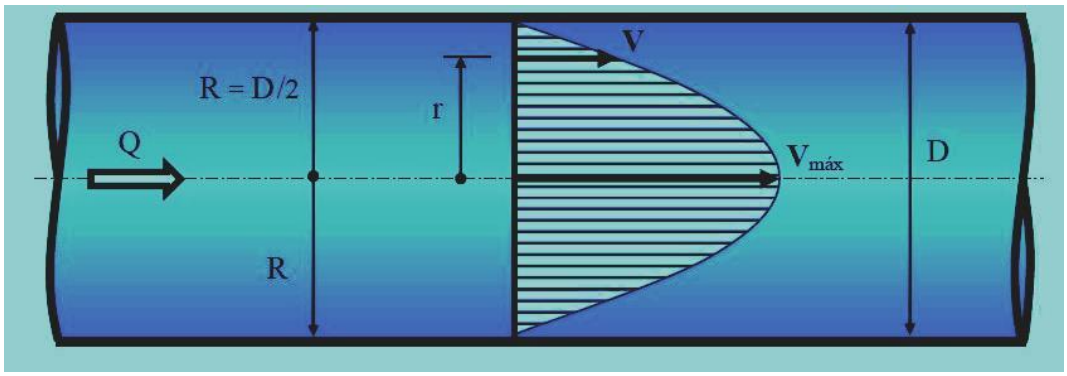


Ilustración 78. Distribución de velocidades en una tubería con régimen laminar.

Teniendo en cuenta la misma representación anterior pero ahora aplicada de manera tridimensional, en esa situación la distribución de velocidades se describe mediante un volumen con forma de paraboloide de revolución (ver Ilustración 79).

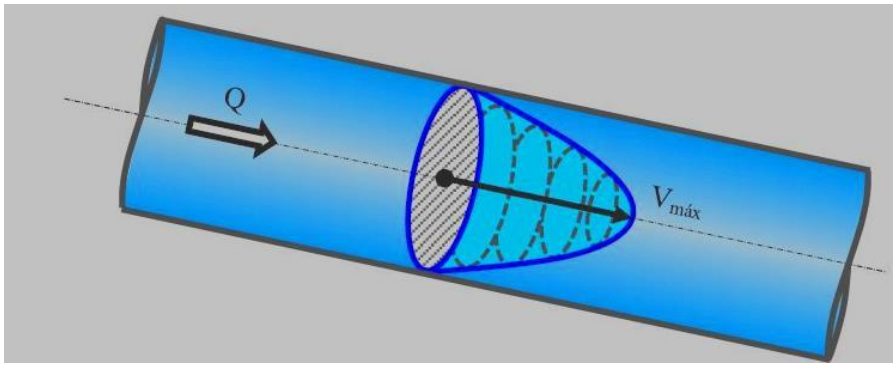


Ilustración 79. Distribución de velocidades en 3D en una tubería con régimen laminar.

Para llegar a la ecuación de *Hagen-Poiseuille* se van a analizar los conceptos de caudal y velocidad media, de forma similar a como se hizo para el análisis de la ecuación de *Darcy Weisbach* (Educativo, 2017).

El caudal de una sección transversal Ω se puede calcular sabiendo su distribución de velocidades, mediante la integral:

$$Q = \int dQ = \int V d\Omega$$ **Ecuación 291**

El diferencial de sección dQ debe ser seleccionado de forma tal que la velocidad V resulte constante en todos sus puntos. Para tuberías cilíndricas corresponde velocidad V constante en las coronas circulares concéntricas de ancho dr en el sentido del radio (Ilustración 80).

Para que la velocidad V sea constante en todos sus puntos, el $d\Omega$ en una tubería cilíndrica deberán ser coronas circulares concéntricas de ancho dr en el sentido del radio (Ilustración 80).

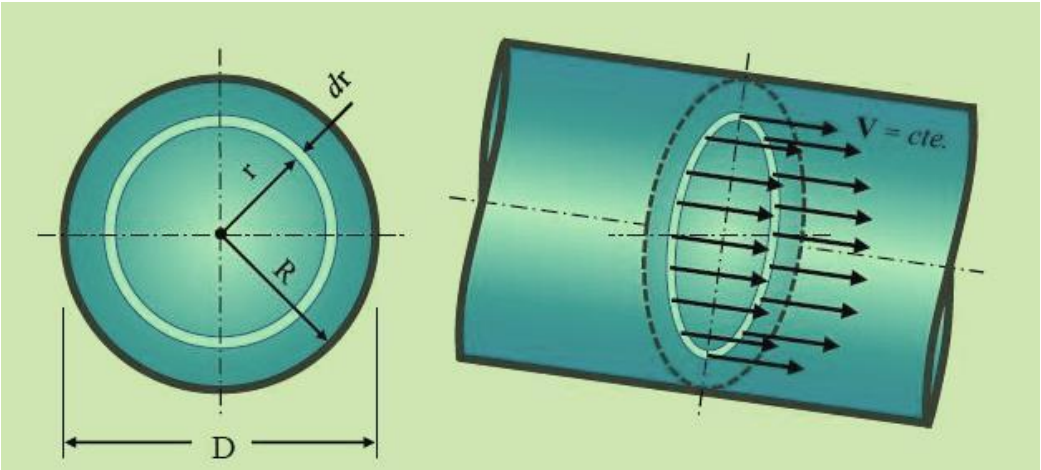


Ilustración 80. Perspectiva de una sección con transporte de agua en régimen laminar.

El diferencial de sección seria:

$$d\Omega = 2\pi r\, dr$$ **Ecuación 292**

Reemplazando (Ecuación 289) y (Ecuación 292) en (Ecuación 291):

$$Q=\int_0^R \frac{j\gamma}{4\mu}\left(R^2 - r^2\right)2\pi\times r dr$$ **Ecuación 293**

Sacando los términos constantes de la operación integral a excepción del número 2:

$$Q=\frac{j\gamma\pi}{4\mu}\int_0^R \left(R^2 - r^2\right)2\,r\,dr$$ **Ecuación 294**

CÁLCULO AUXILIAR

Aplicando el método de sustitución se resuelve la integral que forma parte de la (Ecuación 294). Para ello se define una nueva variable u que contiene a la variable original r:

$$u = R^2 - r^2$$ **Ecuación 295**

$$du = -2r^2$$ **Ecuación 296** → $$dr = -\frac{du}{2r}$$ **Ecuación 297**

Ecuación 298

$$\int_0^R \left(R^2 - r^2\right)2\,r\,dr = -\int_{R^2}^{0} u\,du = \left[-\frac{u^2}{2}\right]_{R^2}^{0} = \left[-\frac{\left(R^2 - r^2\right)^2}{2}\right]_0^R = 0 - \left[-\frac{\left(R^2\right)^2}{2}\right] = \frac{R^4}{2}$$

$$\int_0^R \left(R^2 - r^2\right)2\,r\,dr = \frac{R^4}{2}$$ Ecuación 299

Insertando (Ecuación 299) en (Ecuación 294):

$$Q=\frac{j\gamma\pi}{8\mu}R^4$$ Ecuación 300

O bien, la misma anterior pero enunciada en función del diámetro D:

$$Q=\frac{j\gamma\pi}{128\mu}D^4$$ Ecuación 301

La (Ecuación 301) expresa el caudal Q que circula a través de una tubería cilíndrica en régimen laminar con movimiento permanente y uniforme.

La velocidad media U en cualquier sección Ω de la conducción se obtiene simplemente relacionando el gasto Q con dicha sección:

$$U = \frac{Q}{\Omega} = \frac{j\gamma\pi}{8\mu} R^4 \frac{1}{\pi R^2}$$ Ecuación 302

$$U = \frac{j\gamma}{8\mu} R^2$$ Ecuación 303

O sino referenciada al diámetro D, tal como es más habitual su uso en la práctica:

$$U = \frac{j\gamma}{32\mu} D^2$$ Ecuación 304

Si se efectúa la relación entre las ecuaciones (Ecuación 290) y (Ecuación 304) se puede observar que en régimen laminar la velocidad máxima $V_{máx}$ es justamente el doble que la velocidad media U (Ilustración 81).

$$\frac{V_{máx}}{U} = \frac{\frac{j\gamma}{4\mu} R^2}{\frac{j\gamma}{8\mu} R^2} = 2$$ Ecuación 305 → $V_{máx} = 2U$ Ecuación 306

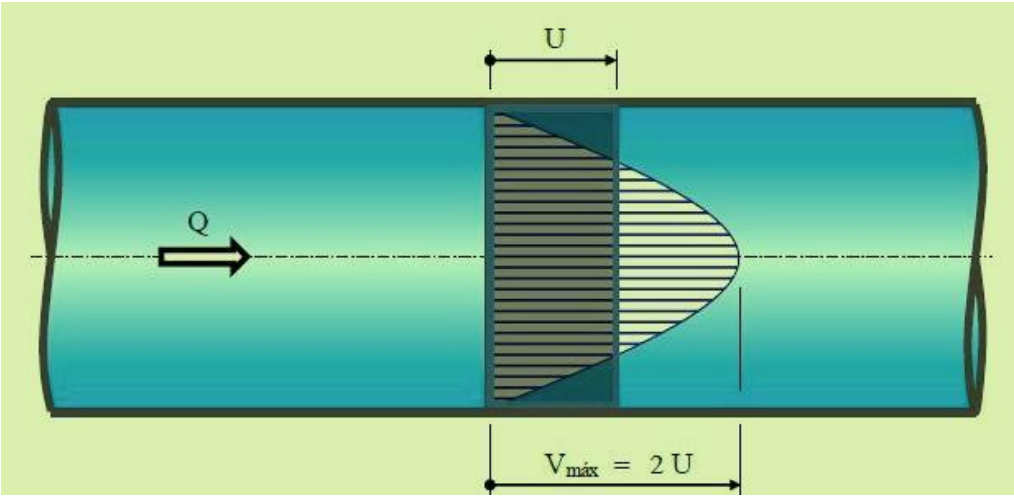


Ilustración 81. Velocidad media y velocidad máxima en un escurrimiento con régimen laminar.

Para llegar a la expresión de *Hagen-Poiseuille* se parte de la (Ecuación 304) despejando el gradiente de la pérdida de carga piezométrica:

$$j=32\frac{\mu U}{\gamma D^2}$$ **Ecuación 307**

O bien, la pérdida de carga en el tramo Δl_{1-2}:

$$\Delta J_{1\text{-}2}=32\frac{\mu U \Delta l_{1\text{-}2}}{\gamma D^2}$$ **Ecuación 308**

En este caso se analiza la totalidad de la conducción l en lugar del tramo de tubería $\Delta l_{1\text{-}2}$, por lo que a la pérdida de carga j ahora se denomina J. Por lo tanto, la (Ecuación 307) planteada anteriormente quedaría aplicando el mismo concepto de la forma:

$$J=32\frac{\mu U l}{\gamma D^2}$$ **Ecuación 309**

Las ecuaciones (Ecuación 307) y (Ecuación 309) se conocen en el ámbito de la ingeniería hidráulica como las ecuaciones de *Hagen – Poiseuille* en honor a los investigadores *Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen* (Alemán 1797-1884) del que ya hemos tratado anteriormente y *Jean Léonard Marie Poiseuille* del cual estamos

desarrollando en esta. Analizando en particular la (Ecuación 309), la cual se emplea puntualmente para el cálculo de la pérdida de carga en una tubería de longitud l, se puede observar que dicha pérdida resulta ser directamente proporcional a la velocidad media U del flujo.

En resumen, la (Ecuación 309) evalúa la pérdida J en función de las siguientes variables:

- Propiedades de los fluidos → μ y γ.
- Geométricas → D y l.
- Cinemáticas → U.

La (Ecuación 309) se puede expresar en función del caudal Q, para lo cual se procede multiplicando y dividiendo simultáneamente por la sección Ω, y luego se considera la igualdad $U \times \Omega = Q$:

$$J = 32 \frac{\mu U l}{\gamma D^2} \frac{\Omega}{\Omega} = \frac{\mu Q l}{\gamma D^2} \frac{4}{\pi D^2}$$ **Ecuación 310**

$$J = 128 \frac{\mu Q l}{\gamma \pi D^4}$$ **Ecuación 311**

En esta expresión de *Hagen - Poiseuille* se puede apreciar la significativa influencia por parte del diámetro D en la pérdida de carga J. En efecto, para un flujo en un régimen laminar resulta ser inversamente proporcional a la cuarta potencia del diámetro D.

5.2.4 Robert Manning (1816 – 1897)

Biografía sucinta

Ilustración 82. Retrato de Robert Manning

Nació en Normandía (Francia) en octubre de 1816, hijo de irlandeses que se hallaban en Francia, porque su padre, *Williams* militaba en el cuerpo expedicionario inglés contra Napoleón, en la que un año después del nacimiento de *Robert*, participó en la batalla de *Waterloo*.

En 1826 se mudó a *Waterford*, Irlanda después de la muerte de su padre, donde trabajó desde 1834 hasta 1845 como contable para su tío *John Stephans* (Webmaster, 2017).

En 1846 empezó el periodo de la "Gran Hambruna" debido a que los irlandeses, al contrario de los ingleses, eran campesinos dueños legales de sus parcelas que labraban para el sustento de sus familias, en las que cultivaban exclusivamente la papa cuyo rendimiento era excelente, y por lo tanto el alimento base para los irlandeses, pero una plaga epidémica atacaba al tubérculo antes del desarrollo y Irlanda perdió la cuarta parte de su población.

Fue en ese periodo en el que *Manning* fue reclutado en la División de Drenaje Arterial de la Oficina de Obras Publicas de Irlanda, para llevar a cabo

levantamientos de planos en el oeste del país, una de las zonas mas afectadas por la peste.

Después de un tiempo, fue aceptado como asistente de su jefe, el ingeniero *Samuel Roberts*, pero en 1848, su jefe, es trasladado y *Manning* asciende a ingeniero de distrito, puesto en el que estuvo hasta 1855. En esa época, mostró un gran interés por la Hidráulica e Hidrología, entusiasmado por la lectura del libro "*Traité d`Hydraulique*" (Tratado de Hidráulica) de D`*Abuisson des Voissons*.

En 1851 publica un trabajo mediante, la Institución de ingenieros civiles, en el que expone los problemas que había que enfrentar en el drenaje arterial y en el que dice: "El gasto máximo que hay que descargar en el primer punto que exige la atención del ingeniero, quien en ausencia de toda documentación, se ve obligado a apoyarse en la información más fiel que pueda conseguir acerca de la magnitud y duración de las avenidas anteriores; método que en principio parecería ser muy práctico, pero que es el que más fácilmente lleva a cometer errores".

En los dos años siguientes se confirmaron sus palabras, ya que las lluvias en Irlanda desbordaron los ríos en avenidas que sobrepasaron a todas las registradas anteriormente, incluso en algunas hasta el 100 %.

La situación en Obras Públicas se hacía siempre más difícil por razones financieras, entonces *Manning* decide cambiar de trabajo y en 1854 solicita sin éxito un puesto de ingeniero portuario en Cork; luego envía una solicitud a la "*East India Company*" de la que recibe una oferta, que rechazó al reflexionar los inconvenientes que podrían resultar para la familia.

Descubrió que *Lord Downshire* quería realizar grandes obras hidráulicas: construir un puerto en la bahía de Dundrum y mejorar el suministro de agua a la ciudad de *Belfast*, por lo que *Manning* fue empleado para su supervisión y diseño.

En 1869 *Downshire* muere y su sucesor no tiene los mismos intereses, por lo que no le renuevan el contrato.

En octubre de 1869, a sus 53 años, *Manning* regresa a la Oficina de Obras Públicas como segundo ingeniero jefe, y cuatro años después, el 1 de abril de 1874 es nombrado ingeniero jefe, puesto que ocupó hasta su jubilación en 1891.

Su tarea en este periodo consistió en la supervisión del mantenimiento de los cinco Puertos Reales de Irlanda, de los puertos comerciales y muelles de pesca; la conservación de las obras de navegación y drenaje; el trasporte por canales; la concesión de préstamos para la construcción de ferrocarriles y carreteras, redes de agua potable, alcantarillado y molinos.

En la década de 1860, *Manning* estudió los experimentos clásicos que se realizaron en el siglo XIX sobre el flujo en canales abiertos, donde realizó amplios estudios sobre los aspectos de la lluvia, los volúmenes de los ríos, y la escorrentía del agua, en los que indagó en nuevas áreas de teoría y práctica. Así nació su clásico artículo en 1889 titulado "Sobre el flujo de agua en canales abiertos y tuberías" publicado en la Institución de Ingenieros Civiles de Irlanda. Este documento se convirtió en la referencia principal para su trabajo y la fuente para la ecuación monomial de *Manning*.

El 4 de diciembre de 1889 a la edad de 73 años, *Manning* propuso su fórmula a la Institución de Ingenieros Civiles de Irlanda.

Aporte y desarrollo de su fórmula

Cabe destacar que *Manning* no recibió formación alguna de Mecánica de Fluidos o de ingeniería en general, sin embargo, su experiencia en contaduría y su pragmatismo quedaron reflejados en su trabajo que lo llevó a reducir problemas a su más simple forma.

La ecuación de *Manning* es el resultado de comparar y evaluar las siete mejores y más conocidas fórmulas de la época: Dubuat (1786), *Eytelwein* (1814), *Weisbach* (1845), *St. Venant* (1851), Neville (1860), *Darcy-Bazin* (1865) y *Ganguillet-Kutter* (1869).

Al ser el resultado de un proceso de ajustes de curvas, en el que calculó la velocidad obtenida de cada fórmula (de entre las 7) para una pendiente dada y un radio hidráulico variable desde 0,25 m hasta 30 m, encontró el valor principal de las siete velocidades y generó una fórmula que se ajustaba mejor a los datos obtenidos, de ahí su naturaleza completamente empírica.

Por su simplicidad y resultados satisfactorios válidos para aplicaciones prácticas, se ha convertido en la más utilizada de todas las fórmulas de flujo uniforme para el cálculo de canales abiertos (Khoury, 2005).

Fue sugerida para uso internacional por Lindquist en el "*Scandinavia Sectional Meeting*" del *World Power Conference* en 1933, en *Stockolmo*.

La primera ecuación presentada fue dada en la forma:

$$V=32\left[R\,S(1+R)^{1/3}\right]^{1/2}$$ **Ecuación 312,**

Donde V es la velocidad media, C el factor de resistencia de flujo, R el radio hidráulico y S la pendiente.

Luego, la simplificó de la siguiente manera:

$$V=C\,R^{x}\,S^{1/2}$$ **Ecuación 313**

En 1885, dio a la variable x un valor de 2/3 y quedó así:

$$V=C\,R^{2/3}\,S^{1/2}$$ **Ecuación 314**

Manning envió una carta a *Flamant* indicándole que: "El inverso de C corresponde aproximadamente al inverso de ´´n``, tal como lo determinaron *Ganguillet* y *Kutter*, siendo tanto C como n constante para un mismo caudal".

Manning manifestó su insatisfacción con la fórmula por dos razones:

1) En ese tiempo era difícil determinar la raíz cúbica de un número y luego cuadrarla para llegar a un número de potencia 2/3.

2) La ecuación era dimensionalmente incorrecta, y para obtener la corrección dimensionalmente, desarrollo la siguiente ecuación:

$$V=C\left[(g\,S)^{1/2}\right]^{1/2}\left[R^{1/2}+\frac{0{,}22}{m^{1/2}}(R-0{,}15\,m)\right]$$ **Ecuación 315**

Siendo

m: Altura de la columna de mercurio que equilibra la atmósfera.

C: Un número adimensional que varía con la naturaleza de la superficie.

En algunos libros de texto de finales del siglo XIX, la fórmula de *Manning* viene escrita como sigue:

$$V=\frac{1}{n}R^{2/3}S^{1/2}$$ **Ecuación 316**

En los Estados Unidos n se refiere al coeficiente de rugosidad (fricción) de *Manning*, o la constante de *Manning*.

En Europa, el coeficiente de *Strickler* K es el mismo **C** de *Manning*, que a su vez es el reciproco de **n**.

Evaluación del coeficiente de rugosidad de Manning n.

El valor de **n** es muy variable y depende de múltiples factores para elegir el adecuado, a pesar de que existen tablas completas para seleccionarlo:

En canales, dichos factores, que deben ser considerados de gran utilidad, son los siguientes:

Rugosidad de la superficie. Se refiere al tamaño y la forma de los granos del material que forma parte del perímetro mojado. Los granos finos dan un valor relativamente bajo de **n** y los granos gruesos dan un valor alto de este.

Vegetación. Es una clase de rugosidad superficial, que depende principalmente de la altura, densidad, distribución y tipo de vegetación.

Irregularidad del canal. Se refiere a las variaciones geométricas de las secciones transversales de los canales, su forma y su perímetro mojado al largo de su eje longitudinal. Al avanzar el flujo, un cambio gradual y uniforme en la sección transversal o en su tamaño y forma no produce efectos apreciables en el valor de **n**, pero cambios abruptos o alteraciones de secciones pequeñas y grandes requieren de un valor grande de **n**.

Alineamiento del canal. Las curvas con radios grandes producirán valores de n relativamente bajos, mientras que las curvas bruscas con meandros severos incrementarán el valor de **n**.

Sedimentación y erosión. En general la sedimentación y erosión activa hacen variar al canal en las secciones transversales y ocasionan un incremento en el valor de **n.** *Urquhart* en 1975 señaló que es importante considerar si estos dos procesos están activos y si es probable que permanezcan activos en el futuro.

Obstrucción. Se refiere a la presencia de troncos de árbol, desechos de flujos, atascamientos en el cauce del canal, que puedan tener un impacto considerable sobre el valor de n, cuyo grado de los efectos dependen del número y tamaño de ellos.

Determinación del coeficiente de rugosidad de Manning n.

Para la aplicación de la fórmula de *Manning*, lo más difícil es la determinación del coeficiente de *Manning* n, ya que no existe un método exacto, y al final siempre dependerá de un profundo juicio de ingeniería y experiencia, sobre todo si se trata de canales naturales.

Para calcular entonces el coeficiente de rugosidad n se dispone de tablas como por ejemplo la publicada por el Departamento de Agricultura de U.S.A en 1995 (*Ven Te Chow*, 1959) y una serie de fotografías que muestran valores típicos del coeficiente de n para un determinado tipo de canal.

También existen profundos estudios en función de la granulometría del material que compone el canal, que se salen del cometido de esta tesis.

Para tuberías y tipo de material existen tablas que informan sobre dicho coeficiente, como la que a continuación se muestra:

COEFICIENTE DE RUGOSIDAD DE MANNING DE MATERIALES				
Material	**n**		**Material**	**n**
Plástico (PE, PVC)	0,006-0,010		Fundición	0,012-0,015
Poliï¿½ster reforzado con fibra de vidrio	0,009		Hormigón	0,012-0,017
Acero	0,010-0,011		Hormigón revestido con gunita	0,016-0,022
Hierro galvanizado	0,015-0,017		Revestimiento bituminoso	0,013-0,016

Tabla 129. Coeficientes de rugosidad de Manning de materiales.

La fórmula de pérdida de carga J, expresada en términos de la fórmula de *Manning*, es:

$$h_L = \left[\frac{V\,n}{R^{2/3}}\right]^2 L$$ **Ecuación 317**

Haciendo

$$S = \frac{h_L}{L}$$ **Ecuación 318**

Aquí en esta fórmula, S representa la pendiente de la superficie del agua o de la línea de energía o de la solera del canal, ya que estas líneas son paralelas para el flujo uniforme o permanente y coincide con la pérdida de energía J cuando se trata de canales.

Normalmente la fórmula de *Manning* no se utiliza en conducciones a presión, pero puede aplicarse como se verá a continuación en el ejemplo realizado en el apartado referente a *Chezy* y que volvemos a reproducir (Ilustración 83):

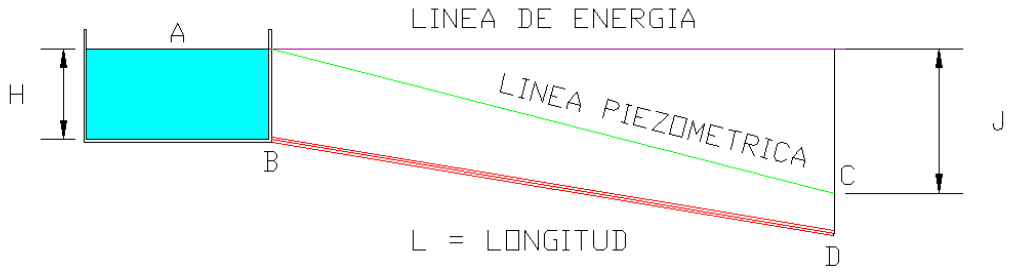


Ilustración 83. Esquema del problema hidráulico.

Un depósito de agua tiene un nivel de H = 5,00 m, en el que arranca una tubería de fundición de L = 1000 m de longitud, diámetro 200 mm.

Desde el fondo del depósito hasta el extremo final de la conducción hay un desnivel de 5 m ($Z_B – Z_D$). ¿Cuál es el caudal máximo que puede desaguar la tubería?

Solución:

En este caso se sobreentiende que el valor de S no es la pendiente de la conducción, por lo tanto, estaríamos hablando en este caso de una pérdida total de energía J para que pueda desaguar todo el caudal, que en este caso sería J = H + (ZB – ZD) = J. En la figura 8 hay que recalcar que en este caso particular el punto C coincide con el D, ya que el caudal máximo buscado requiere de toda la energía desde A hasta D.

Los restantes datos de partida son:

$$V=\frac{1}{n}R^{2/3}S^{1/2}$$

R = 0,050 m

S = j = J/l = 10/1000 = 0,01 m/m

n = (0,010 – 0,014) = 0,010

Luego sustituyendo en la ecuación de *Manning* se obtiene:

V = 1,36 m/s → Q = 42,64 l/s

El caudal exacto según fórmulas más modernas y exactas es de 45 l/s, por lo que el porcentaje de error es de 5,24 %. Este es el caso más favorable, ya que si se toma el valor del coeficiente de *Manning* n = 0,014 que sería el extremo quedaría:

V = 0,97 m/s → Q = 30,46 l/s

En este caso el porcentaje de error seria de 32,31 %, error este demasiado alto, por lo tanto, en tuberías a presión se también se deberá tener el máximo cuidado en la elección de n.

Si calculamos la pérdida de carga generada por el caudal del primer caso se tendría:

$h_L = \left[\frac{V\,n}{R^{2/3}}\right]^2 L$ → J = h_L = 10,04 m, que es lo máximo que puede perder para producir el máximo caudal.

En definitiva, para un cálculo lo más aproximado posible, con la fórmula de *Manning*, es necesario afinar lo máximo posible con el coeficiente de n, fijándonos en casos similares ya resueltos, dado su carácter empírico.

En esta ecuación, la pérdida de carga y el caudal están relacionados por una función cuadrática, de lo que se deduce que el factor de fricción no dependerá del número de *Reynolds* Re, sino tan solo de la rugosidad relativa, lo cual restringe su aplicación a la zona de régimen turbulento rugoso. Si se compara la fórmula de *Manning* con la de *Von Karman-Prandtl* que se verá posteriormente, se puede deducir que el valor del coeficiente de *Manning* no puede depender tan solo de la rugosidad, sino que además dependerá también del diámetro de la tubería (Cabrera, 1996).

5.2.5 Osborne Reynolds (1842-1912)

Biografía sucinta

Ilustración 84. Retrato de Osborne Reynolds.

Nació en *Belfast*, y se trasladó con sus padres al poco tiempo a *Dedham*, *Essex*. Su padre, director de escuela y clérigo, era un gran matemático con un alto interés en la Mecánica, en la que llevó a cabo una serie de patentes para mejoras en equipos agrícolas, y el hijo lo considera como su principal profesor de niño. *Osborne Reynolds* se graduó en 1867 en el *Queens College* de *Cambridge* como el séptimo *wrangler* en Matemáticas (séptimo puesto). En 1868 su nombramiento como profesor de ingeniería en *Owens College* de Manchester, lo convirtió en uno de los primeros profesores de la historia del Reino Unido en obtener este título. Posteriormente se convirtió dicho colegio en la *Victoria University of Manchester* en la que adquirió la titularidad de la Catedra de Ingeniería, en la que solo existían dos de estas cátedras en toda Inglaterra. Esta cátedra había sido recientemente creada y financiada por un grupo de industriales de fabricación en el área de Manchester.

Como profesor y catedrático pensaba que todos los estudiantes de ingeniería debían tener como conocimientos fundamentales comunes, las Matemáticas, la Física y particularmente los principios fundamentales de la Mecánica Clásica. Como profesor carecía de dotes didácticas y pedagógicas a pesar de su gran interés y dedicación, por lo que no era buen profesor, debido a que sus asignaturas eran

difíciles de seguir, debido a los cambios de tema sin ninguna conexión ni transición. Por todo ello abandonaría su cargo en 1905.

En 1883, ayudándose con sus experimentos estudió la viscosidad de los fluidos y definió la cantidad adimensional que determina el tipo de flujo (laminar o turbulento) que presenta un fluido, el nombrado número de *Reynolds*. También estudió la lubricación y determinó el equivalente mecánico del calor. Entre sus obras destacan "*Essay on the use of steam, Sewer gas and how to keep it out of houses, Syllabus of lectures on Engineer"* (Ensayo sobre el uso de vapor, gas de alcantarillado y cómo mantenerlo fuera de las casas, Programa de conferencias sobre Ingeniería), "*The submechanics of the universe"* (La submecánica del universo) y varias publicaciones en semanarios científicos ingleses.

Esta aptitud de *Reynolds* hacia la Física y la Mecánica le viene desde muy temprana edad. Un año antes de entrar en la universidad, se fue a trabajar como aprendiz en el taller de *Edward Hayes*, un reconocido constructor naval en *Stony Straford*, donde obtuvo experiencia práctica en la fabricación y accionamiento de vapores costeros.

En 1877 fue elegido miembro de la *Royal Society* y, en 1888, recibió la *Royal Medal*. Murió en Londres en el año 1912 (Rott, 1990).

Aporte y desarrollo de su fórmula

Con los experimentos de *Reynolds* publicados en 1883, se empieza una nueva era en cuanto al tratamiento más profundo y científico del estudio de los fluidos se refiere, al reconocer y trazar los límites entre el flujo laminar y el turbulento, apoyándose en el análisis dimensional para deducir su fórmula.

El paso del régimen laminar al turbulento varia al modificar la velocidad y/o la viscosidad y se delimita con el hoy llamado Número de *Reynolds* Re.

De esta manera montó el clásico experimento de *Reynolds* que a nivel esquemático es parecido al de la siguiente (Ilustración 85):

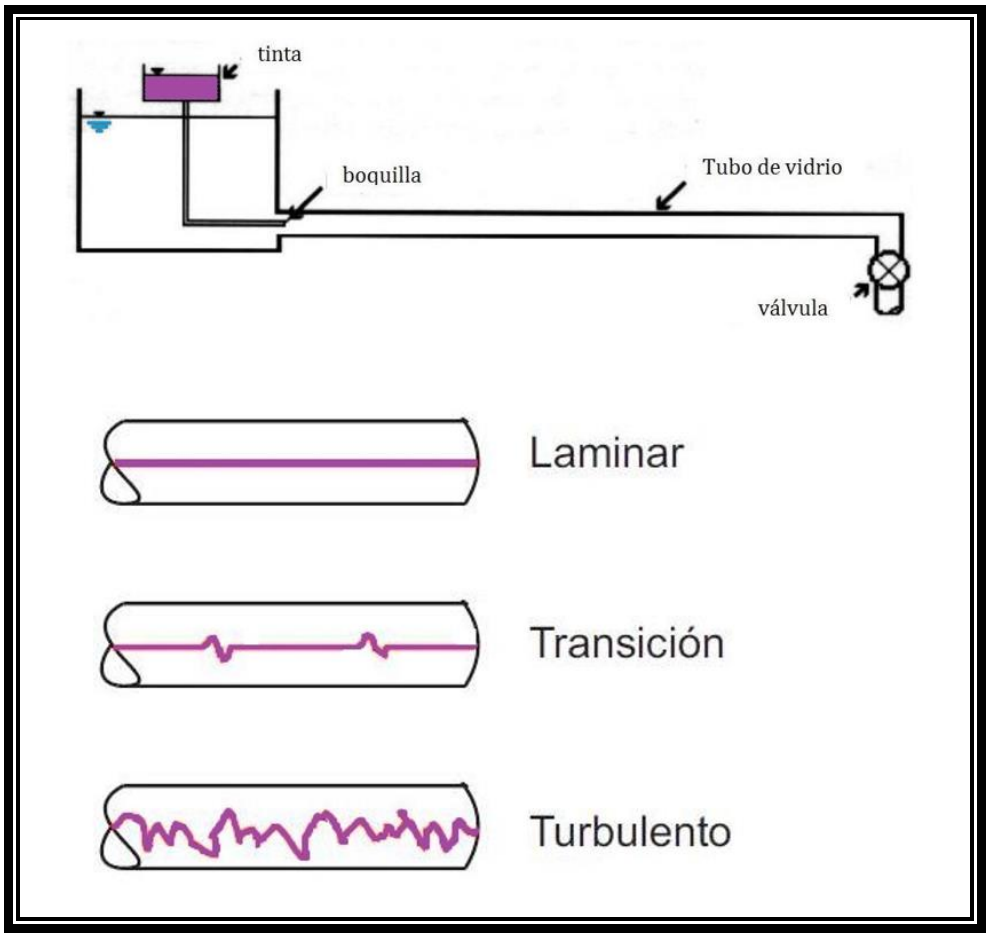


Ilustración 85. Esquema del experimento de Reynolds.

Este experimento consiste en ir variando la apertura de la válvula para regular el caudal volumétrico que pasa por el tubo, y por lo tanto su velocidad. Se introduce un filamento de tinta en la corriente principal del flujo para visualizar los distintos regímenes de escurrimiento que se obtienen para las distintas velocidades que modificaba intencionadamente con la válvula.

Cada tipo de flujo se caracterizó mediante un parámetro adimensional denominado número de *Reynolds*, representando así la razón entre las fuerzas de inercia y las fuerzas de viscosidad o de fricción en el interior de una corriente (Rural, 2008).

Las fuerzas de inercia que actúan sobre un volumen L^3 de corriente vienen representadas por la ecuación de Newton:

$$F = \rho L^3 \frac{V}{T}$$ **Ecuación 319**

Siendo

$$m = \text{masa} = \rho L^3$$ **Ecuación 320** , y $$a = \text{aceleración} = \frac{V}{T}$$ **Ecuación 321**

y como

$$V = \frac{L}{T}$$ **Ecuación 322**

las fuerzas inerciales son:

$$F_i = \rho L^2 V^2$$ **Ecuación 323**

La fuerza de viscosidad tiene por ecuación

$$F_v = \mu \frac{V}{Y} S$$ **Ecuación 324**

μ : viscosidad dinámica (Kg/m.s)
S : Superficie de cada una de las placas (m2)
V : Velocidad de una placa respecto a la otra (m/s)
Y : Espesor de la lámina líquida (m)

Por lo tanto:

$$F_v = \mu \frac{V}{L} L^2 = \mu V L$$ **Ecuación 325**

El cociente entre las dos fuerzas es el Re:

$$Re = \frac{F_i}{F_v} = \frac{\rho L^2 V^2}{\mu V L} = \frac{\rho L V}{\mu}$$ **Ecuación 326**

Como la viscosidad cinemática es (Ecuación 6) $\upsilon = \frac{\mu}{\rho}$, entonces

$$Re = \frac{L V}{\upsilon}$$ **Ecuación 327**

En el caso de una tubería (sección circular), de longitud L, diámetro D se tiene:

$$F_i = ma = \rho \pi \frac{D^2}{4} L \frac{V}{T} = \rho \pi \frac{D^2}{4} L \frac{V}{T} = \rho \pi \frac{D^2}{4} \frac{L}{T} V = \rho \pi \frac{D^2}{4} V^2$$ **Ecuación 328**

Si sustituimos en la ecuación de las fuerzas viscosas $Y = D$ y $S = \pi r^2 = \pi \frac{D^2}{4}$ se tiene:

$$F_v = \mu \frac{V}{D} \pi \frac{D^2}{4}$$ **Ecuación 329**

Por lo que el número Reynolds es:

$$Re = \frac{F_i}{F_v} = \frac{\rho \pi \frac{D^2}{4} V^2}{\mu \frac{V}{D} \pi \frac{D^2}{4}} = \frac{\rho}{\mu} V D = \frac{V D}{\upsilon}$$ **Ecuación 330**

$$Re = \frac{VD}{\upsilon}$$ **Ecuación 331**

Los rangos que determinó *Reynolds* para los distintos tipos de flujo son:

$Re \leq 2.300$	Flujo laminar
$2.300 < Re < 4.000$	Flujo de transición/crítico
$Re > 4.000$	Flujo turbulento

Estos valores son aceptables para realizar cálculos en ingeniería, pero no son exactos ya que dependen de muchos factores del flujo.

Reynolds desarrolló apoyándose en el análisis dimensional una ley racional de resistencia al flujo, basándose en la suposición de que la resistencia al flujo dependía del diámetro, la longitud, y la condición de la superficie interior de la tubería; de la viscosidad y densidad del fluido y de la velocidad media del flujo a través de la tubería y que dependía de cierta potencia de cada uno de esos elementos.

La fórmula de *Reynolds*, válida para tubos capilares y también para los de mayor diámetro y también válida para flujos laminar y turbulento, puede expresarse como:

$$J = K\,U^{n}\,\nu^{2n}\,L\,D^{n-3}$$ **Ecuación 332**

donde:

n: Exponente de la velocidad media del flujo

K: Coeficiente que depende de la rugosidad de la tubería.

ν: Viscosidad cinemática del fluido.

En concordancia con los resultados experimentales realizados por *Reynolds*:

n=1 cuando no se excede la velocidad crítica (límite superior del régimen laminar).

n=1,7 para tubos lisos.

n=2 para tubos muy rugosos correspondiente a valores de la velocidad mayores que la crítica correspondiente al flujo turbulento.

Esta expresión exponencial permite expresar en esa forma los resultados de los experimentos de otros investigadores anteriores y posteriores al él, pudiéndose representar como una línea recta en un diagrama logarítmico de J/L – U.

Reynolds analizó las experiencias de *Darcy* y constató que también podían ser representadas por líneas rectas en gráficos logarítmicos deduciendo los siguientes valores para n (Tabla 130):

MATERIAL	VALORES DE n
Tubos de vidrio	1,79
Tubos de plomo unidos por soldadura	1,79
Tubos de hierro dulce asfaltados	1,82
Tubos nuevos de fundición	1,88
Tubos de incrustación	2,00
Tubos desincrustados	1,91

Tabla 130. Valores de n analizados por Reynolds según las experiencias de Darcy.

Relación entre el número de Reynolds y el cálculo de las pérdidas de carga.

Coeficiente de fricción para régimen laminar

En el apartado "5.3.1 *Julius Weisbach* 1806-1871" de esta tesis se expuso la fórmula de *Darcy-Weisbach*, que es la forma más tradicional para calcular las pérdidas de carga en una tubería y se expuso de la forma (Ecuación 249):

$$h_f = \frac{64}{R}\frac{L}{d}\frac{v^2}{2g}$$

de tal manera que el coeficiente de fricción en función del número de *Reynolds* para régimen laminar es

$$f = \frac{64}{R}$$ **Ecuación 333** ,

y la forma general de expresar la fórmula de *Darcy-Weisbach* tal como se expuso es (Ecuación 250):

$$h_f = f\,\frac{L}{d}\,\frac{v^2}{2g}$$

Coeficiente de fricción para régimen turbulento

La fórmula de *Darcy-Weisbach* sirve para cualquier tipo de flujo en cualquier tipo de régimen, pero lo difícil es la determinación del factor de fricción f, debido a que

es muy complejo encontrarlo ya que depende de varios factores tales como el tipo de flujo o la rugosidad de la tubería.

Para determinar el factor f de fricción existen numerosas fórmulas tales como las de *Colebrook-White*, *Prandlt-Von Karman*, *Nikuradse*, *Swame-Jain*, *Moody* (abaco), etc.

En los siguientes apartados de la presente tesis se expondrá cada caso en particular.

5.2.6 Fórmula de Hazen-Williams

Fórmula desarrollada por los investigadores *Allen Tracy Hazen* (1869-1930) y *Gardner Stewart Williams* (1866-1931), con gran difusión en el ámbito del Continente Americano. La ecuación fue probada en base a numerosas experiencias con distintos tipos de materiales de uso frecuente en la época. Hoy en día está integrada en programas de cálculos de redes tales como el Epanet, como una opción más de cálculo dentro del mismo al considerar el coeficiente de *Hazen-Willians* entre sus opciones hidráulicas.

5.2.6.1 Gardner Stewart Williams (1866 – 1931)

Biografía sucinta

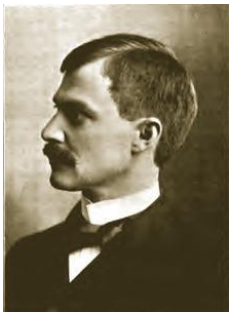


Ilustración 86. Retrato de Gardner Stewart Williams.

Gardner Stewart Williams nació en *Saginaw*, *Michigan* (EE UU), en 1866. Se graduó de *Saginaw City High School* en 1884, y recibió un título en ingeniería civil de la Universidad de *Michigan* en 1889.

Williams se convirtió en una autoridad nacionalmente reconocida en ingeniería hidráulica, y era conocido por sus múltiples presas de arco, plantas hidroeléctricas y por desarrollar las tablas hidráulicas *Hazen-Williams*. Fue empleado como ingeniero en la Construcción de Obras Hidráulicas en *Bismarck*, *Dakota del Norte*, y en *Greenville* y *Owosso*, *Michigan*. De 1890 a 1893 fue dibujante e ingeniero de la *Russell Wheel and Foundry Company* de *Detroit*, y de 1893 a 1898 ingeniero civil de la Junta de Comisionados del Agua de *Detroit*. Mientras estuvo en *Detroit*

desarrolló las valiosas Tablas *Hazen-Williams*, que calculan la pérdida de carga en tuberías. De 1898 a 1904, *Williams* desempeño la labor de profesor de Hidráulica Experimental e ingeniero a cargo del Laboratorio Hidráulico de la Universidad de *Cornell*, y de 1904 a 1911 como profesor de ingeniería civil, Hidráulica y Sanitaria en la Universidad de *Michigan*.

Williams trabajó en una Ingeniería de Consultoría desde 1895, y tenía una creciente demanda como consultor. En 1911 renunció a la Universidad y se dedicó a tiempo completo a su práctica de consultoría. Abrió su primera oficina con *Robert Norris*, un antiguo alumno, como subordinado. De 1911 a 1931, *Williams* tuvo una amplia gama de intereses en ingeniería, y su compañía tenía oficinas en *Ann Arbor* y *Chicago*. Además de ser un consultor de ingeniería, *Williams* actuó como agente de sus clientes hidroeléctricos y compró los derechos de flujo a lo largo de varios ríos. También se hizo conocido como un testigo experto y testificó en casos judiciales en todo Estados Unidos sobre las causas de fallas hidráulicas. En 1923, su Consultoria formó una sociedad conocida como *Ayres*, *Lewis*, *Norris* y *May*. *Williams*, sin embargo, prefirió permanecer como un consultor independiente.

Entre sus muchos logros, *Williams* diseñó la presa de arco único *Cheeseborough Dam* en *Ithaca*, *Nueva York*, en 1906; la presa de arco múltiple en *Sturgis*, *Michigan*, que fue construida en 1910; y la planta de energía de agua en *Sault Ste*. *Marie*. En 1930 diseñó la presa *Magnitogorsky* en el río Ural en Siberia, Rusia.

Como consultor de la *Detroit Edison Company*, *Williams* preparó una propuesta para el desarrollo de los poderes hídricos del río Hurón. Para 1910, *Detroit Edison*, con *Williams* actuando como su agente, había adquirido la mayoría de los derechos de prospección necesarios para el proyecto. El desarrollo del *Huron River* no se completó según lo planeado, pero se construyeron seis presas: *Barton* en 1912, *Argo* en 1913, *Geddes* en 1916, *Superior* en 1919, *French Landing* en 1925 y *Rawsonville* (propiedad de *Henry Ford*) en 1927. *Williams* murió en 1931 (Arbor, 1906).

5.2.6.2 Allen Tracy Hazen (1869 – 1930)

Biografía sucinta

Ilustración 87. Retrato de Allen Tracy Hazen.

Allen Hazen nació el 28 de agosto de 1869 en *Norwich*, *Vermont*, USA. Fue un ingeniero experto en Hidráulica, control de inundaciones, purificación de agua y tratamiento de aguas residuales. Su carrera se extendió desde 1888 hasta 1930 y es, quizás, mejor conocido por sus contribuciones a la Hidráulica con la ecuación de *Hazen-Williams*. *Hazen* publicó algunos de los trabajos fundamentales sobre sedimentación y filtración. Fue presidente de la Asociación de Obras Hídricas de Nueva Inglaterra y vicepresidente de la Sociedad Estadounidense de Ingenieros Civiles.

Durante un año en MIT (1887-8), *Hazen* estudió Química y entró en contacto con el profesor *William T. Sedgwick*, el *Dr. Thomas M. Drown* y sus compañeros *George W. Fuller* y *George C. Whipple*. Como resultado directo de su asociación con el *Dr. Thomas M. Drown*, se le ofreció a *Hazen* su primer trabajo en la Estación Experimental *Lawrence* en *Lawrence, Massachusetts*. LES (Estación Experimental *Lawrence*) fue probablemente el primer Instituto en el mundo dedicado exclusivamente a las investigaciones de purificación de agua y tratamiento de aguas residuales. De 1888 a 1893, *Hazen* dirigió el equipo de investigación de este

innovador Instituto de Investigación para la purificación del agua y el tratamiento de aguas residuales.

Hazen es más conocido por desarrollar en 1902 con *Gardner S. Williams* la ecuación de *Hazen-Williams* que describe el flujo de agua en las tuberías. En 1905, los dos ingenieros publicaron un influyente libro, que contenía soluciones a la ecuación de *Hazen-Williams* para tuberías de diámetros muy variables. La ecuación usa una constante derivada empíricamente para la rugosidad de las paredes de la tubería, que se conoce como el coeficiente de *Hazen-Williams*.

En 1908, *Hazen* fue nombrado por el presidente *Theodore Roosevelt* para un panel de ingenieros expertos para inspeccionar el progreso de la construcción en el Canal de Panamá con el presidente electo *William H. Taft*. *Hazen* informó específicamente sobre la solidez de la presa de Gatún (una estructura integral en el sistema de canales), que según dijo, estaba construida con los materiales adecuados y no corría el riesgo de fallar.

Los primeros trabajos de *Hazen* en la Estación Experimental *Lawrence* establecieron algunos de los parámetros básicos para el diseño de filtros lentos de arena. Una de sus mayores contribuciones a la tecnología de filtración fue la derivación de dos términos para describir la distribución del tamaño de los medios filtrantes: tamaño efectivo y coeficiente de uniformidad. Estos dos parámetros se usan hoy en día para especificar el tamaño de los materiales de filtro para aplicaciones de *purificación de agua. Su primer libro, The Filtration of Public Water Supplies*, que se publicó en 1895, todavía se considera un clásico.

Una de sus primeras asignaciones fue como consultor de *Pittsburgh*, *Pennsylvania*, para determinar el mejor método para proporcionar un suministro de agua segura desde el río *Monongahela*. Durante décadas, la ciudad sufrió epidemias de fiebre tifoidea. En ese momento, la filtración mecánica (o filtración rápida de arena apenas comenzaba a entenderse como un proceso de tratamiento). Como ingeniero conservador, *Hazen* recomendó que la ciudad instalara filtros lentos de arena para eliminar tanto la turbidez como las bacterias dañinas de su suministro de agua.

Como en 1904, *Hazen* recomendó la filtración del suministro de agua *Croton*, también conocido como el embalse *Murray Hill*, para la ciudad de *Nueva York*. A partir de 2013, una nueva planta de filtración en ese suministro de agua estaba a punto de completarse.

Hazen recibió títulos honoríficos de doctor en ciencias tanto del Colegio de Agricultura y Artes Mecánicas de *New Hampshire* (1913) como del Colegio *Dartmouth* (1917). En 1915, recibió la Medalla Normanda, que es el más alto honor otorgado por la Sociedad Americana de Ingenieros Civiles para un documento técnico que "hace una contribución definitiva a la ciencia de la ingeniería". Fue seleccionado como miembro honorario de la Asociación Estadounidense de Obras Hídricas en 1930. En 1971, fue incluido en el Salón de la Fama de la Industria del Agua AWWA con su amigo y colega, *George W. Fuller* ". Falleció el 26 de julio de 1930 en *Miles City*, *Montana*, USA (McGuire, 2013).

Aporte y desarrollo de las investigaciones desarrolladas por Hazen – Williams.

La fórmula de *Hazen – Williams* fue creada en 1903, pero no se publicó hasta el año 1920. Muy utilizada por los técnicos americanos para el movimiento turbulento en la zona de transición. Su expresión analítica, en unidades métricas del S.I, es la siguiente (Giles, 1979):

$$J = \frac{10{,}670}{C^{1{,}85}} \frac{L}{D^{4{,}87}} Q^{1{,}85}$$ **Ecuación 334**

Donde:

J = Pérdida de carga (m)

L = Longitud de la tubería (m)

D = Diámetro interno (m)

Q = Caudal (m3/s)

C = Valor de la rugosidad del material (Tabla *Hazen-Williams*)

Válida para régimen turbulento a una temperatura de 5º-20º, solo para agua y el sistema de unidades el M.K.S.

El coeficiente C representa la influencia que la rugosidad de las paredes de la conducción tiene en las pérdidas de carga continua. Los materiales se fueron ampliando y actualizando con el avance en la industria de la fabricación de tuberías.

Su campo de aplicación se cumple satisfactoriamente en los flujos de agua con régimen turbulento para diámetros comprendidos entre 50 mm y 3.500 mm, con valores del número de *Reynolds* Re > 4.000.

Con el tiempo se han realizado pequeños ajustes coincidentes con la realidad, quedando adaptada con exponentes y coeficientes más simples para el cálculo:

$$J = \frac{1}{(0{,}275C)^{1{,}85}} \frac{L}{D^{4{,}85}} Q^{1{,}85}$$ **Ecuación 335**

Tiene un amplio campo de aplicaciones, pudiendo ser aplicada a conducciones libres o forzadas. La fórmula de *Hazen-Williams* no tiene en consideración los efectos viscosos, debido a que las tuberías en general transportan agua a temperatura ambiente, reduciendo así la necesidad de complejos cálculos iterativos. Sus autores se basaron en experiencias con materiales (tubos) de acero, hormigón, plomo, estaño, hierro fundido, madera, ladrillos y vidrio.

Las fórmulas de *Hazen-Williams* para calcular la velocidad y el caudal en problemas de flujos en tuberías son:

$$Q = 0{,}2785\ C\ R^{2{,}63} J^{0{,}54}$$ **Ecuación 336**

$$V = 0{,}355C\ R^{0{,}63} J^{0{,}54}$$ **Ecuación 337**

En donde

V = Velocidad (m/s)

R = Radio hidráulico (m) es el cociente del área de la sección recta por el perímetro mojado, simplificando: a sección llena es D/4.

J = Pendiente de la línea de alturas piezométricas (pérdida de carga por unidad de la longitud de la conducción (m/m).

C = Coeficiente de la rugosidad relativa de *Hazen-Williams* (Tabla 131).

MATERIAL	COEFICIENTE C
Acero con remaches nuevo	111
Acero con remaches 10 años de servicio	96
Acero con remaches 20 años de servicio	87
Acero soldado nuevo	119
Acero soldado 5 años de servicio	111
Acero soldado 10 años de servicio	104
Acero soldado 20 años de servicio	92
Aluminio	130
Asbesto cemento	135
Cobre	130
Fundición nuevo	130
Fundición 5 años de servicio	119
Fundición 10 años de servicio	111
Fundición 20 años de servicio	96
Fundición 30 años de servicio	87
Hormigón centrifugado	135
Madera	120
Plomo	135
Polietileno	150
PRFV	150
PVC	140

Tabla 131. Coeficientes de Hazen – Williams.

El valor de C depende del material de la conducción y del diámetro de esta, y se puede deducir del siguiente ábaco (Ilustración 88):

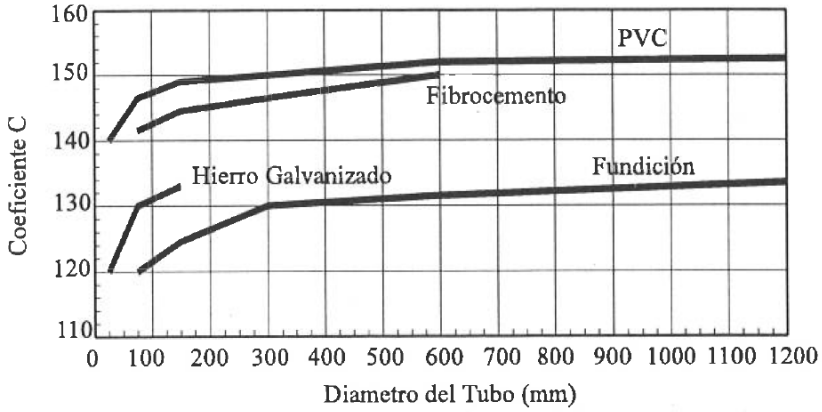


Ilustración 88. Coeficiente de Hazen - Williams

La pérdida de carga es directamente proporcional a la potencia 1,85 de la velocidad, y se puede aplicar a regímenes turbulentos de transición o lisos (Cabrera, 1996).

Monograma de Hazen – Williams.

Está basado en la fórmula de *Hazen – Williams*, y está diseñado para un coeficiente de rugosidad $C_{MON.} = 100$.

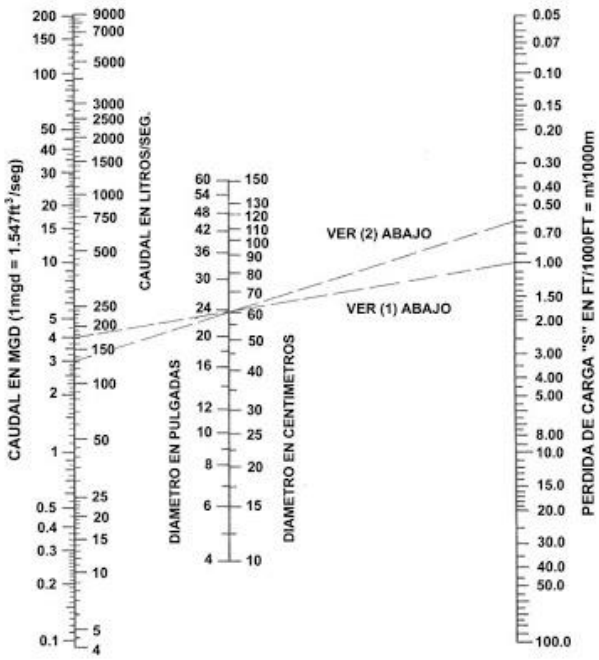


Ilustración 89. Monograma de Hazen – Williams.

Determinación del caudal Q.

Incógnita Q (l/s)

Datos: S (m/1000 m), D (cm), C_{Dato}

Con estos datos se calcula con el monograma el caudal Q_{100} para Q_{100} =100, pero si $C_{Dato} \neq C_{100}$, el caudal Q que andamos buscando es:

$$\left(C_{Dato} / C_{100} \right) \times Q_{100}.$$

<u>Ejemplo:</u> Dado D = 60 cm, S = 1.0m/1000 m y C = 120.

Determinar el caudal Q.

El monograma da Q_{100} = 170 l/seg. Para C = 120, Q = (120/100)170 = 204 l/s

Determinación de la pérdida de carga S.

Incógnita S (m/1.000 m)

Datos: Q (l/s), D (cm), C_{Dato}

Convertimos el caudal Q_{DATO} a Q_{100} para poder entrar en el monograma:

$$Q_{100} = \left(C_{100} / C_{Dato} \right) \times Q_{DATO} \quad \textbf{Ecuación 338}$$

Entrando en el monograma con este caudal Q_{100} y los demás datos encontraremos la pendiente que le corresponde.

<u>Ejemplo:</u> Dado Q = 156 l/seg, D = 60cm, C = 120, determinar la pérdida de carga.

Cambiando Q_{120} a Q_{100}→ Q_{100} = (100/120)156 = 130 l/s.

Entrando en el monograma da S = 0.60m/1000m.

5.2.7 Ludwig Prandlt (1875-1953)

Biografía sucinta

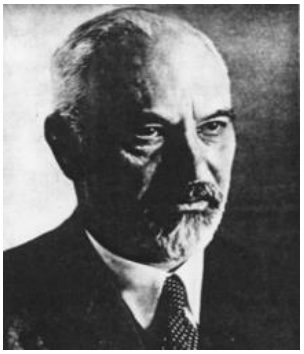


Ilustración 90. Retrato de Ludwig Prandlt.

Ludwig Prandtl nació el 4 de febrero de 1875 en *Freising* (Alemania). Realizó la carrera de ingeniería mecánica en *Munich*. Tenía un don especial con una gran visión para comprender fenómenos físicos y con una capacidad fuera de lo común para expresarlos en forma matemática simple. Por su capacidad de investigación y pedagógica, se convirtió en profesor de Mecánica en la universidad de *Hannover* (Alemania) en 1901. En ese periodo desarrolló su teoría de la capa límite y estudió el flujo supersónico a través de las boquillas (EcuRed, 2010).

Desde 1904 hasta 1953 trabajó como profesor de Mecánica Aplicada en la Universidad de *Gottingen*, donde estableció una escuela de Aerodinámica e Hidrodinámica que alcanzó gran reconocimiento a escala mundial.

El descubrimiento de *Prandtl*, en 1904, en relación con la capa límite, condujo a una comprensión de la fricción de la porción de fluido en contacto con la superficie de un cuerpo sólido sumergido en él con movimiento relativo, y de su reducción a través de la Aerodinámica. Investigó sobre la turbulencia y halló la ley de distribución de velocidades en la capa límite turbulenta. Ideó el tubo de *Prandtl*, esencialmente igual al tubo de *Pitot*. Su trabajo inicial sobre la teoría del ala, conocido como la Teoría del ala de *Lanchester-Prandtl*, siguió un trabajo similar al que realizó *Frederick Lanchester* en la Ingeniería Automotriz y Aeronáutica, pero

fue realizado independientemente, aclarando el proceso del flujo para una superficie de sustentación finita. Posteriormente, *Prandtl* hizo avances decisivos en cuanto al concepto de la capa límite y teorías del ala y su trabajo se convirtió en la materia prima de la Aerodinámica. Más adelante contribuyó con la regla de *Prandtl-Glaubert* para la circulación de aire subsónico, que describía efectos en la compresibilidad del aire a las altas velocidades; Asimismo hizo avances importantes en teorías para flujos supersónicos y turbulencia.

Prandtl aportó a la teoría moderna del ala su forma matemática práctica, dado su trabajo y sus logros en el campo de la dinámica de fluidos con el resultado de unas ecuaciones, que eran más fáciles de entender y aún hoy en día se utilizan en muchas áreas de la Aerodinámica. Es por esta razón por la que se conoce como el padre de la Aerodinámica Moderna, pues la mayoría de sus conceptos fundamentales se originaron en su grandiosa mente y sólo una parte no es atribuible a sus estudios.

Ludwig Prandtl murió en *Gottingen*, Alemania el 15 de agosto de 1953.

Aporte y desarrollo de sus investigaciones

Para entender el desarrollo de la teoría de *Prandtl* (Educativo, 2017), se parte del concepto de resistencia de superficie, para después llegar al tema que nos interesa, el de las pérdidas de carga en conducciones de transporte de agua.

Un fluido en movimiento y en contacto con un sólido, genera un esfuerzo cortante τ sobre la superficie de dicho sólido, proporcional al gradiente transversal de velocidades dV/dn.

Según el principio de *Meyer*, la velocidad del fluido en contacto con el sólido en reposo es nula, no obstante, las sucesivas capas adyacentes están provistas de una velocidad que provocan un gradiente transversal, que genera simultáneamente un esfuerzo cortante sobre la superficie del sólido.

El único caso en el que las partículas junto a los bordes sólidos estarían en movimiento sería en el caso concreto de que el fluido fuese ideal, debido a que su característica principal es la inexistencia de viscosidad.

En el caso de fluido real se pueden presentar dos casos diferentes:

1.- Que las tensiones se produzcan como consecuencia de una circulación con régimen laminar.

2.- Que las tensiones se produzcan como consecuencia de una circulación con régimen turbulento pudiendo llegar a coexistir simultáneamente una zona con régimen laminar y otra turbulenta.

Las características principales de ambos regímenes son las siguientes:

Régimen laminar

Según la ley de *Newton* la fuerza de resistencia sobre la superficie del sólido se cuantifica por la fórmula:

$$\tau = \mu \frac{dV}{dn}$$ **Ecuación 339**

Teniendo en cuenta la existencia de esta fuerza, se obtiene el gradiente de la pérdida de carga mediante la expresión de *Hagen-Poiseuille* para circulación de fluidos a través de tuberías de sección circular.

La distribución de velocidades en este caso es parabólica (Ilustración 91).

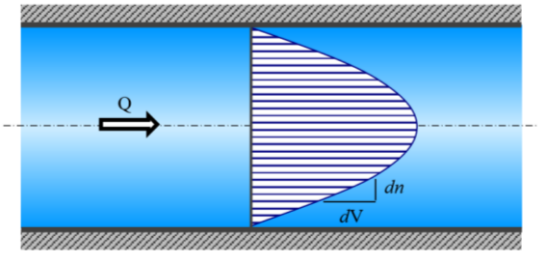


Ilustración 91. Distribución de velocidades en régimen laminar.

Régimen turbulento

En este tipo de régimen, con elevados números de *Reynolds*, los efectos de la viscosidad se concentran en una zona delgada muy próxima a los bordes lisos.

En los inicios de este tipo de estudios, orientados hacia el agua, se tenía la creencia de que la velocidad de las partículas en contacto con los contornos sólidos era distinta de cero, pero después se desveló con pruebas, en otras disciplinas (Química, Naval, Aeronáutica) que dicha velocidad es nula.

Prandtl demostró que en régimen turbulento también se cumple esta nulidad, que los efectos viscosos se concentran en una región muy próxima a las superficies sólidas en reposo, y que la ley de velocidades es una curva de tipo logarítmica (Ilustración 92).

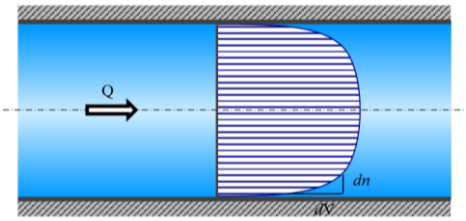


Ilustración 92. Distribución de velocidades en régimen turbulento.

La teoría de la capa límite desarrollada por *Prandtl* establece que para un fluido en movimiento todas las pérdidas friccionales se producen en una delgada franja adyacente al contorno sólido, que también es conocido como estrato límite.

Por regla general, la baja viscosidad que tienen la mayoría de los fluidos repercute en las fuerzas cortantes, en las que estas son apreciables solo donde existan grandes gradientes de velocidad. Por otra parte, la circulación en las demás zonas se puede describir sin cometer grandes errores, por medio de la teoría de los movimientos que en potencia genera una circulación con fluido ideal.

Para una mejor comprensión del concepto de capa límite se introduce un elemento compacto de forma fluidodinámica de forma tal que:

1.- El escurrimiento del fluido es unidireccional y no confinado, lo cual significa que no existen contornos sólidos, así como tampoco la existencia de superficies libres.

2.- El fluido circula con velocidad constante V_0 unidireccional y sin perturbaciones.

3.- El eje principal del elemento compacto coincide con la dirección del movimiento.

El movimiento del fluido provocará las respectivas alteraciones que se propagarán dentro de la zona de influencia del perfil en reposo (Ilustración 93).

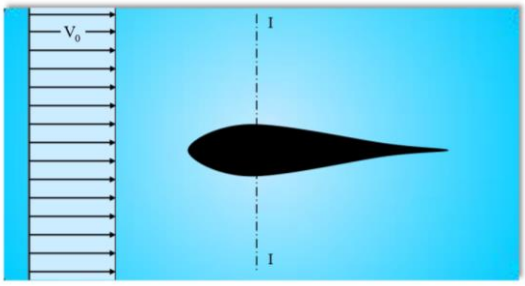


Ilustración 93. Perfil con forma de ala inmerso en un fluido con movimiento unidireccional.

En la sección I-I se efectúa el estudio, y es en donde la alteración del movimiento se prolongará hacia ambos sectores del perfil introducido de manera indefinida, de forma que a efectos tecnológicos prácticos se acepta que la circulación del fluido deja de estar modificada cuando la velocidad alcanza el 99 % del valor de la velocidad no perturbada, aceptándose este 1% de error porcentual.

El análisis se efectúa en la zona comprendida entre el contorno sólido y el lugar donde el movimiento deja de estar perturbado, en los tres tipos siguientes de fluidos:

- Fluido ideal
- Fluido real en régimen laminar
- Fluido real en régimen turbulento

Fluido ideal.

En este caso los aspectos aceleradores del movimiento dependen exclusivamente de la forma geométrica del sólido sumergido y no se tienen en cuenta los efectos de la viscosidad.

Las líneas de corriente permiten calcular la distribución de las velocidades (ver curva A en la Ilustración 94).

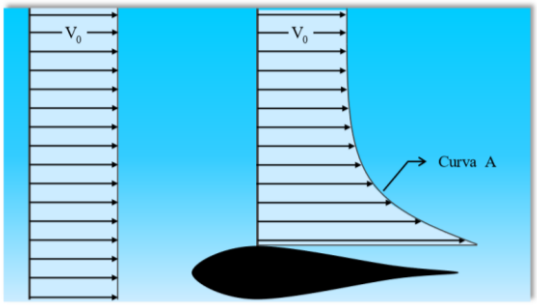


Ilustración 94. Perfil con forma de ala inmerso en un fluido ideal con movimiento unidireccional.

Fluido real con régimen laminar.

A este tipo de circulación le corresponde un número de *Reynolds* relativamente bajo, y los efectos de la viscosidad son muy apreciables e influyentes.

La velocidad en el borde sólido es nula y la distribución de velocidades sigue una ley parabólica hasta coincidir con la velocidad no perturbada V_0 (ver curva B en la Ilustración 95).

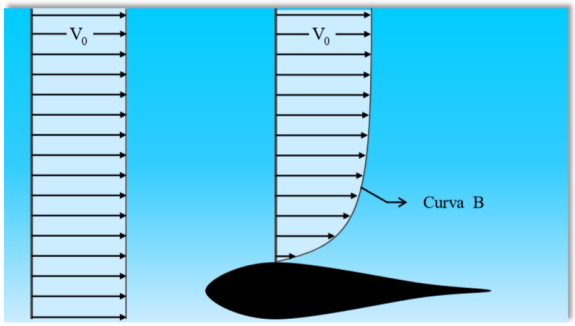


Ilustración 95. Perfil con forma de ala inmerso en un fluido con régimen laminar.

Fluido real con régimen turbulento.

En este caso el número de *Reynolds* es relativamente alto y los efectos de la viscosidad son muy poco importantes y la ley de distribución de las velocidades es de tipo logarítmica.

La velocidad de las partículas son muy impermanentes, con cambios de intensidad y dirección, aunque las causas que generen la circulación sean permanentes, por lo tanto, no todos los vectores velocidad mantienen la dirección de la circulación del fluido, mezclándose las partículas más veloces con las más lentas.

En este intercambio de cantidad de movimiento, la velocidad tiende a uniformarse a un valor medio que no es instantáneo, medido sobre un intervalo denominado pulsación (criterio de *Boussinesq*).

Teniendo en cuenta estas consideraciones se consigue un trazo medio del diagrama de velocidades que resulta muy similar con el que corresponde al movimiento excepto en las adyacencias del borde sólido, en donde se localiza un fuerte gradiente transversal de velocidades (ver curva C, Ilustración 96). Es en esa zona, donde se concentra la mayor parte de la resistencia al movimiento y que *Prandtl* la denominó capa o estrato límite.

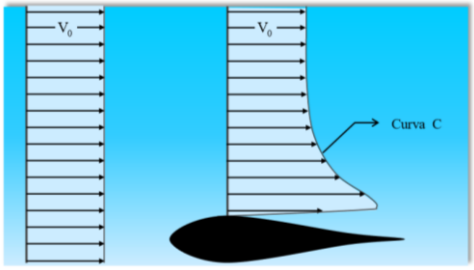


Ilustración 96. Perfil con forma de ala inmerso en un fluido real con régimen turbulento.

En la práctica, la resistencia debida a la viscosidad, en comparación con la totalidad de la masa fluida, tienen mucha mayor importancia en las inmediaciones del contorno sólido.

En la mayoría de las aplicaciones en el campo de la ingeniería civil hidráulica se tiene que:

Red de corriente: Destinada a describir los aspectos aceleradores del movimiento.

Capa límite: Permite determinar los efectos viscosos del escurrimiento.

Características de la capa límite

La utilidad de estudiar la capa límite es la de analizar la variación de las velocidades en la zona de contacto entre un fluido y un sólido sumergido en el mismo. La capa límite se forma debido a la propiedad viscosa del fluido que produce una variación en el posicionamiento de las líneas de corriente próximas a la misma.

La aplicación de la red de corriente es solo válida cuando las fuerzas viscosas son despreciables, por lo que no es aplicable dentro de la zona límite, en donde la viscosidad es una propiedad significativa.

Para resaltar las características más sobresalientes de la capa límite, se puede suponer el caso particular de una placa rectangular fija con superficie plana y espesor despreciable, sumergida de forma paralela, dentro del seno de un fluido no confinado con movimiento unidireccional, permanente y uniforme (Ilustración 97).

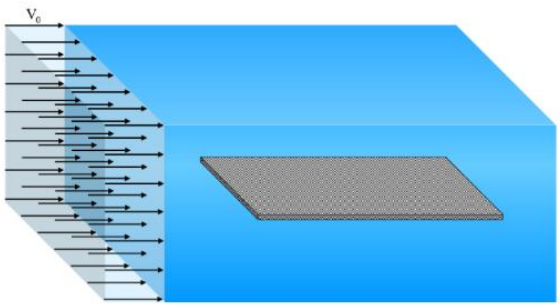


Ilustración 97. Placa rectangular fija inmersa en un fluido con movimiento unidireccional.

Los efectos del movimiento según el tipo de fluido en circulación:

a) Fluido ideal

Los diagramas de velocidad, si el fluido circulante es ideal, coinciden con los correspondientes a los del movimiento no perturbado.

La placa plana no modifica los aspectos aceleradores del movimiento (ver Ilustración 98), lo que significa que no se producirá ninguna alteración en la velocidad.

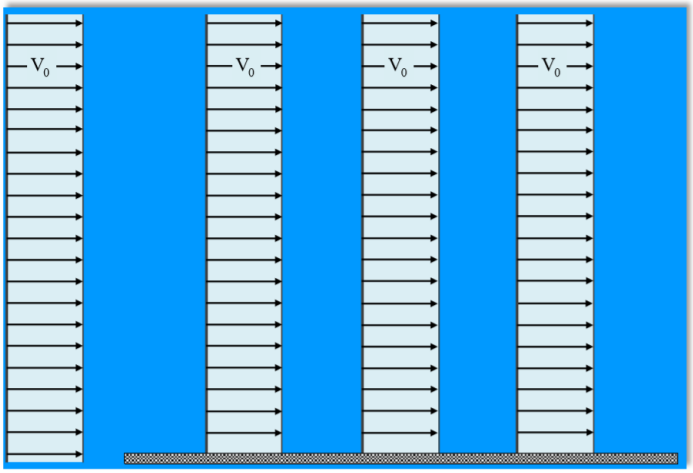


Ilustración 98. Placa rectangular fija inmersa en un fluido con movimiento unidireccional.

b) Fluido real

Siguiendo con el análisis de la placa de espesor despreciable, se diferencian dos zonas en función del tipo de movimiento (régimen laminar o turbulento).

Para el análisis de la placa en varios tramos delimitados por las secciones 1-1, 2-2, etc (ver Ilustración 99), para posteriormente trazar los diagramas de velocidad en cada una de ellas.

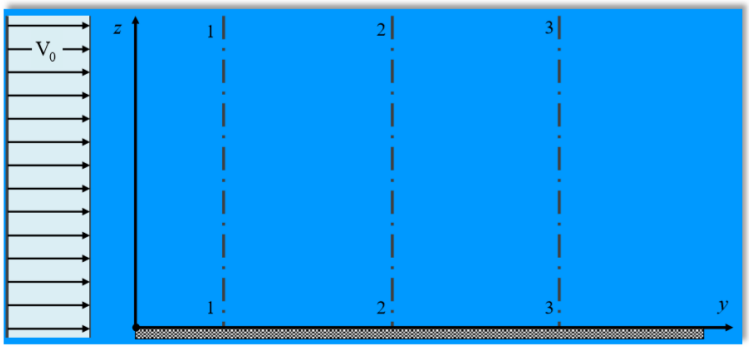


Ilustración 99. Placa rectangular fija inmersa en un fluido ideal dividida en varias secciones.

Para obtener el contorno de la capa límite se grafica cada sección con el punto donde la velocidad V_0 no es perturbada, para ello se determina la altura δ que mide la distancia entre la superficie de la placa y el punto en donde se recupera V_0.

Al avanzar el fluido con régimen inicialmente laminar, las partículas que están en contacto con la placa son frenadas, debido a que la velocidad es cero.

En la Ilustración 100 se indica para la primera sección estudiada I-I el espesor δ_1 de la capa límite a una distancia y_1 del borde de la placa.

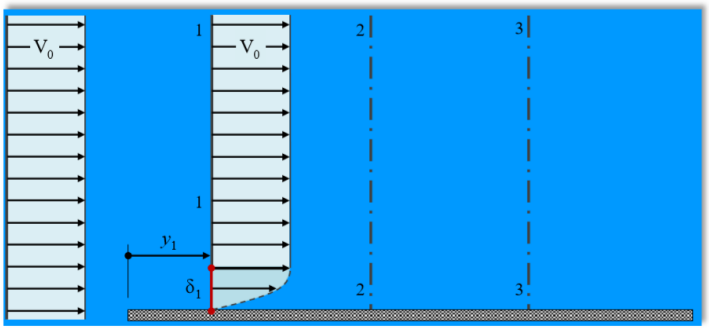


Ilustración 100. Espesor de la capa limite en la sección I-I de una placa fija inmersa en un fluido real.

A medida que el fluido avanza en la dirección longitudinal *y* de la placa hacia la siguiente sección 2-2, la capa límite crece una magnitud δ_2 debido a la influencia viscosa del fluido sobre la superficie sólida, que ejerce un efecto retardador sobre la misma (Ilustración 101).

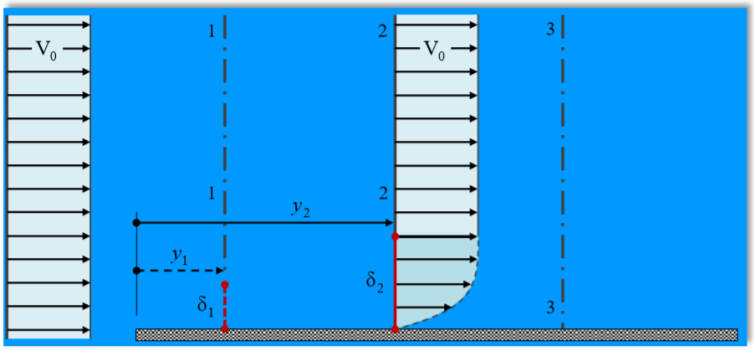


Ilustración 101. Espesor de la capa limite en la sección 2-2 de una placa fija inmersa en un fluido real.

A medida que el fluido avanza, la capa laminar se va desarrollando hasta llegar a un punto en que el movimiento se hace inestable, debido a las nuevas condiciones en la viscosidad y velocidad, convirtiéndose en régimen turbulento. La causa por la que el régimen cambia de laminar a turbulento debe buscarse en el interior del movimiento, que hace que una pequeña perturbación forme torbellinos.

Si el régimen continúa de forma turbulenta, la capa límite crecerá de forma rápida, pero simultáneamente dentro de la capa límite, se ubica una pequeña zona en el estrato próximo a la placa, donde las velocidades son muy bajas por lo tanto el régimen seguirá siendo laminar.

A esta capa se la denomina **subcapa laminar** y corresponde a la zona inferior de la curva III (Ilustración 102).

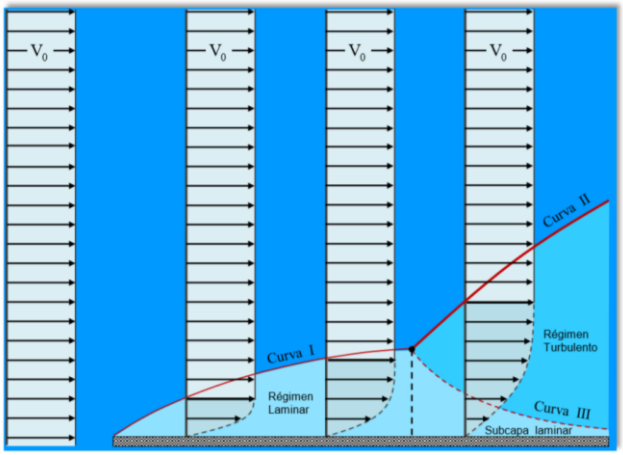


Ilustración 102. Capa límite sobre una placa sumergida en un fluido real con transición laminar-turbulento.

Para evaluar *Prandtl* utiliza el número de *Reynolds* Re para placa rectangular inmersa en un fluido con movimiento unidireccional:

$$Re = \frac{V_0 Y}{\nu}$$ **Ecuación 340**

Siendo:

V_0 = Velocidad no perturbada

Y = Distancia desde el borde de ataque de la placa hasta la sección considerada.

ν = Viscosidad cinemática del fluido

Una masa fluida que circula con régimen laminar se puede transformar en inestable al aumentar el número de *Reynolds* Re.

En definitiva, si la placa es lo suficientemente grande, a partir de una determinada sección se pueden comenzar a generar vórtices o remolinos que originan rápidamente el régimen turbulento (suponiendo constantes V_0 y ν).

Si el movimiento se comporta como plenamente turbulento desde el comienzo (ver curva IV de la Ilustración 103) se debe resaltar que siempre existirá en las proximidades de la placa sólida una zona o subcapa en el cual el comportamiento del movimiento es de tipo laminar.

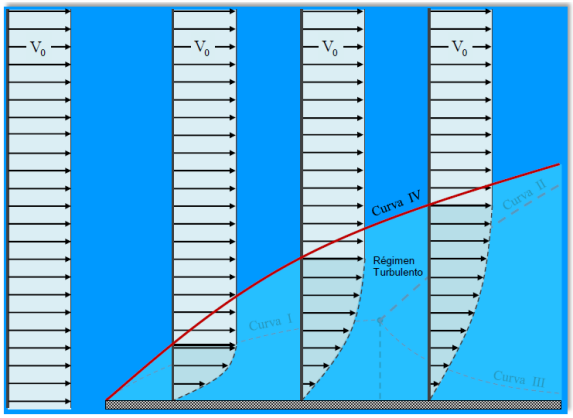


Ilustración 103. Contorno de la capa límite sobre una placa sumergida en un fluido real con régimen turbulento.

Prandtl llegó a las siguientes consideraciones y conclusiones:

1.- A medida que el fluido avanza sobre la longitud de la placa *y*, aumenta la capa límite, disminuye el esfuerzo de corte τ, debido a que es menor el gradiente de velocidades.

2.- El movimiento inicial no perturbado y con velocidad V_0 puede ser laminar o turbulento.

2.1.- En el caso de laminar lo más probable es que toda la capa sea laminar.

2.2.- Si el régimen es turbulento, puede ocurrir que el régimen sea laminar en sus comienzos y que luego se transforme en turbulento.

2.3.- También puede darse el caso que el movimiento sea turbulento desde el comienzo, pero siempre existirá una subcapa laminar en la zona adyacente a la placa, donde los efectos viscosos predominan sobre los turbulentos.

3.- Por regla general el espesor de la capa límite es pequeño con relación a las dimensiones geométricas de la placa. Dentro de esta capa tienen gran importancia las fuerzas resistentes a consecuencia de los elevados gradientes de velocidad que se generan.

4.- La capa límite en régimen turbulento es ligeramente mayor que en régimen laminar, y como el fluido en el primer caso se mueve con pulsaciones en todas las direcciones, en consecuencia, disipa más energía y la fuerza de fricción derivada de ella es superior.

5.- En la zona de fluido libre, fuera de la capa límite (Ilustración 104), un fluido poco viscoso (p.e. el agua o aire), se comporta como un fluido ideal, o sea carente de viscosidad.

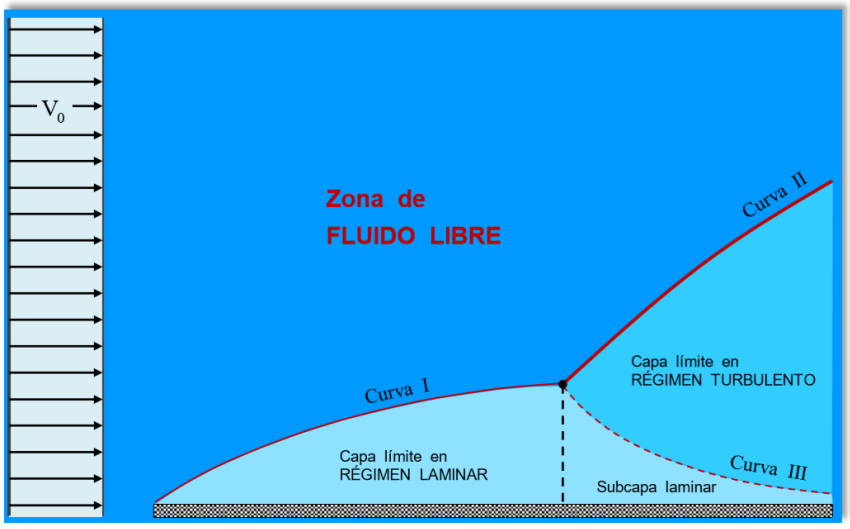


Ilustración 104. Zona de fluido libre en un fluido real con transición laminar – turbulento.

6.- La presión dentro de la capa límite puede ser considerada constante a lo largo de la placa en igual a la presión fuera de la misma.

7.- Experimentalmente se ha determinado que la transición de régimen laminar a régimen turbulento se produce cuando el valor del número de *Reynolds* Re está comprendido entre los siguientes límites:

$$500.000 \leq \mathrm{Re} \leq 3.000.000$$

Entonces se cumple:

Para Re < 500.000 → Capa límite laminar.

Para Re > 3.000.000→ Capa límite turbulenta.

El número de *Reynolds* Re es una magnitud que, en función de la velocidad, viscosidad y la distancia permite efectuar la medición de la mayor o menor turbulencia, pero no la causa que la provoca. El origen de la transición de laminar a turbulento, dentro de la capa límite se encuentra en el interior del escurrimiento, donde una pequeña perturbación genera un vórtice que en general comienza desde el borde sólido y se propaga hacia el centro integrando un amplio espectro de frecuencias fluctuantes.

8.- La variación del espesor de la capa límite es distinta según el tipo de régimen del escurrimiento.

Para graficar el espesor en función de la longitud y establecer la delimitación del contorno del estrato límite, se han realizado diversas experiencias de investigación en laboratorios hidráulicos y se han deducido diversas expresiones matemáticas, que a continuación se exponen:

<u>Capa límite en régimen laminar</u>

<u>Ecuación de Blasius</u>

$$\frac{\delta}{Y} = \frac{4{,}96}{Re_y^{1/2}}$$ **Ecuación 341**

En la práctica se suele redondear a 5 el coeficiente numérico 4,96, por consiguiente, la expresión que suele utilizarse en la modificada:

$$\frac{\delta}{Y} = \frac{5}{\sqrt{\frac{V_0 Y}{\nu}}}$$ **Ecuación 342**

Luego

$$\delta = f(y) = \frac{5Y}{\sqrt{\frac{V_0 Y}{\nu}}}$$ **Ecuación 343**

<u>Capa límite en régimen turbulento</u>

<u>Ecuación de Prandtl</u>

$$\frac{\delta}{Y} = \frac{0,37}{Re_y^{1/5}}$$ **Ecuación 344**

$$\frac{\delta}{Y} = \frac{0,377}{\sqrt[5]{\frac{V_0 Y}{\nu}}}$$ **Ecuación 345**

Luego

$$\delta = f(y) = \frac{0,377Y}{\sqrt[5]{\frac{V_0 Y}{\nu}}}$$ **Ecuación 346**

9.- Para calcular el empuje total P que actúa sobre ambas caras de la placa de ancho B y largo O, se intrega la tensión tangencial actuante τ, cuyos valores son distintos según se trate de un régimen laminar o turbulento. Los efectos de la corriente sobre el borde se desprecian en el cálculo, por tratarse de un espesor despreciable o bien por estar biselado.

La acción y sentido de la tensión tangencial es provocada por el efecto viscoso de una masa de fluido real en movimiento sobre las caras de la placa rectangular, según se indica en la Ilustración 105.

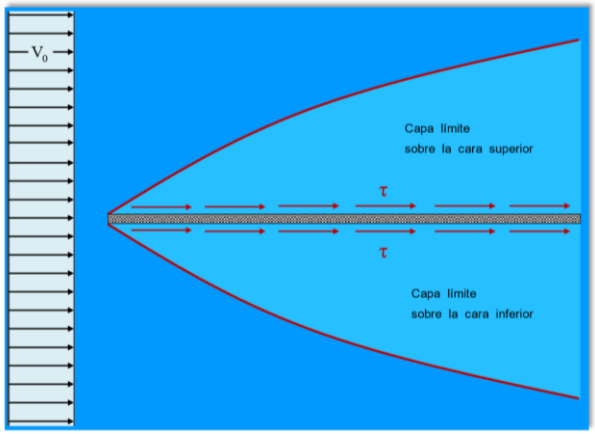


Ilustración 105. Tensión tangencial sobre una placa fija inmersa en un fluido en movimiento.

Las variables que intervienen en la expresión de la tensión tangencial τ son las siguientes:

Producto entre peso específico y energía cinética por unidad de peso:

$$\gamma \frac{V_0^2}{2g} = \rho \frac{V_0^2}{2}$$ **Ecuación 347**

Coeficiente de empuje C_f

Por lo tanto:

$$\tau = C_f \frac{\rho V_0^2}{2}$$ **Ecuación 348**

<u>Empuje en régimen laminar</u>

Se ha demostrado experimental y analíticamente que el coeficiente de empuje C_f en régimen laminar es:

$$C_f = \frac{0{,}664}{Re^2}$$ **Ecuación 349**

Sustituyendo la (Ecuación 349) en la ecuación general de la tensión tangencial τ, se procede al cálculo del empuje sobre una de las caras, cuyo valor es la mitad del empuje total P sobre la placa (Ilustración 106).

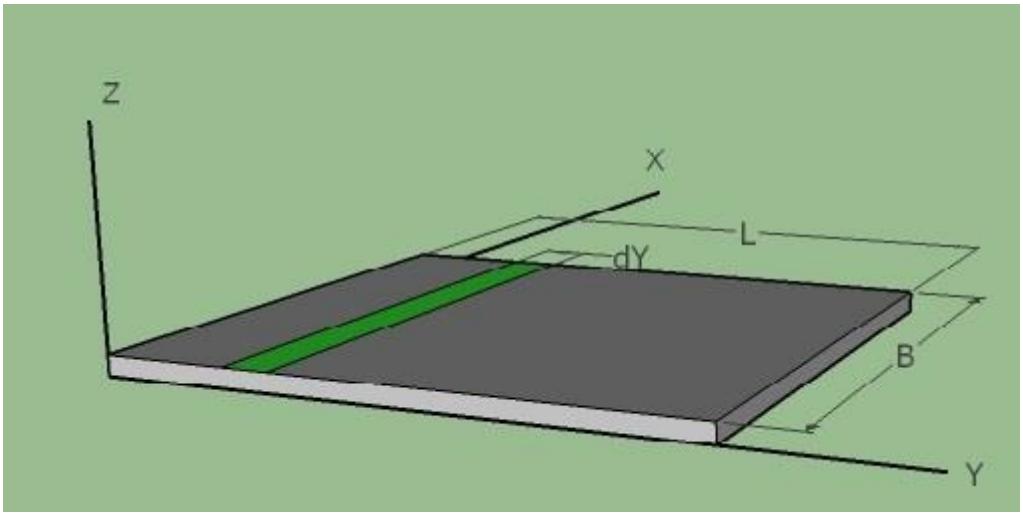


Ilustración 106. Esquema de una de las caras para el cálculo del empuje.

$$\frac{P}{2}=\int_0^L B\times\tau\times dY=\int_0^L B\frac{0{,}664}{Re^{1/2}}\frac{\rho V_0^{\,2}}{2}dY=\frac{0{,}664B}{\left(V_0/\nu\right)^{1/2}}\frac{\rho V_0^{\,2}}{2}\int_0^L Y^{-1/2}dY=\frac{0{,}664B}{\left(V_0/\nu\right)^{1/2}}\frac{\rho V_0^{\,2}}{2}\left[\frac{Y^{1/2}}{1/2}\right]_0^L$$

$$\frac{P}{2}=\frac{0{,}664B}{\left(V_0/\nu\right)^{1/2}}\frac{\rho V_0^{\,2}}{2}2L^{1/2}\left[\frac{L^{1/2}}{L^{1/2}}\right]_0^L=\frac{0{,}664BL}{\left(V_0/\nu\right)^{1/2}}\frac{\rho V_0^{\,2}}{2}2L^{1/2}\frac{L^{1/2}}{L^{1/2}}=\frac{0{,}664BL}{\left(V_0L/\nu\right)^{1/2}}\frac{\rho V_0^{\,2}}{2}$$

$$\frac{P}{2}=\frac{1{,}328}{Re^{1/2}}B\,L\frac{\rho\,V_0^{\,2}}{2}$$ **Ecuación 350**

Luego el empuje total P, por efecto de la viscosidad sobre ambas caras de la placa rectangular es:

$$P=\frac{2{,}656}{Re^{1/2}}B\,L\frac{\rho\,V_0^{\,2}}{2}$$ **Ecuación 351**

El número de *Reynolds* integrado en las ecuaciones (Ecuación 351) y (Ecuación 352) está constituido por la distancia L de la placa como longitud característica.

Empuje en régimen turbulento

El coeficiente C_f en este caso adquiere el valor dado por la siguiente expresión:

$$C_f=\frac{0{,}059}{Re^{1/5}}$$ **Ecuación 352**

En este caso el empuje sobre una de las caras también se evalúa con la ecuación general de la tensión tangencial (Ecuación 348), pero utilizando el coeficiente de empuje C_f particular para un régimen turbulento (Ecuación 352).

Se obtiene así el 50% del empuje total P que actúa sobre toda la placa rectangular:

$$\frac{P}{2}=\int_0^L B\times\tau\times dY=\int_0^L B\frac{0{,}059}{Re^{1/5}}\frac{\rho V_0^{\,2}}{2}dY=\frac{0{,}059B}{\left(V_0/\nu\right)^{1/5}}\frac{\rho V_0^{\,2}}{2}\int_0^L Y^{-1/5}dY=\frac{0{,}059B}{\left(V_0/\nu\right)^{1/5}}\frac{\rho V_0^{\,2}}{2}\left[\frac{Y^{4/5}}{4/5}\right]_0^L$$

$$\frac{P}{2}=\frac{0{,}059\,B}{\left(V_0/\nu\right)^{1/5}}\frac{\rho V_0^{\,2}}{2}\frac{5}{4}L^{4/5}\frac{L^{1/5}}{L^{1/5}}=\frac{5}{4}\frac{0{,}059\,B\,L}{\left(V_0\,L/\nu\right)^{1/5}}\frac{\rho\,V_0^{\,2}}{2}$$ **Ecuación 353**

El empuje total P que actúa sobre la placa rectangular es:

$$P=\frac{0{,}148}{Re^{1/5}}BL\frac{\rho V_0^{\,2}}{2}$$ **Ecuación 354**

10.- Los resultados obtenidos de la teoría desarrollada para una placa plana inmersa en un fluido real con movimiento unidireccional han sido extrapolados a una tubería cilíndrica.

Las numerosas experiencias realizadas en laboratorio sobre conducciones cilíndricas han llevado a las siguientes conclusiones:

Caso 1: Si el número de Reynolds es pequeño.

Cuando el fluido entra dentro del tubo comienza a desarrollarse la capa límite laminar, recorriendo el tubo gradualmente hasta que las capas límites de las paredes opuestas se encuentran en el centro, en el punto situado en el eje baricéntrico del cilindro a una distancia *y* (Ilustración 107) del borde de entrada y que cumple la siguiente ley fruto de la experimentación:

$$\frac{y}{D}=0{,}7\,Re=0{,}7\,\frac{V_0\,D}{\nu}$$ **Ecuación 355** $$y=0{,}7\,\frac{V_0\,D^2}{\nu}$$ **Ecuación 356**

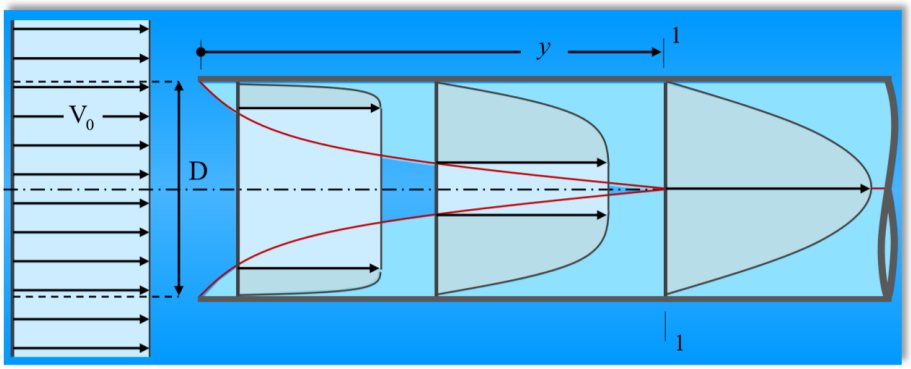


Ilustración 107. Capa límite en una tubería cilíndrica con régimen laminar.

Caso 2: Si el número de Reynolds es suficientemente grande.

En este caso se supone que la capa límite tiene comienzo con régimen laminar y después de recorrer un cierto tramo se transforma en turbulento. En esta situación el régimen laminar se vuelve inestable antes de alcanzar el eje baricéntrico desde la pared, y a partir de allí, la capa límite aumenta considerablemente de acuerdo con los principios del régimen turbulento (ver Ilustración 108).

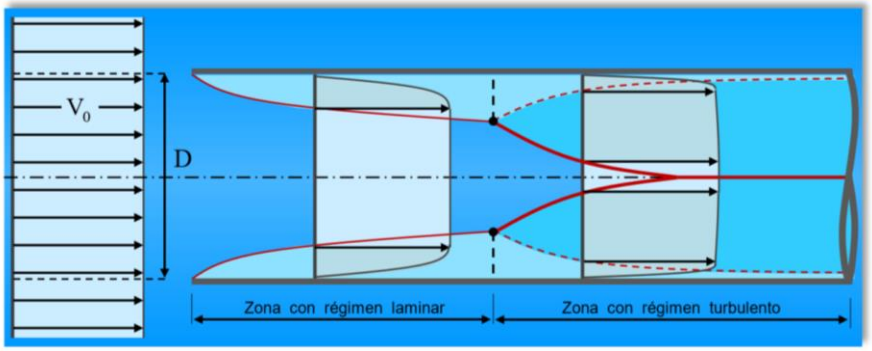


Ilustración 108. Capa límite en una tubería cilíndrica con régimen laminar-turbulento.

Caso 3: Si el número de Reynolds es muy grande.

Desde el comienzo la capa límite es de tipo turbulenta, y los contornos enfrentados en coincidencia con el eje de simetría de la tubería se unen a una distancia un poco superior a las 50 veces el diámetro (50D). A partir de este punto el flujo será

uniforme, dado que la velocidad media en todas las secciones transversales es la misma, y siempre con régimen turbulento salvo en las proximidades de las paredes sólidas, donde invariablemente va a existir una delgada capa laminar (Ilustración 109).

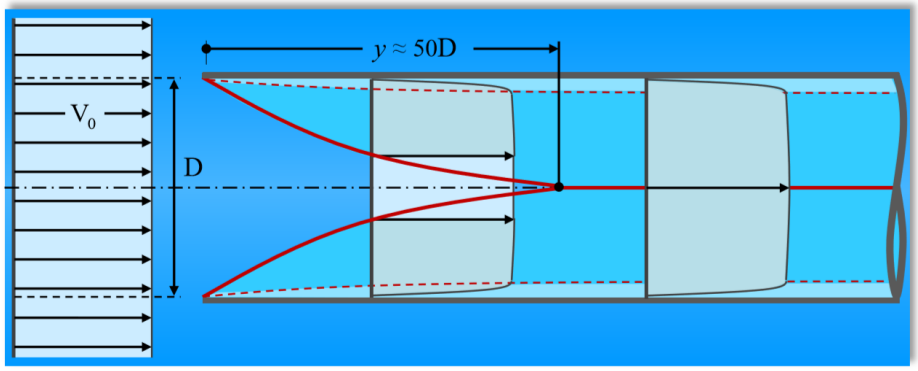


Ilustración 109. Capa límite en una tubería cilíndrica con régimen turbulento.

11.- Por regla general el régimen turbulento es el que se establece en la circulación de fluidos a través de tuberías industriales y de abastecimiento. De ahí deriva el gran interés que tiene el estudio de las pérdidas de energía provocadas por la turbulencia, ya que se produce una configuración muy distinta a las estudiada para el caso del régimen laminar.

La distribución de la ley de velocidades en el régimen turbulento es de tipo logarítmico con una pequeña capa sub-laminar, pero su configuración es prácticamente constante en toda la sección, muy similar al diagrama de velocidad media U.

La siguiente (Ilustración 110) compara ambos diagramas mostrando las pequeñas diferencias.

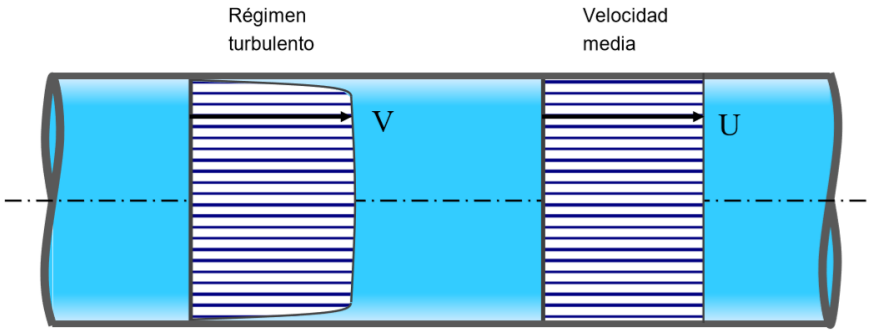


Ilustración 110. Diagrama de distribución de velocidades en tuberías en régimen turbulento.

Características del régimen turbulento.

a) La circulación de un líquido viscoso real a través de una tubería con régimen turbulento se caracteriza principalmente por la rápida y continua oscilación de la velocidad y la presión alrededor de un valor medio en cada punto considerado de la masa fluida.
b) La oscilación de la velocidad y presión es de naturaleza tridimensional y se manifiesta tanto en magnitud como en dirección.
c) Con las condiciones anteriores las trayectorias resultan quebradas, variables y caóticas, producto de remolinos aperiódicos, entremezclados con constantes intercambios de masas entre zonas que hacen que una misma partícula ocupe distintos niveles posicionales con respecto a cada sección mientras el fluido va avanzando dentro de la conducción.
d) Las variaciones de nivel no se originan de forma artificial, sino que son consecuencia de las características propias naturales de la propia circulación del fluido.
e) Las partículas con escaza energía, próximas a la pared sólida de la conducción, se trasladan hacia el centro como consecuencia de la turbulencia y simultáneamente las del centro se desplazan hacia el contorno.
f) La velocidad en un punto cualquiera de la masa fluida es variable con respecto al tiempo, pero si el caudal principal parte de una causa que hace que el movimiento sea permanente, la magnitud de la velocidad oscilará alrededor de un valor promedio que se denomina velocidad media temporal,

luego en un punto cualquiera de la corriente, la velocidad se puede interpretar de dos formas:

Velocidad instantánea

Velocidad variable en módulo y dirección respecto al tiempo.

Velocidad media temporal

Velocidad invariable con relación al tiempo y mantiene la dirección de la corriente.

Bazin encontró que los valores de esta velocidad resultaban constantes en un lapsus de tiempo no menor a Δt = 1,5-2 minutos.

Debido a la naturaleza aleatoria y compleja del régimen turbulento, *Boussinesq* propuso un análisis estadístico que consistía en reemplazar la velocidad real en cada punto por la velocidad media temporal.

El fenómeno de la turbulencia puede admitirse como un movimiento secundario superpuesto al principal. Las ecuaciones de conservación de la masa continúan cumpliéndose en las integrales simplificadas, sin embargo, no ocurre lo mismo con la ley de *Newton* de la viscosidad que es de tipo diferencial, no válida para velocidades medias temporales.

En el intervalo del número de *Reynolds* 2.000 < Re < 4.000 no se puede predecir con certeza si la circulación del fluido se realiza en régimen laminar o turbulento, pero a efectos prácticos en ingeniería hidráulica se adopta como número de *Reynolds* crítico Rec = 2.000, en los que para valores menores el régimen siempre es laminar.

Si aparece cualquier perturbación en un régimen superior al crítico (Re>Rc= 2.000), esta puede generar fluctuaciones aleatorias propias del régimen turbulento. Para regímenes inferiores a Rec=2.000, la magnitud de la fuerza estabilizante existente es lo suficientemente grande para eliminar efectos de cualquier alteración local, manteniendo el escurrimiento ordenado y laminar.

Dentro de una masa fluida en movimiento existen perturbaciones que producen remolinos y que son consideradas como la fuerza de tipo inercial desestabilizante causante de dicho efecto, debido a que desvían las partículas de su estado original con movimiento uniforme acelerándolas. La fuerza opuesta que contrarresta a esa es la fuerza estabilizante, la cual depende de la viscosidad del fluido.

A mayor viscosidad del fluido, mayor energía que se disipa por fricción entre las partículas, siendo en este un caso muy significativo en consumo de energía necesaria para dar origen a los torbellinos.

Para evaluar las fuerzas viscosas se tiene en cuenta la ley de *Newton* referente a la viscosidad.

Resumiendo, se tiene:

Fuerza desestabilizante: $F_i = m\,a$ **Ecuación 357**

Fuerza estabilizante: $F_\mu = \tau\,\Omega = \mu \frac{\partial V}{\partial n}\Omega$ **Ecuación 358**

Haciendo la relación entre las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\frac{F_i}{F_\mu} = \frac{m\,a}{\mu \frac{\partial V}{\partial n}\Omega} = \frac{L^3 \rho \frac{V}{t}}{\mu \frac{V}{L} L^2} = \frac{V\,L}{\frac{\mu}{\rho}} = \frac{V\,L}{\nu}$$

$$\frac{F_i}{F_\mu} = \frac{V\,L}{\nu}$$ **Ecuación 359**

En el caso de tuberías con escurrimiento a presión se adopta:

Velocidad V → Velocidad media U

Longitud característica → Diámetro D

La relación de las fuerzas inerciales y las fuerzas estabilizadoras de la ecuación (Ecuación 359) coincide con el número de *Reynolds* Re:

$$\frac{F_i}{F_\mu} = \frac{VL}{\nu} = \frac{VD}{\nu}$$ **Ecuación 360**

Esta expresión es de tipo adimensional y refleja el significado físico del número de *Reynolds* Re, cuyo parámetro mide la relación entre las fuerzas que provocan la turbulencia (Fi) y las que intentan hacerla desaparecer (F_μ).

Como consecuencia se tendrá:

a) Si las fuerzas inerciales Fi son pequeñas en comparación con las viscosas F_μ, el número de *Reynolds* obtenido será pequeño y el régimen será laminar.

b) Si las fuerzas inerciales Fi son superiores con relación a las viscosas F_μ, consecuentemente el número de *Reynolds* Re que se obtendrá será grande y el régimen turbulento.

Pérdida de energía

Para el seguimiento del análisis realizado por *Prandtl*, se estudian las pérdidas de energía generales, las que se producen de manera uniforme y continua a lo largo de la tubería.

En los fluidos que circulan con régimen laminar, de características ordenadas, estratificadas y de aspecto inmóvil, se demostró anteriormente que la pérdida de energía hidráulica se evalúa mediante la fórmula de *Hagen-Poiseuille* (Ecuación 311), analizando el equilibrio hidrodinámico de las fuerzas en el que intervienen la resistencia superficial dada por la ley de *Newton* $\tau = \mu\left(dV/dn\right)$ y la aplicación del principio de *Meyer* (velocidad en contacto con los bordes nula).

Para el caso de los fluidos que circulan con régimen turbulento, no es posible efectuar un estudio tan riguroso como el realizado para el régimen laminar, por lo

tanto, *Prandtl* recurrió a un análisis que requiere de algunas simplificaciones en las que consideró simultáneamente un desarrollo racional acompañado de varios resultados experimentales.

Con anterioridad a la demostración de la existencia de una capa límite, se suponía que las partículas fluidas llevaban una velocidad junto a la pared del conducto. Esto solo es posible en el caso de un fluido ideal, exento de viscosidad, pero como los fluidos con que se cuenta en la práctica son los reales, se concluye que por más baja que sea la viscosidad también se da total cumplimiento al principio de *Meyer* para movimientos con régimen turbulento.

Para precisar la pérdida de energía hidráulica en régimen turbulento, *Prandtl* a efectos de realizar el estudio físico-matemático tuvo en cuenta el concepto ficticio de movimiento medio local introducido por *Boussinesq*, que considera el escurrimiento compuesto por dos movimientos a saber:

1) Movimiento principal.
   De tipo permanente y representa el efecto de la causa que lo produce.
2) Movimiento secundario

Superpuesto al principal que consiste en un sistema constantemente variable de remolinos.

Para el régimen turbulento se establece una expresión de la tensión tangencial que conserva la misma estructura de la ley de *Newton* aplicable al régimen laminar:

$$\bar{\tau} = \eta \left(\frac{d\overline{V}}{dn} \right)$$ **Ecuación 361**

Donde

$\bar{\tau}$ y $d\overline{V}$ representan valores medios producidos en un intervalo de tiempo comprendido entre 1,5 y 2 minutos denominado pulsación.

η viscosidad de remolino

El valor medio de la viscosidad de remolino η depende de las condiciones instantáneas del movimiento, por lo que no es un valor constante como el de la viscosidad dinámica en la ley de *Newton*.

Ello trae como consecuencia que no se puede resolver la integración de la distribución de velocidades. Debido a que η no responde a ninguna propiedad del fluido, sino que satisface a la característica natural de la circulación del fluido en régimen turbulento, el modo de determinar su valor es mediante la vía experimental.

En un determinado tramo $\Delta l_{1\text{-}2}$ de una conducción (Ilustración 111), las pérdidas de energía total y de carga se representan como la diferencia existente a partir de las líneas de energía total y línea piezométrica entre las secciones Ω_1 y Ω_2.

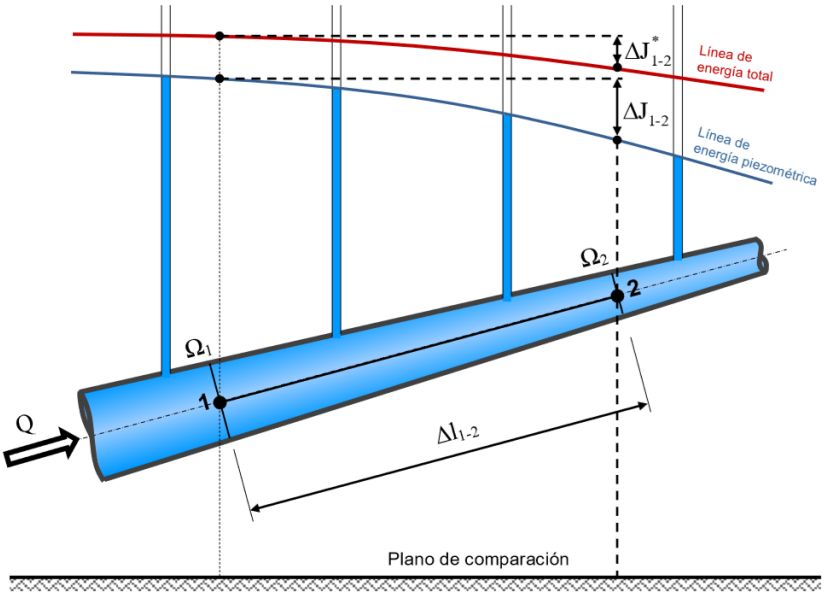


Ilustración 111. Perdidas de energía total y piezométrica.

Por regla general las tuberías son cilíndricas, por lo que las secciones son iguales ($\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$) y las pérdidas de energía total $\Delta J^*_{1\text{-}2}$.

Si se supone un conducto de sección circular en el que circula un fluido con movimiento permanente, en el cual se ha logrado la uniformidad del régimen turbulento, se analiza a continuación el equilibrio de las fuerzas actuantes entre dos secciones Ω_1 y Ω_2 de igual distribución de velocidades, separadas una distancia Δl_{1-2}, sobre el eje baricentro que coincide con el eje local l. (Ilustración 112).

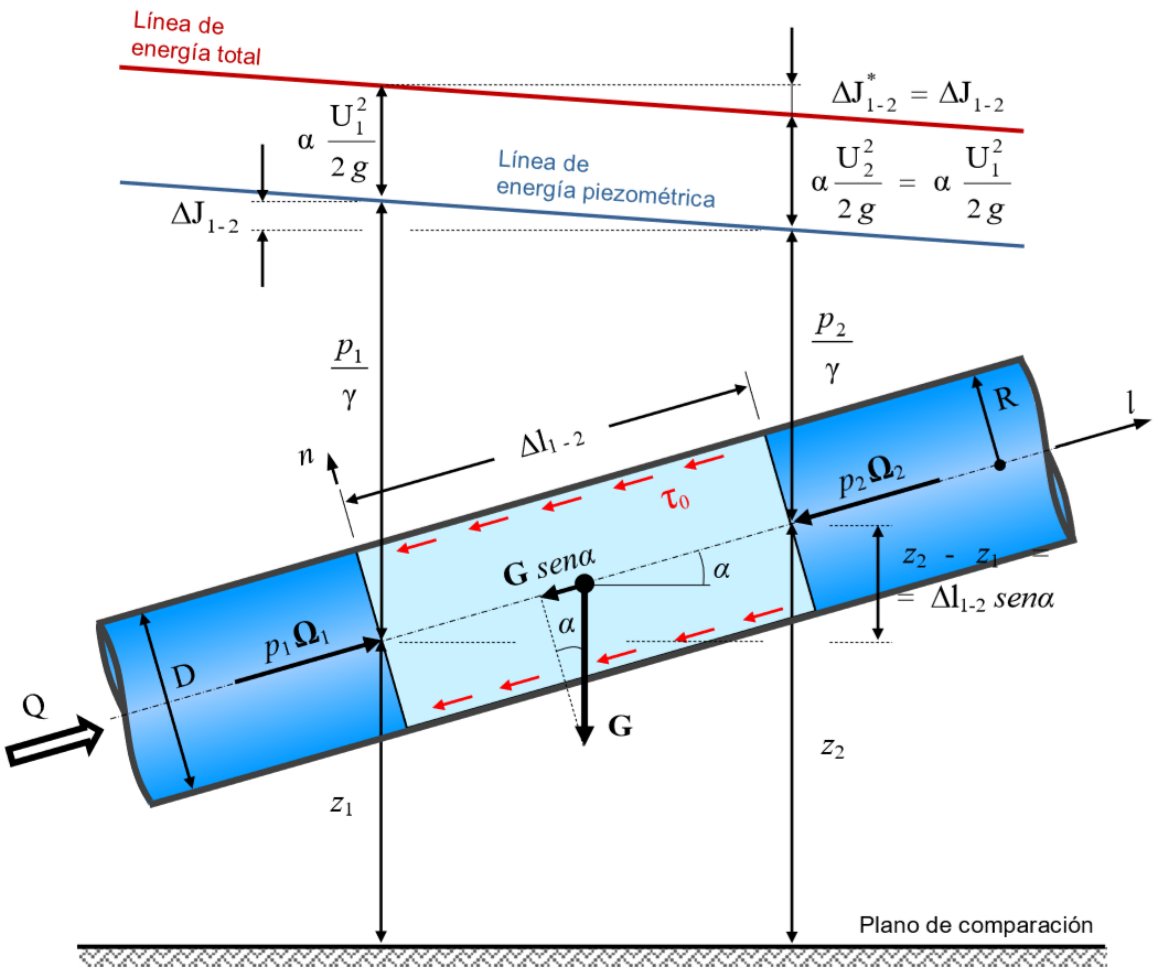


Ilustración 112. Fuerzas actuantes en una tubería con régimen turbulento.

Fuerzas actuantes sobre el eje l:

a) Fuerzas de superficie

<u>Fuerzas de presión Fp</u>

$$\left(F_{p1}\right)_l = P_1\ \Omega_1 = P_1\ \frac{\pi\ D^2}{4}$$ **Ecuación 362**

$$\left(F_{p2}\right)_l = P_2\ \Omega_2 = P_2\ \frac{\pi\ D^2}{4}$$ **Ecuación 363**

<u>Fuerzas de roce Fr</u>

La fuerza de roce Fr es función de la tensión tangencial media τ_0 actuante sobre los bordes sólidos del cilindro de conducción $\pi\ D\ \Delta l_{1\text{-}2}$.

$$\left(F_r\right)_l = \tau_0\ \pi\ D\ \Delta l_{1\text{-}2}$$ **Ecuación 364**

b) Fuerzas de masa Fm

Solo actúa el peso propio G.

$$\left(F_m\right)_l = G\ \text{sen}\alpha = \gamma\ V_{v0l}\ \text{sen}\alpha = \gamma\ \frac{\pi\ D^2}{4}\Delta l_{1\text{-}2}\ \text{sen}\alpha$$ **Ecuación 365**

$$\left(F_m\right)_l = \gamma\ \frac{\pi\ D^2}{4}\left(Z_1 - Z_2\right)$$ **Ecuación 366**

Fuerzas de inercia Fi

En este caso, por tratarse de un movimiento permanente y uniforme, la aceleración es nula y como consecuencia la fuerza inercial es cero.

$$\left(F_i\right)_l = 0$$ **Ecuación 367**

La ecuación de equilibrio dinámico aplicada al eje baricentrico l es la siguiente:

$$\left(F_p\right)_l - \left(F_r\right)_l - \left(F_m\right)_l = \left(F_i\right)_l$$ **Ecuación 368** →

$$(P_1\,\Omega_1 - P_2\,\Omega_2) - \tau_0\,\pi\,D\,\Delta l_{1\text{-}2} - G\,\text{sen}\alpha = 0$$ **Ecuación 369**

Sustituyendo (Ecuación 362), (Ecuación 363), (Ecuación 364), (Ecuación 365) y (Ecuación 366) en (Ecuación 368), se obtiene:

$$\frac{\pi\,D^2}{4}\left(P_1 - P_2\right) - \tau_0\,\pi\,D\,\Delta l_{1\text{-}2} - \gamma\,\frac{\pi\,D^2}{4}\left(Z_1 - Z_2\right) = 0$$ **Ecuación 370**

$$\tau_0\,\pi\,D\,\Delta l_{1\text{-}2} = \gamma\,\frac{\pi\,D^2}{4}\left[\left(Z_1 + \frac{P_1}{\gamma}\right) - \left(Z_1 + \frac{P_1}{\gamma}\right)\right]$$ **Ecuación 371**

Despejando τ_0:

$$\tau_0\,\pi\,D\,\Delta l_{1\text{-}2} = \frac{1}{4}\gamma\,D\underbrace{\left[\left(Z_1 + \frac{P_1}{\gamma}\right) - \left(Z_1 + \frac{P_1}{\gamma}\right)\right]\frac{1}{\Delta l_{1\text{-}2}}}_{\Delta J_{1\text{-}2}} = \frac{1}{4}\gamma\,D\,\frac{\Delta J_{1\text{-}2}}{\Delta l_{1\text{-}2}}$$ **Ecuación 372**

$$\tau_0 = \frac{1}{4}\,\gamma\,D\,j$$ **Ecuación 373**

En función de la radio sería:

$$\tau_0 = \frac{1}{2}\,\gamma\,R\,j$$ **Ecuación 374**

Estas expresiones permiten calcular el esfuerzo tangencial medio τ_0 sobre los puntos del perímetro de la tubería.

Para analizar la influencia de la rugosidad de la tubería en la pérdida de energía, se debe tener en cuenta que la velocidad en el contorno sólido es nula, inclusive en régimen turbulento, que existe una subcapa donde el régimen es laminar y el tamaño de la altura de la protuberancia con relación a la magnitud de la subcapa laminar (Ilustración 113).

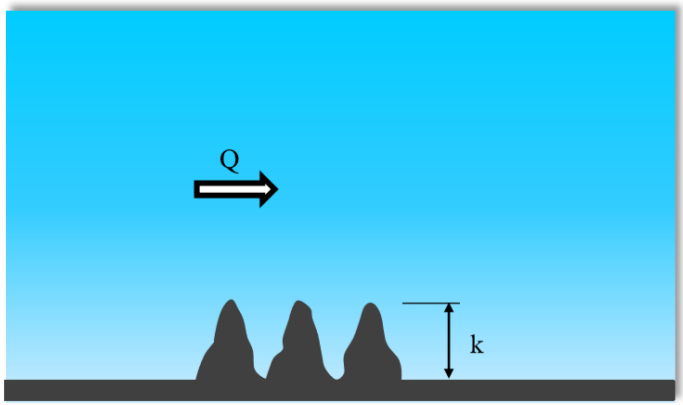


Ilustración 113. Rugosidad de las paredes.

Para la evaluación de las pérdidas de energía se consideran las siguientes:

El espesor de la subcapa laminar δ' envuelve totalmente las irregularidades de la pared (Caso I: si el número de *Reynolds* es suficientemente pequeño). La altura K de las protuberancias quedan inmersas en el espesor δ' y la tubería se comporta hidráulicamente como lisa.

La altura K de la rugosidad supera el espesor de la capa laminar δ', generando turbulencias adicionales que hacen que el comportamiento hidráulico de la conducción sea rugoso caso II, III, IV y V como se verá a continuación.

Por regla general la rugosidad de las paredes está formada por protuberancias de formas irregulares, carentes de una geometría regular. Para hacer más sencillo el estudio se considera una rugosidad artificial y uniforme:

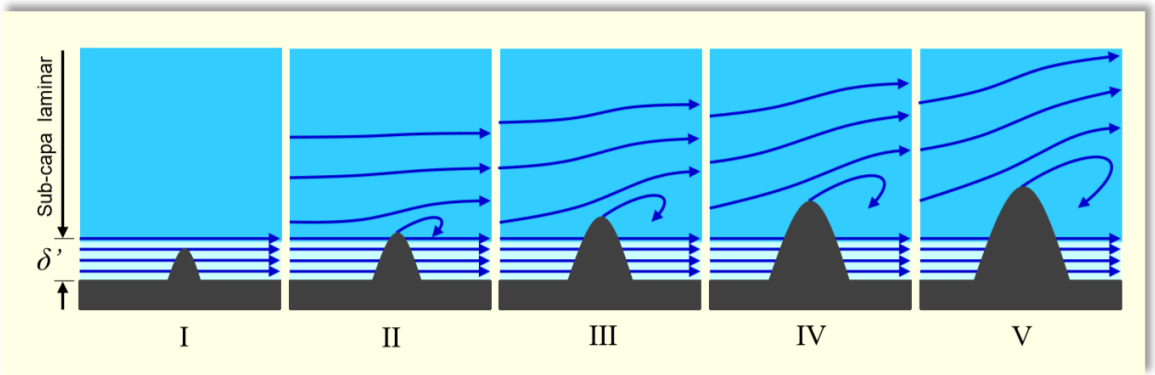


Ilustración 114. Altura de la rugosidad relacionada con la subcapa laminar.

El espesor de la subcapa laminar δ' viene definido en función de la estabilidad de circulación del fluido y la resistencia de oposición al movimiento está ligada a dicho espesor (Ilustración 114), por lo tanto, se concluye que:

CASO I

La rugosidad queda totalmente cubierta por el espesor de la subcapa laminar δ' y el comportamiento del movimiento de la masa fluida no se altera por efecto de esta. La resistencia depende de la viscosidad μ o bien del número de *Reynolds* Re.

CASOS II al IV

La altura de las protuberancias de la rugosidad K sobresale de la subcapa laminar δ', provocando en su borde superior la separación de las líneas de corrientes que generan a su vez remolinos o vórtices.

CASOS II y III

La altura de la subcapa laminar δ' es próxima con la altura de la rugosidad K, generando remolinos intermedios entre las situaciones extremas de los casos I y IV, en los cuales la resistencia al avance del fluido depende simultáneamente del número de *Reynolds* Re y la relación entre la altura de la rugosidad y el diámetro de la conducción K/D.

CASOS IV y V

En este caso las alturas de las protuberancias K son sensiblemente superiores que la subcapa laminar δ'. Los remolinos que se forman resultan prácticamente independientes de las características de la capa límite, por lo que la influencia de la subcapa laminar δ' es despreciable y la resistencia al movimiento dependerá exclusivamente de la relación K/D.

Para la evaluación de las pérdidas de energía, es fundamental relacionarlas con las características geométricas e hidráulicas del movimiento y su contorno.

Prandtl se apoyó en la ecuación de *Darcy-Weisbach* por ser una fórmula cuyo desarrollo está definido con una base teórico-racional y complementada con numerosas experiencias, pero su justificación y determinación aplicada al régimen turbulento para movimientos permanentes y uniformes no se puede obtener mediante un procedimiento analítico directo como ocurre con la fórmula de *Hagen – Poiseuille* para régimen laminar. Para su obtención se puede analizar a través de dos razonamientos:

- Teórico-experimental
- Análisis dimensional

Muchos investigadores a través de diversas experiencias han comprobado la relación que mantiene la pérdida de energía hidráulica J con las diversas magnitudes que intervienen en la circulación de los fluidos a presión con régimen turbulento.

En esta tesis se expondrá solamente el teórico – experimental, el cual llega a la misma conclusión que el análisis dimensional:

a) Superficie lateral de la tubería→ πD_1

Es el área mojada definida por el contacto entre el fluido y las paredes del sólido que lo contiene, y es donde actúan las tensiones tangenciales τ_0 que intervienen frenando el avance del movimiento.

b) Inversa de la sección transversal → $\dfrac{1}{\dfrac{\pi D^2}{4}}$

Cuanto más grande sea la sección, con más facilidad permitirá la circulación del fluido, disminuyendo consecuentemente la pérdida de energía J.

c) Cuadrado de la velocidad media→ U^2

Esta proporcionalidad se puede comprobar mediante experimentos relalizados en laboratorio.

d) Características del fluido → Densidad ρ y viscosidad dinámica μ.

e) Naturaleza de las paredes.

Se refiere a las dimensiones de las asperezas de la superficie sólida en contacto con el fluido, representan la rugosidad con los siguientes valores (Ilustración 115) y (Ilustración 116):

- Altura o tamaño → K
- Separación → K'
- Forma → m

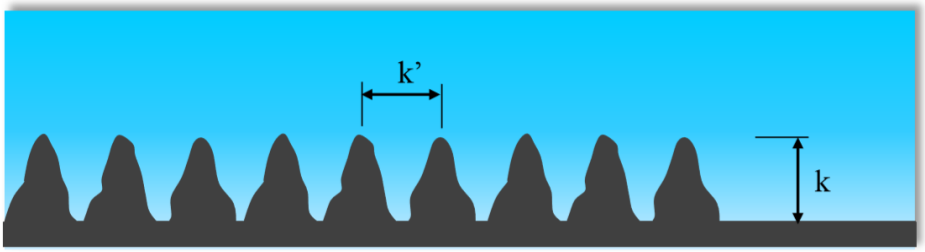


Ilustración 115. Altura y separación de las asperezas.

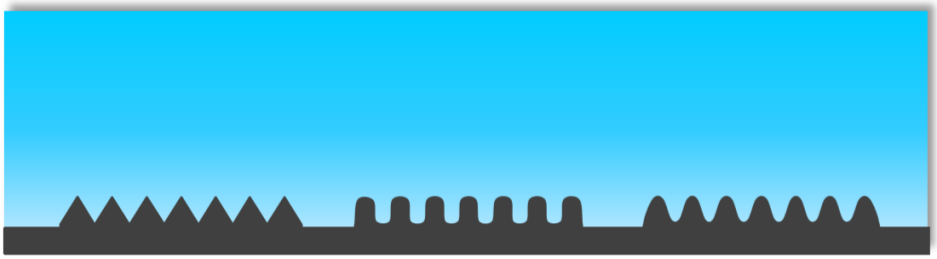


Ilustración 116. Forma de las asperezas.

El planteamiento matemático es el siguiente: Si la pérdida de energía hidráulica J es proporcional individualmente a cada uno de los parámetros indicados, entonces también lo será el producto de todos ellos:

$$J \quad \alpha \quad \pi D l \frac{1}{\frac{\pi D^4}{4}} U^2 f(D, U, \mu, \rho, K, K', m)$$ Ecuación 375

El factor individualizado $f(D, U, \mu, \rho, K, K', m)$

es una función que tiene en cuenta las características del fluido viscosidad cinemática μ, la densidad ρ y la naturaleza de la pared sólida (K, K', m K,K',m).

La fórmula contempla al diámetro D y la velocidad media U de una manera no exacta en relación con la proporcionalidad de la pérdida de energía J con la superficie interior de la tubería, la inversa de la sección transversal y el cuadrado de la velocidad media señalada en los apartados a, b y c anteriores.

Con respecto a la rugosidad en el interior de las tuberías, representada por los parámetros K (altura), K' (separación) y m (forma), se puede afirmar como consecuencia de experiencias realizadas que la influencia de K es muy superior a K' y m. Debido a esta preponderancia y a efectos prácticos se pueden despreciar los valores K' y m y considerar en el análisis la altura K como única característica geométrica, por lo tanto el termino K va a representar exclusivamente a la rugosidad o rugosidad absoluta.

La ecuación general quedaría entonces:

$$J = cte\ 4\ f\ (D, U, \mu, \rho, K)\ \frac{1}{D}\frac{U^2}{2g}\ 2\ g$$ **Ecuación 376**

Agrupando convenientemente el término $f\ (D, U, \mu, \rho, K)$:

$$f(D, U, \mu, \rho, K) = f(\frac{U\,D}{\frac{\mu}{\rho}}, \frac{K}{D}) = f(Re, \frac{K}{D})$$ **Ecuación 377**

Si reemplazamos (Ecuación 376) en (Ecuación 377):

$$J = cte\ 8\ f(Re, \frac{K}{D})\frac{1}{D}\frac{U^2}{2g}$$ **Ecuación 378**

f = Coeficiente de fricción o de resistencia.

Finalmente

$$J = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g}$$ **Ecuación 379**

La ecuación anterior también puede expresarse como pérdida de carga unitaria que representa la pérdida de carga hidráulica J por unidad de longitud de la conducción L:

$$j = \frac{J}{L} = f \frac{1}{D} \frac{U^2}{2g}$$ **Ecuación 380**

Este análisis pone en evidencia que la ecuación de *Darcy-Weisbach* permite determinar la pérdida de energía piezométrica total o por unidad de longitud en régimen turbulento, con la condición de que hay que determinar el coeficiente de fricción f, ya sea conociéndolo o calculándolo.

Coeficiente de fricción

Distintos investigadores han desarrollado muchas expresiones para valorar el coeficiente de fricción f, las cuales han ido evolucionando y ajustado con el paso del tiempo.

Las primeras expresiones fueron desarrolladas únicamente teniendo en cuenta al agua como fluido circulante (que es el que se tiene en cuenta en la presente tesis) y posteriormente a otros fluidos incomprensibles en la que también se incluyen los materiales de la conducción.

Posteriormente se plantearon formulaciones exclusivamente experimentales y más modernas, en donde el cálculo de f se desarrolla teniendo en cuenta la diferencia entre tuberías lisas y rugosas.

En la actualidad la determinación del coeficiente de fricción f ha dejado atrás la utilización de fórmulas empíricas, y se ha pasado a la utilización de ecuaciones mucho más generales, en el que el campo de aplicación incluye cualquier tipo de fluido incompresible circulando en conducciones de cualquier tipo de material.

A estas expresiones se les denomina "expresiones racionales" y han sido desarrolladas sobre la base de un importante planteamiento teórico y una gran dosis de apoyo experimental.

Para la obtención del coeficiente de fricción f se comienza definiendo la distribución de velocidades con sus correspondientes ecuaciones, tanto para tuberías lisas como rugosas, para finalmente determinar el caudal Q y la velocidad media de cada caso.

De esta manera, aplicando la ecuación de *Darcy-Weisbach* se determina J, Q o D en régimen turbulento, en función de los otros dos.

Ley de distribución de velocidades

Partiendo de la (Ecuación 361), que establece la relación entre la tensión tangencial media y el gradiente transversal de velocidad media para régimen turbulento, aplicado al sistema de coordenadas cartesianas:

$$dV=\frac{\tau}{\eta}dz$$ **Ecuación 381**

donde η es la viscosidad de remolino, que depende de la naturaleza del fluido (incluida temperatura) y las condiciones instantáneas del escurrimiento se determinan de manera experimental.

Al desconocerse la ley de variación de la viscosidad de remolino η con respecto a la distancia transversal z medida desde el borde sólido, se imposibilita de la ecuación anterior (Ecuación 381) la integración a toda la sección transversal, tal como se hace en el análisis para el régimen laminar, en el que la viscosidad μ es una constante y puede ser extraída fuera de la integral.

Este problema presentado en el desarrollo analítico fue resuelto por *Johan Nikuradse* (que se verá más adelante en la presente tesis). *Nikuradse* constató experimentalmente que en el régimen turbulento la tensión de corte τ y la viscosidad de remolino η varían de forma tal que su relación $\frac{\tau}{\eta}$ resulta directamente proporcional a la velocidad de corte $(\tau/\rho)^{1/2}$ e inversamente a la distancia transversal z. En estas condiciones, se prescinde de valores medios temporales y la ley se indica en la siguiente ecuación.

$$\frac{\tau}{\eta}=2{,}5\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\frac{1}{z}$$ **Ecuación 382**

Donde

τ_0 es la tensión de corte en el fluido, la que actúa sobre las paredes sólidas, tal como se aplicaba para régimen laminar.

$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ es la velocidad de corte, denominada así debido a que sus dimensiones corresponden a los de la velocidad

$$\left[\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\right]=\sqrt{M\frac{L}{T^2}\frac{1}{L^2}\frac{L^3}{M}}=\frac{L}{T}$$ **Ecuación 383**

En estas condiciones la fórmula (Ecuación 381) se puede relacionar con la (Ecuación 382) para hacerla integrable

$$dV=\frac{\tau}{\eta}dz=2{,}5\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\frac{1}{z}$$, luego

$$dV=2{,}5\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\frac{1}{z}$$ **Ecuación 384**

Integrando la (Ecuación 384) se obtiene:

$$V = 2{,}5\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\ln z + cte$$ **Ecuación 385**

La expresión anterior (Ecuación 385) indica que en un fluido circulando con régimen turbulento, la velocidad varia directamente en función del logaritmo natural de la distancia al borde de la pared sólida (Ilustración 117). Esta distribución está indicada solo en la forma cualitativa, ya que para que sea de aplicación cuantitativa es necesario conocer la constante de integración cte.

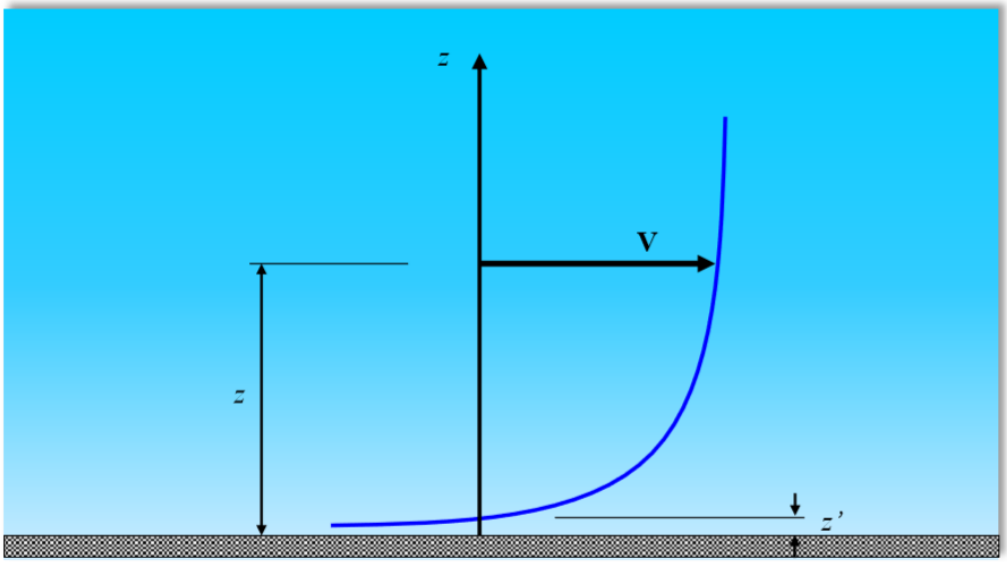


Ilustración 117. Distribución cualitativa de la velocidad en escurrimientos con régimen turbulento.

De la Ilustración 117 se observa que para una distancia de z tendiendo a cero (proximidades del borde sólido), la velocidad tiende a $-\infty$, lo cual es incompatible con el principio enunciado por *Meyer*, es decir, no se corresponde con el hecho físico de que en el borde sólido la velocidad es cero. También se puede observar que la velocidad V se hace nula a una distancia z'.

Con el objetivo de determinar la constante cte de la (Ecuación 384), se enfoca el análisis específicamente desde un punto de vista exclusivamente matemático, prescindiendo momentáneamente del error físico cometido:

$$\text{Si } z = z' \rightarrow V = 0$$

Reemplazando en la (Ecuación 384):

$$0 = 2{,}5\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\ln z' + cte \rightarrow cte = -2{,}5\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\ln z' \quad \text{Ecuación 386}$$

Sustituyendo la constante cte en la ecuación general (Ecuación 384) queda:

$$V = 2{,}5\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\ln z - 2{,}5\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\ln z \quad \rightarrow \quad V = 2{,}5\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\ln\frac{z}{z'} \quad \text{Ecuación 387}$$

La (Ecuación 387) representa matemáticamente la distribución física de la velocidad en fluidos que circulan en régimen turbulento, con las limitaciones físicas anteriormente apuntadas.

La ecuación anterior basada en los experimentos de *Nikuradse* representa la ley de velocidades logarítmicas sobre una sección transversal de la conducción, pero no considera la existencia de la capa límite con su correspondiente subcapa laminar δ', por lo tanto, su valides no es completa al no tener en cuenta la zona próxima a las paredes sólidas.

Prandtl realizó un estudio completo de la disposición de las velocidades en la sección de la conducción, en función del comportamiento hidráulico de la circulación del fluido, según corresponda a tuberías lisas o rugosas.

a) Estudio para tuberías lisas

a1) Variación de la velocidad junto a bordes lisos.

Para su análisis se repasan las siguientes conclusiones:

En la circulación de un fluido en el contacto con las paredes sólidas de una conducción la velocidad es cero.

En la capa inmediata el movimiento se realiza con velocidades muy pequeñas en régimen invariablemente laminar.

La zona correspondiente a la capa anterior se trata de la zona correspondiente a la subcapa laminar δ', con ley de velocidades de distribución parabólica.

Por lo tanto, el diagrama general de velocidades quedará constituido a efectos prácticos de una parte de forma lineal (que con mayor precisión debería ser parabólica) en el sector correspondiente a la subcapa laminar cuyos valores de z oscilan entre 0 y δ', y otra parte logarítmica, cuando $z > \delta'$ (Ilustración 118).

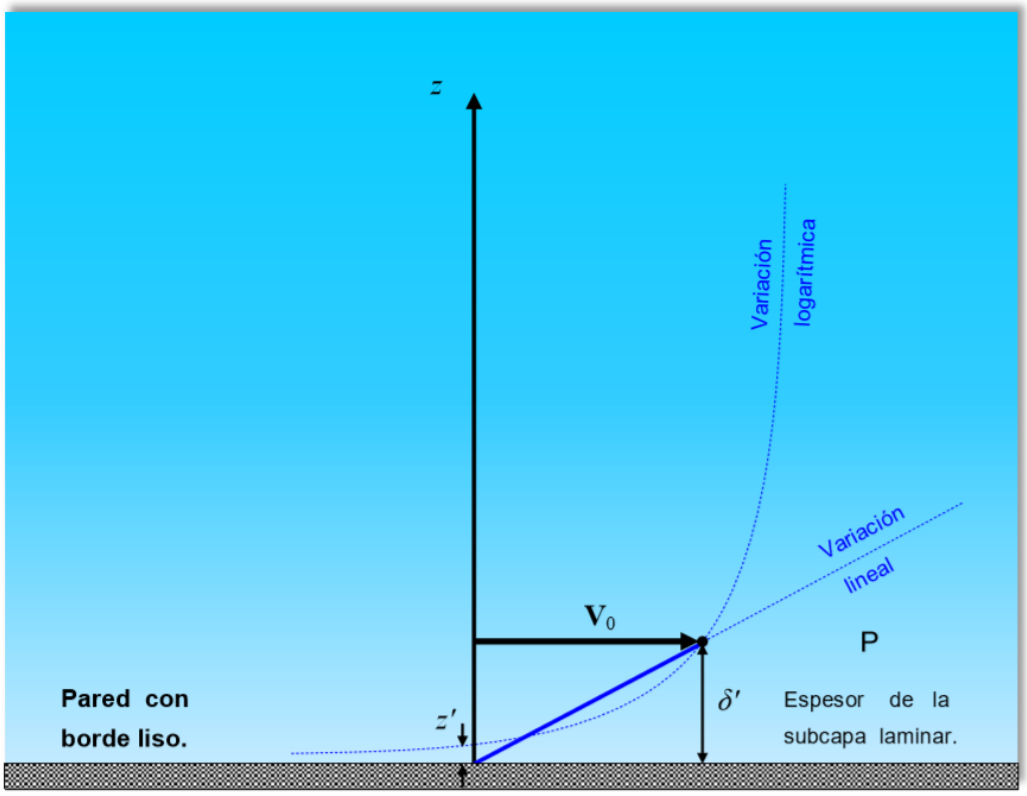


Ilustración 118. Distribución de la velocidad en la subcapa laminar junto a bordes lisos.

Tal como se observa en la (Ilustración 118), la altura z' queda inmersa en la subcapa laminar δ', el paso de régimen laminar a turbulento no se produce de una manera brusca, ya que la propia inercia de las partículas en movimiento provoca en la zona cercana a $z = \delta'$ la existencia de una transición gradual cuya distribución de velocidades se desconoce con exactitud, pero se da una idea cualitativa aproximada a la velocidad (Ilustración 119).

Por lo tanto, el paso de régimen laminar a turbulento ocurre en una zona de transición, en donde el punto de referencia P, intersección entre la línea recta y curva logarítmica se cumple:

$z = \delta'$ **Ecuación 388**

$V = V_0$ **Ecuación 389**

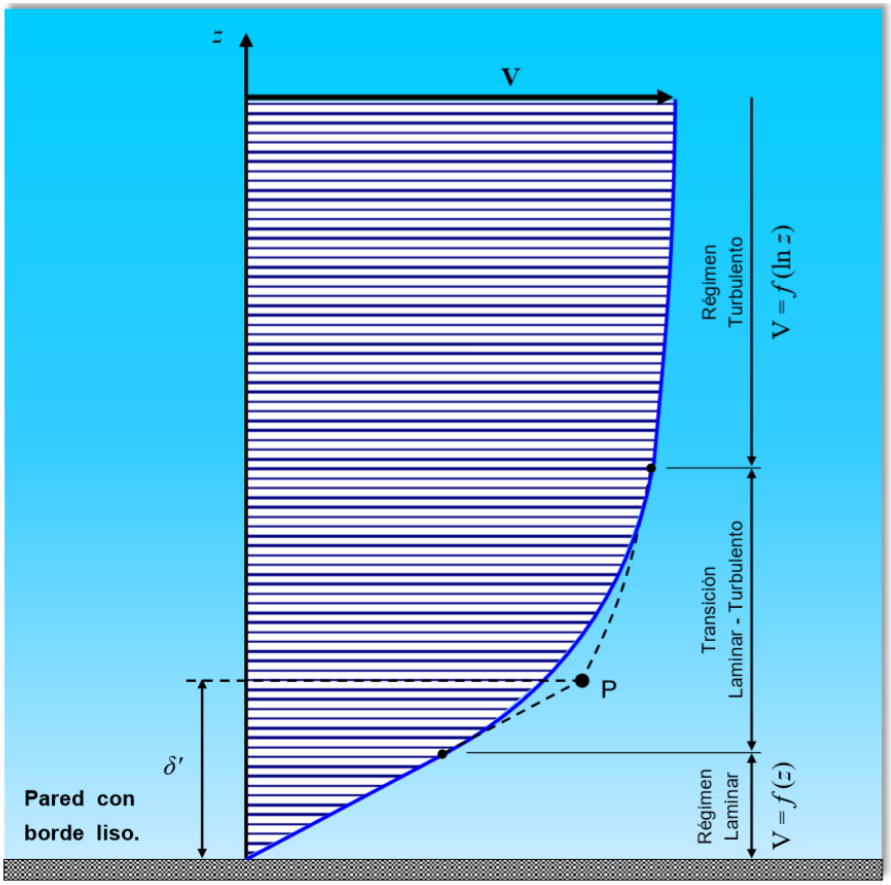


Ilustración 119. Distribución de la velocidad en régimen turbulento junto a bordes lisos.

La frontera para analizar el lugar donde se produce la modificación de un régimen a otro es el punto P de la (Ilustración 119).

- **Régimen laminar** ($0<z<\delta'$)

Sustituir la variación parabólica de la velocidad por una lineal para facilitar el cálculo, implica matemáticamente que $dV/dz = cte$, por lo tanto, la ley de *Newton* para fluidos aplicada al punto P seria la siguiente:

$$\tau_0 = \mu \frac{dV}{dz} = cte = \mu \frac{V_0}{\delta'} = \rho\, \nu \frac{V_0}{\delta'} \quad \rightarrow \quad V_0 = \frac{\tau_0}{\rho} \frac{1}{\nu}\, \delta' \quad \text{Ecuación 390}$$

Esta expresión (Ecuación 390) indica el valor de la velocidad V_0 en el extremo superior de la subcapa δ' deducida a partir del movimiento en régimen laminar. El valor de la tensión τ_0 es la tensión del fluido a una distancia $z = \delta$, cuya magnitud es la misma en $z = 0$ (superficie de contacto entre el fluido y el sólido).

La ley de distribución de velocidades viene representada por la fórmula:

$$V_0 = \frac{\tau_0}{\rho} \frac{1}{\nu} z \quad \text{Ecuación 391}$$

O bien es su forma adimensional:

$$\frac{V}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{1}{\nu} z \quad \text{Ecuación 392}$$

- **Régimen turbulento** ($z > \delta'$)

Considerando el mismo punto P, pero como parte integrante del régimen turbulento, en la zona donde $z > \delta'$, y considerando los valores de las ecuaciones (Ecuación 388) y (Ecuación 389) aplicados a la ecuación general (Ecuación 387) de la velocidad del fluido en régimen turbulento se obtiene:

$$V_0 = 2{,}5 \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln \frac{\delta'}{z'} \quad \text{Ecuación 393}$$

Por razones de congruencia, los valores de V_0 dados en la (Ecuación 390) para la circulación de fluidos en régimen laminar deben ser coincidentes con los dados para régimen turbulento en la (Ecuación 393), dado que ambas velocidades corresponden al mismo punto P del movimiento.

Igualando los segundos miembros de las ecuaciones (Ecuación 390) y (Ecuación 393):

$$\frac{\tau_0}{\rho}\frac{1}{\nu}\,\delta' = 2{,}5\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\ln\frac{\delta'}{z'} \quad \rightarrow \quad \delta' = 2{,}5\frac{\nu}{\sqrt{\tau_0/\rho}}\ln\frac{\delta'}{z'}$$ **Ecuación 394**

La (Ecuación 394) es implícita, dado que el valor δ' está en ambos miembros. *Nikuradse* (discípulo de *Prandtl*) para darle continuidad al presente análisis, encontró a través de trabajos experimentales la siguiente relación:

$$\delta' = 11{,}60\frac{\nu}{\sqrt{\tau_0/\rho}}$$ **Ecuación 395**

Igualando las expresiones (Ecuación 394) y (Ecuación 395), simplificando y despejando z' se tiene:

$$\delta' = 2{,}5\frac{\nu}{\sqrt{\tau_0/\rho}}\ln\frac{\delta'}{z'} = 11{,}60\frac{\nu}{\sqrt{\tau_0/\rho}} \rightarrow \ln\frac{\delta'}{z'} = \frac{11{,}60}{2{,}50} = 4{,}64 \rightarrow \frac{\delta'}{z'} = 103{,}50$$

$$z' = \frac{\delta'}{103{,}50}$$ **Ecuación 396**

Sustituyendo en la (Ecuación 396) el valor experimental de δ' dado en la (Ecuación 395) se tiene:

$$z' = \frac{\delta'}{103{,}50}\frac{\nu}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = 0{,}11\frac{\nu}{\sqrt{\tau_0/\rho}} \quad \rightarrow \quad z' = 0{,}11\frac{\nu}{\sqrt{\tau_0/\rho}}$$ **Ecuación 397**

El valor de z' carece de existencia real, sin embargo, es necesario conocer su valor para el correcto trazado del diagrama de velocidades.

Reemplazando z' en (Ecuación 387) se obtiene:

$$V = 2{,}5\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\ \ln\frac{\sqrt{\tau_0/\rho}}{0{,}11\nu}\ z \rightarrow V = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\left[2{,}50\ \ln\frac{\sqrt{\tau_0/\rho}}{0{,}11\nu}\ z + 2{,}50\ \ln\frac{1}{0{,}11}\right],$$

que operando queda:

$$V = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\left[2{,}50\ \ln\frac{\sqrt{\tau_0/\rho}}{0{,}11\,\nu}\ z + 5{,}50\right]$$ **Ecuación 398**

La expresión (Ecuación 398) es la ecuación de *Von Kármán-Prandtl* (*Theodore Von Kármán*, húngaro 1881-1963), que describe la distribución de velocidades en régimen turbulento junto a bordes lisos.

Su expresión en forma adimensional es la siguiente:

$$\frac{V}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = 2{,}50\ln\frac{\sqrt{\tau_0/\rho}}{0{,}11\nu}\ z + 5{,}50$$ **Ecuación 399**

En función del logaritmo decimal sería:

$$V = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\left[5{,}75\log\frac{\sqrt{\tau_0/\rho}}{0{,}11\nu}\ z + 5{,}50\right]$$ **Ecuación 400**

En la forma adimensional:

$$\frac{V}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = 5{,}75 \log \frac{\sqrt{\tau_0/\rho}}{0{,}11\nu} z + 5{,}50$$ **Ecuación 401**

a2) Caudal medio junto a bordes lisos.

La distribución de velocidades en condiciones con circulación de fluidos en régimen turbulento junto a contornos sólidos se divide en dos zonas:

- **Zona turbulenta ($z > \delta'$)**

Se aplican las ecuaciones (Ecuación 398), (Ecuación 399), (Ecuación 400) y (Ecuación 401).

- **Zona laminar, dentro de la subcapa laminar ($0 < z < \delta'$)**

Se aplican las ecuaciones (Ecuación 391) y (Ecuación 392).

Debido a la escaza magnitud de la distancia δ' de la subcapa laminar, se puede aceptar con poquísimo error y con suficiente aproximación la utilización de las ecuaciones (Ecuación 398), (Ecuación 399), (Ecuación 400) y (Ecuación 401) para la representación de la distribución de la velocidad en la totalidad de la sección transversal. Esto es debido a que, aunque la curva logarítmica tenga una tangente infinita en coincidencia con $z = 0$ y luego continúe en las cercanías con una tangente finita para el resto de los valores de z, por muy grandes que sean las velocidades negativas, el error por la falta de dependencia con la realidad es insignificante respecto a las integraciones de las ecuaciones (Ecuación 398) o (Ecuación 400) a toda la sección transversal para el cálculo del caudal.

Para determinar el caudal circulante Q a través de una tubería cilíndrica se parte del supuesto hipotético que supone la distribución de velocidades constante a lo largo de las coronas circulares concéntricas con el eje de simetría longitudinal (Ilustración 120).

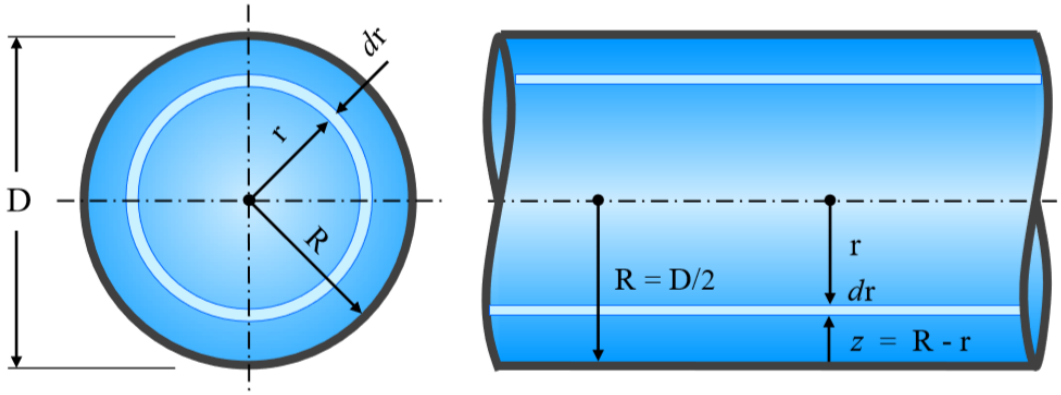


Ilustración 120. Corte y vista longitudinal de una conducción circular en régimen turbulento.

$$Q = \int_{\Omega} V d\Omega = \int_{0}^{R} V \times 2\pi\, r\, dr$$ Ecuación 402

Si reemplazamos la (Ecuación 398) en la (Ecuación 402) se tiene:

$$Q = \int_{\Omega} V\, d\Omega = \int_{0}^{R} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[2{,}5 \ln\left(\frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} z \right) + 5{,}50 \right] 2\pi\, r\, dr$$ Ecuación 403

Dónde si hacemos $z = R - r$ Ecuación 404 :

$$Q = \int_{0}^{R} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[2{,}5 \ln\left(\frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} (R - r) \right) + 5{,}50 \right] 2\pi\, r\, dr$$ Ecuación 405

$$Q = 2\pi \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \int_{0}^{R} \left[2{,}5 \ln\left(\frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} (R - r) \right) + 5{,}50 \right] r\, dr$$ Ecuación 406

$$Q = 2\pi \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \int_{0}^{D/2} 2{,}5 \ln\left(\frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left(D/2 - r \right) \right) r\, dr + 2\pi \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \int_{0}^{D/2} 5{,}50\, r\, dr$$ Ecuación 407

Resolviendo las integrales:

$$Q = 2\pi \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{D^2}{4} \ln\left(\frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{D}{2} \right) - \frac{3}{2} 2{,}5\, \pi \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{D^2}{4} + 5{,}50\, \pi \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{D^2}{4}$$ Ecuación 408

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[2,5 \ln\left(\frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} D \right) - 2,5 \ln 2 - \frac{3}{2} 2,5 + 5,5 \right]$$ **Ecuación 409**

$$Q = \Omega \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[2,5 \ln\left(\frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} D \right) + 0,02 \right]$$ **Ecuación 410**

Si se expresa el Q en función del logaritmo decimal, se tiene en cuenta que la relación entre el logaritmo decimal de un número con el logaritmo natural de un número es 2, 302585.., que se redondea a 2,30.

$$Q = \Omega \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[5,75 \ln\left(\frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} D \right) + 0,02 \right]$$ **Ecuación 411**

a3) Velocidad media junto a bordes lisos.

La velocidad media se determina por definición:

$$U = \frac{Q}{\Omega} = \frac{\Omega}{\Omega} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[5,75 \ln\left(\frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} D \right) + 0,02 \right]$$ **Ecuación 412**

Por consiguiente, la velocidad media será:

$$U = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[5,75 \ln\left(\frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} D \right) + 0,02 \right]$$ **Ecuación 413**

a4) Diferencia entre la velocidad en un punto y la velocidad media junto a bordes lisos.

Se obtiene restando la velocidad V según la ley de distribución de *Von Kármán-Prandtl* dada por la (Ecuación 400) y la velocidad media U (Ecuación 413).

Ecuación 414

$$V - U = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\left[5,75\log\frac{\sqrt{\tau_0/\rho}}{\nu}\,z + 5,50\right] - \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\left[5,75\log\left(\frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}D\right) + 0,02\right]$$

Ecuación 415

$$V - U = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\left[5,75\log\frac{\sqrt{\tau_0/\rho}}{\nu}\,z + 5,50 - 5,75\log\left(\frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\,D\right) - 0,02\right]$$

$$V - U = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\left[5,75\log\frac{z}{\nu} + 5,50\right]$$ **Ecuación 416**

Esta ecuación permite calcular la diferencia entre la velocidad V y la velocidad media para cada valor de la distancia z.

b) Tuberías rugosas

b1) Variación de la velocidad junto a bordes rugosos.

Para su análisis se parte de la hipótesis de que en las proximidades de los contornos sólidos existe régimen laminar y por lo tanto se puede determinar analíticamente la distancia z' fácilmente.

Por el contrario, si en las paredes de la conducción de la rugosidad K es muy superior a la dimensión δ' (formulada por *Nikuradse* en la (Ecuación 395)), es complicado asumir en el análisis la existencia de la subcapa laminar en el movimiento del fluido, debido a que la misma queda inmersa dentro de las protuberancias de las paredes que contiene a la masa en movimiento.

En la siguiente (Ilustración 121) se observa que las protuberancias pertenecientes a los bordes rugosos de la pared sobrepasan notablemente el espesor de la capa laminar δ', por lo tanto, en este caso los efectos resistentes van a depender de K.

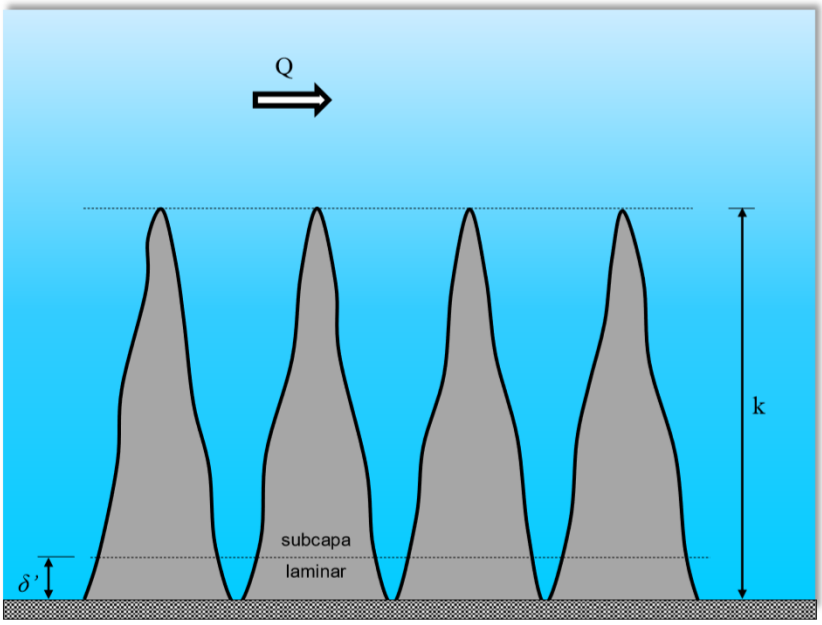


Ilustración 121. Borde rugoso en un escurrimiento con régimen turbulento.

Si K no es lo suficientemente grande con respecto a δ', la rugosidad de las paredes no tendrá mucha influencia, y la circulación del fluido tendrá características muy similares al que se producen en tuberías lisas. Contrariamente, si el valor de K es muy superior a δ', la rugosidad K tendrá muchísima más influencia, estará más vinculada a la distancia z', en definitiva, z' dependerá de K de forma directa.

Nikuradse realizó múltiples experiencias incrustando granos de arena uniforme de diámetro K sobre las tuberías para darles una rugosidad artificial, y llegó a la siguiente conclusión:

Si $K > 10\,\delta'$ (Ilustración 122) entonces se verifica que $z' = K/30$ **Ecuación 417**

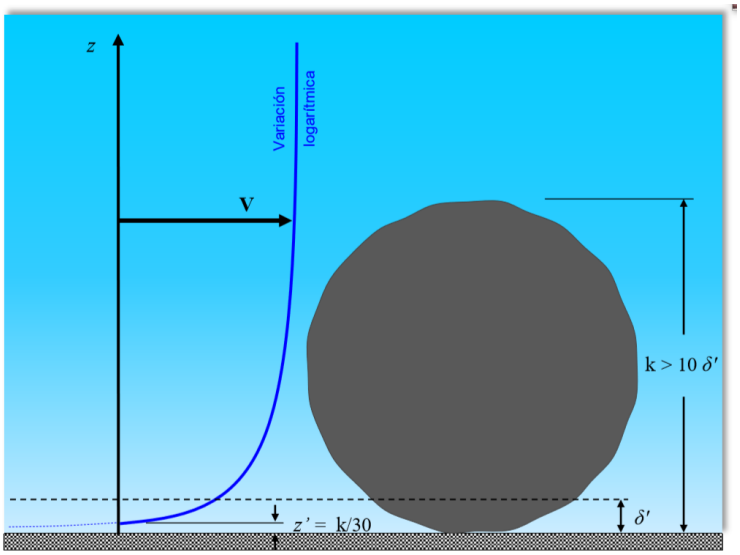


Ilustración 122. Borde con rugosidad artificial en un escurrimiento con régimen turbulento.

Introduciendo el valor de $z' = K/30$ (Si $K > 10\delta'$ (Ilustración 122) entonces se verifica que $z' = K/30$ (Ecuación 417) en la ecuación general de distribución de velocidades (Ecuación 387) se tiene:

$$V = 2{,}50\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\frac{z}{K/30} = 2{,}50\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\left[\ln\frac{z}{K} + \ln 30\right]$$ **Ecuación 418**

$$V = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\left[2{,}5\ln\frac{z}{K} + 8{,}5\right]$$ **Ecuación 419**

Esta es la ecuación de *Von Kármán-Prandtl* para determinar la distribución de velocidades en tuberías con contornos rugosos y régimen turbulento.

En forma adimensional sería:

$$\frac{V}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = 2{,}5\ln\frac{z}{K} + 8{,}5$$ **Ecuación 420**

En función del logaritmo decimal:

$$V = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\left[5{,}75\log\frac{z}{K} + 8{,}5\right]$$ **Ecuación 421**

En forma adimensional:

$$\frac{V}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = 2,5\log\frac{z}{K}+8,5$$ Ecuación 422

b2) Caudal medio junto a bordes rugosos.

Con el mismo razonamiento desarrollado para tuberías lisas, el caudal Q se calcula teniendo en cuenta la distribución de velocidades en toda la sección:

$$Q = \int_{\Omega} V\, d\Omega = \int_0^R \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\left[2,5\ln\left(\frac{z}{K}\right)+8,50\right]2\pi\, r\, dr$$ Ecuación 423

Donde si $z = R - r$ (ecuación 400):

Ecuación 424

$$Q = \int_{\Omega} V\, d\Omega = \int_0^R \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\left[2,5\ln\left(\frac{R-r}{K}\right)+8,50\right]2\pi\, r\, dr = 2\pi\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\int_0^R\left[2,5\ln\left(\frac{R-r}{K}\right)+8,50\right]r dr$$

$$Q = 2\pi\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\int_0^{D/2} 2,5\ln\left(\frac{D/2 - r}{K}\right) r\, dr + 2\pi\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\int_0^{D/2} 8,5\, r\, dr$$ Ecuación 425

Calculando las integrales se tiene:

$$Q = 2\pi\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\frac{D^2}{4}\ln\frac{D}{2K} - \frac{3}{2}2,5\pi\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\frac{D^2}{4} + 8,5\pi\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\frac{D^2}{4}$$ Ecuación 426

$$Q = \frac{\pi D^2}{4}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\left[2,5\ln\frac{D}{2K} - 2,5\ln 2 - \frac{3}{2}2,5 + 8,5\right]$$ Ecuación 427

$$Q = \Omega\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\left[2,50\ln\frac{D}{K} + 3,02\right]$$ Ecuación 428

En función del logaritmo decimal:

$$Q = \Omega \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[5,75 \log \frac{D}{K} + 3,02 \right]$$ **Ecuación 429**

b3) Velocidad media junto a bordes rugosos.

Se obtiene dividiendo el caudal Q obtenido de la (Ecuación 429) entre la sección Ω:

$$U = \frac{Q}{\Omega} = \frac{\Omega}{\Omega} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[5,75 \log \frac{D}{K} + 3,02 \right]$$ **Ecuación 430**

$$U = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[5,75 \log \frac{D}{K} + 3,02 \right]$$ **Ecuación 431**

b4) Diferencia entre la velocidad en un punto y la velocidad media junto a bordes rugosos.

Es la diferencia entre la velocidad calculada en la (Ecuación 421) según *Von Kármán-Prandtl* en un punto para tubos rugosos y la velocidad media según la ecuación 428.

$$V - U = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[5,75 \log \frac{z}{K} + 8,50 \right] - \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[5,75 \log \frac{D}{K} + 3,02 \right]$$ **Ecuación 432**

$$V - U = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[5,75 \log \frac{z}{K} + 8,50 - 5,75 \log \frac{D}{K} + 3,02 \right]$$ **Ecuación 433**

$$V - U = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[5,75 \log \frac{z}{D} + 5,48 \right]$$ **Ecuación 434**

Prandtl llegó a la conclusión que la diferencia entre la velocidad local V y la velocidad media U en cualquier punto de una determinada sección es la misma, independientemente de que la tubería se comporte hidráulicamente como lisa o rugosa. Para ello basta solo con comparar las ecuaciones (Ecuación 416) y (Ecuación 434), en la que se observa que ambas son idénticas.

Ecuaciones de resistencia de Vón Kármán – Prandtl

En régimen laminar, el coeficiente de fricción se calcula igualando las ecuaciones de *Hagen-Poiseuille* (Ecuación 307) y Darcy Weisbach (Ecuación 250), en vista de que esta última fue deducida su valides tanto para régimen laminar como turbulento.

$$j = \underbrace{32\frac{\mu U}{\gamma D^2}} = \underbrace{f\frac{1}{D}\frac{U^2}{2g}}$$

Hagen-Poiseuille - Darcy-Wesibach

$$f = 32\frac{\mu U D 2g}{\gamma D^2 U^2} = 64\frac{\mu g}{\rho g D U} = 64\frac{\nu}{U D} \rightarrow f = \frac{64}{Re}$$

Como puede observarse en la ecuación anterior, el coeficiente de fricción f de *Darcy-Weisbach* para régimen laminar es totalmente independiente de la rugosidad K de las paredes, solo depende del número de *Reynolds* Re, o en definitiva de la viscosidad del fluido.

La influencia de la rugosidad K desaparece debido a que las protuberancias de la superficie sólida quedan sumergidas dentro de la capa laminar δ', y la tensión de corte τ_0 solo depende del número de *Reynolds* Re.

Por otro lado, si el número de *Reynolds* Re tiende a valores muy altos, su influencia va desapareciendo hasta depender solo de la rugosidad relativa K/D.

Para la determinación del coeficiente de fricción de *Darcy-Weisbach* es necesario conocer la relación entre la velocidad de corte y el coeficiente de resistencia f, para ello se igualan los términos de las pérdidas de carga unitaria j representadas por las ecuaciones (Ecuación 373) y (Ecuación 380) y despejando f.

$$j = \frac{4\tau_0}{\gamma D} \text{ y } j = f\frac{1}{D}\frac{U^2}{2g}$$

Esta igualdad tiene su justificación en que la pérdida de carga que se produce entre dos secciones de una conducción es la misma, aunque estén expresadas en función de distintas variables, luego:

$$\frac{4\tau_0}{\gamma D} = f\frac{1}{D}\frac{U^2}{2g}$$ **Ecuación 435** → $$\frac{\tau_0}{\gamma/g} = \frac{f}{8}U^2$$ **Ecuación 436** , sacando la raíz cuadrada en ambos miembros:

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = U\sqrt{\frac{f}{8}}$$ **Ecuación 437**

$\sqrt{\tau_0/\rho}$ tal como se ha señalado en apartados anteriores, es lo que se denomina velocidad de corte o velocidad de fricción, en virtud de sus dimensiones que se corresponden con las unidades cinéticas.

$$\left[\sqrt{\tau_0/\rho}\right] = \frac{L}{T}$$ **Ecuación 438**

La velocidad de corte es una herramienta importante para la determinación del coeficiente de fricción f en régimen turbulento, de acuerdo con la moderna teoría racional.

a) Coeficiente de fricción f para tuberías lisas.

Despejando la velocidad media U de la ecuación (Ecuación 439):

$$U = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{f}}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$ **Ecuación 439**

Igualando la ecuación (Ecuación 439) con la (Ecuación 413), que representa el valor de la velocidad media U en tuberías lisas con régimen turbulento, se tiene:

$$U = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{f}}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\left[5,75\log\left(\frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\right) + 0,02\right]$$ **Ecuación 440**

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{f}} = 5{,}75 \log\left(\frac{1}{\nu} U \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{8}} D\right) + 0{,}02$$ **Ecuación 441**

si se divide por $\sqrt{8}$ se obtiene:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{5{,}75}{\sqrt{8}}\left(\log\left(\frac{U\,D}{\nu}\sqrt{f}\right) - \log\sqrt{8}\right) + \frac{0{,}02}{\sqrt{8}}$$ **Ecuación 442**

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2{,}03 \log\left(Re\sqrt{f}\right) - 0{,}91$$ **Ecuación 443**

Prandtl ajustó esta ecuación en función de los resultados reales de las experiencias realizadas por su discípulo *Nikuradse*, quedando de la siguiente forma:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log\left(Re\sqrt{f}\right) - 0{,}80$$ **Ecuación 444**

Esta expresión (Ecuación 444) representa la ecuación de resistencia a la circulación de fluidos para tuberías que se comportan como con bordes lisos, en la que se deduce que el coeficiente de fricción f, es función exclusiva del número de *Reynolds* Re, que en definitiva quiere decir que depende solo de la viscosidad ν del fluido, de lo que se deduce que la resistencia no está influenciada en lo absoluto por la rugosidad de las paredes.

Debido a la forma implícita de la ecuación, el cálculo del coeficiente f no es sencillo, sin embargo, es la fórmula que más se aconseja en la práctica debido a su origen racional.

Si se introduce el valor de la velocidad de corte dado por la (Ecuación 437), deducida a partir del equilibrio de la masa fluida y válida para cualquier tipo de tubería, dentro de la (Ecuación 395), determinada experimentalmente por *Nikuradse* exclusivamente para tuberías lisas, se tiene:

$$\delta' = 11,60 \frac{\nu}{\sqrt{\tau_0 / \rho}} = 11,60 \frac{\nu \sqrt{8}}{U \sqrt{f}}$$ **Ecuación 445**

Si se divide ambos miembros por el diámetro D:

$$\frac{\delta'}{D} = 11,60 \frac{\nu}{U D} \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{f}} = \frac{32,80}{Re \sqrt{f}}$$ **Ecuación 446**

$$Re \sqrt{f} = 32,80 \frac{D}{\delta'}$$ **Ecuación 447**

Reemplazando la (Ecuación 447) en la (Ecuación 444) se tiene:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{D}{\delta'} + 2,23$$ **Ecuación 448**

Esta es la expresión que deja en evidencia que la resistencia al avance en la circulación de fluidos a través de tuberías lisas con régimen turbulento depende del espesor de la subcapa laminar con respecto al diámetro D.

b) Coeficiente de fricción f para tuberías rugosas.

Igualando la velocidad media (Ecuación 439), con la (Ecuación 432) correspondientes a la circulación de fluidos con régimen turbulento en tuberías rugosas se tiene:

$$U = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{f}} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[5,75 \log \left(\frac{D}{K} \right) + 3,02 \right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2,03 \log \left(\frac{D}{K} \right) + 1,07$$ **Ecuación 449**

Aplicando las correcciones pertinentes para adaptarlos a los datos obtenidos experimentalmente se tiene:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log\left(\frac{D}{K}\right) + 1{,}14$$ **Ecuación 450**

Esta expresión (Ecuación 450)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} - 2\log\left(\frac{D}{K}\right) = 2\log\left(\frac{Re\sqrt{f}}{D/K}\right) - 0{,}80$$ representa la ecuación de resistencia a la circulación de fluidos para tuberías de comportamiento hidráulico rugoso, en la que se deduce que el coeficiente de fricción f depende solamente de la rugosidad K con relación al diámetro D, ignorando las propiedades viscosas del fluido.

5.2.8 Theodore Von Kármán (1881-1963)

Biografía sucinta

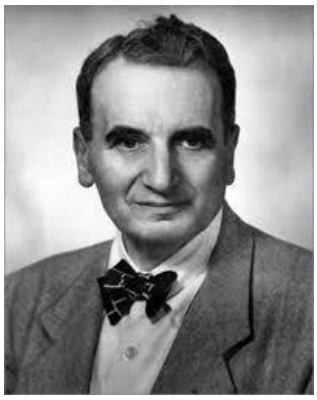


Ilustración 123. Retrato de Theodore Von Kármán

Nació el 11 de mayo de 1881 en *Budapest*, de origen judío y nacionalizado estadounidense, hijo de *Mor Kármán*, profesor de Filosiofia y Educación y *Helen Kohn*. Realizó la carrera de ingeniería aeroespacial en la Universidad Técnica Real Joseph, actual Universidad de Tecnología y Economía de *Budapest*, donde logró graduarse en el año 1902. Sus tres hermanos mayores se dieron cuenta de que era un prodigio matemático cuando tan solo tenía 6 años, por su enorme capacidad para realizar grandes cálculos mentales.

Inmediatamente se incorporó al grupo de *Ludwig Prandtl* en la Universidad de *Göttingen* (Alemania), en la que consiguió doctorarse en 1908 dictó cursos hasta 1912. En ese año le ofrecieron un puesto de profesor universitario en el Instituto Aeronáutico de RWHT Aachen, una de las universidades más prestigiosas de Alemania, el cual aceptó. Entre los años 1915-1918 tuvo que interrumpir su permanencia en RWHT Aachen para servir al ejército Austro-húngaro, allí realizó el diseño de un helicóptero primitivo. Dejo RWHT en 1930.

Con la ayuda financiera de los principales fabricantes alemanes de aeronaves, realizó un programa de estudio de la resistencia de fluidos, turbulencia y ascenso, para optimizar los diseños de las aeronaves.

Kármán realizó grandes contribuciones al desarrollo de la Aeronáutica y Astronáutica e importantes descubrimientos en el campo de la Aerodinámica, destacándose por sus trabajos en flujos de aire supersónicos e hipersónicos.

Desde 1930 hasta 1948 ocupó el cargo de director de *Guggenheim* Aeronautical Laboratory.

De 1946 a 1945 ocupó el cargo de presidente de *United States Air Force Scientific Advisory Board*.

En 1949 renunció a sus dos puestos de director y se convirtió en profesor emérito en *Caltech*. Fue muy activo en el asesoramiento a la aviación de los *EE. UU*. y la OTAN y desempeñó un papel importante en las conferencias internacionales sobre Aeronáutica.

Presidente de *AGARD* (*Advisory Group for Aerospace Research and Development*) desde 1952 hasta 1963 hasta 1963 presidente de *International Academy of Astronautics*.

En 1958 la Universidad de Sevilla lo nombra doctor honoris causa.

Falleció el 6 de mayo de 1963 en Aquisgrán. Alemania.

Aporte y desarrollo de sus investigaciones

Ajustándonos estrictamente al tema desarrollado en la presente tesis, queda decir que en el periodo de tiempo que estuvo trabajando con *Ludwig Prandtl*, desarrolló las fórmulas de pérdidas de carga, para tuberías lisas y rugosas cuyas expresiones se han mencionado en el apartado anterior dedicado a *Prandtl*, puesto que estas expresiones llevan el nombre de **Ecuaciones de resistencia de *Vón Kármán – Prandtl*.** No obstante, se ha querido conocer un poco más en este apartado acerca de su biografía.

A modo de resumen se expone:

a) Coeficiente de fricción f para tuberías lisas (Ecuación 444**).**

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log\left(Re\sqrt{f}\right) - 0,80$$

f, es función exclusiva del número de *Reynolds* Re, que en definitiva quiere decir que depende solo de la viscosidad ν del fluido, de lo que se deduce que la resistencia no está influenciada en lo absoluto por la rugosidad de las paredes.

b) Coeficiente de fricción f para tuberías rugosas (Ecuación 450**).**

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log\left(\frac{D}{K}\right) + 1,14$$

f depende solamente de la rugosidad K con relación al diámetro D, ignorando las propiedades viscosas del fluido.

5.2.9 Paul Richard Heinrich Blasius (1883-1970)

Biografía sucinta

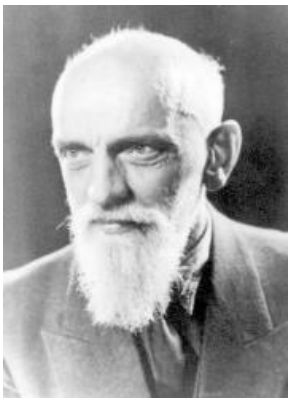


Ilustración 124. Retrato de Paul Richard Heinrich Blasius

Nació el 9 de agosto de 1883 en *Berlín*. Estudió desde 1902 hasta 1906 en las Universidades de *Marburg* y *Götingen*, doctorándose en Física.

Fue colaborador científico de *Ludwig Prandtl* (1906-1908) y desde 1908 asistente de investigación en el Laboratorio de Hidráulica de la Universidad de *Berlín*. Le proporcionó a *Prandtl* las bases matemáticas para el estudio del arrastre (fricción del fluido con un objeto sólido) a través de la teoría de la capa límite. *Blasius* contribuyó al estudio de la capa límite en una placa semi-infinita y amplió los resultados de *Prandtl*, que llevó en 1911 a estudiar el fenómeno en tuberías y conductos, relacionándolos con el número de *Reynolds* Re.

Desde 1912 fue profesor en el Colegio Técnico de Hamburgo, dejando de lado la ciencia para dedicarse a la enseñanza, que quizás amaba más que a la investigación.

En el año 1909 comenzó a trabajar en el tubo de *Pitot* (instrumento hidráulico) y presentó 7 diseños diferentes, describió matemáticamente el patrón del tubo, utilizando la teoría del flujo potencial. El diseño final que fue propuesto por *Prandtl* años más tarde permitía la medición combinada de alturas de presión estáticas y dinámicas (Hager, 2003).

Blasius falleció en Hamburgo el 24 de abril de 1970.

Aporte y desarrollo de sus investigaciones

Dentro de sus contribuciones a la Hidrodinámica, en el periodo que marcó el inicio de la teoría de la capa límite, cabe destacar su expresión matemática, producto de diversas experiencias en laboratorios hidráulicos para obtener y graficar su espesor en función de la longitud y consecuentemente establecer la delimitación del contorno del estrato límite para régimen laminar, ya expuesta en esta tesis en el apartado "capa límite en régimen laminar" de 5.3.6 *Ludwing Prandlt* (1875 – 1953) con la (Ecuación 343):

$$\delta = f(y) = \frac{5Y}{\sqrt{\frac{V_0 Y}{\nu}}}$$

En cuanto al coeficiente f de fricción se refiere, *Blasius*, dentro del estudio sobre el análisis del régimen turbulento, y marcando la tendencia de diferenciar las tuberías lisas de las rugosas en los escurrimientos, estableció la siguiente fórmula para escurrimientos en tuberías lisas:

$$f = \frac{0{,}316}{Re^{0{,}25}}$$ **Ecuación 451**

Al trazar f en función de Re, *Blasius* correlacionó los datos de varias fuentes y propuso números de *Reynolds* comprendido entre los valores 3.000 < Re < 200.000 (Ilustración 125):

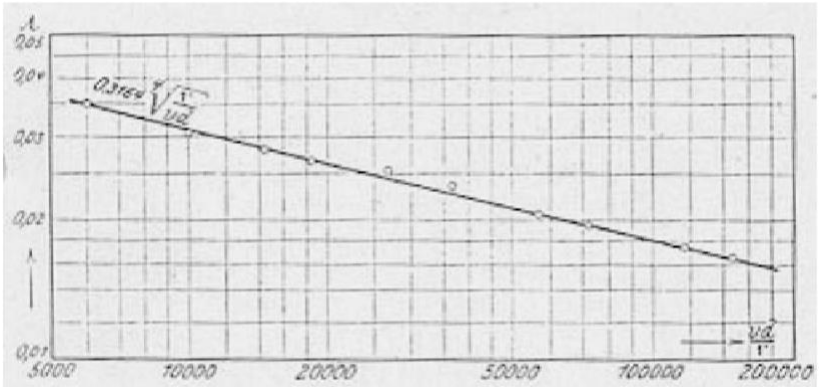


Ilustración 125. Ecuación (9) probada con el conjunto de datos Nusselt.

A partir del hallazgo de esta fórmula, se continuó estudiando el efecto de la rugosidad en el flujo del fluido, nuevamente con *Prandtl* involucrado en esta cuestión. Hasta mediados de 1920 se pensó que esta fórmula se aplicaba universalmente, pero con los desarrollos teóricos de *Prandtl* (1927) y *Von Kármán* (1930) y los experimentos de *Nikuradse* (1932), se dieron cuenta que la solución era más compleja de lo que *Blasius* había propuesto.

Las ideas de *Blasius*, *Prandtl* y *Von Kármán* dieron una reputación duradera a la Escuela de *Götingen*, pero la respuesta final al problema del flujo en tuberías fue presentada por los ingleses *Colebrook* y *White* en 1937 (Educativo, 2017).

5.2.10 Johann Nikuradse (1894-1979)

Biografía sucinta

Ilustración 126. Retrato de Johann Nikuradse

Nació el 20 de noviembre de 1894 en *Samtredia* de *Georgia* (antes parte de la gobernación de *Kutais*, Rusia Imperial). Estudio ingeniería y física en *Kutaisi*, igual que su hermano *Alexander Nikuradse*, físico y geopolítico conocido por sus vínculos con *Alfred Rosemberg* y por salvar a muchos georgianos durante la Segunda Guerra Mundial. En 1919, bajo las recomendaciones del erudito conpiscuo *Petre Melikishvili*, emigró al extranjero para realizar más estudios. En 1921 *Nikuradse* se nacionalizó ciudadano alemán, debido a que *Georgia* paso a formar parte de la Unión Sovietica, impidiéndole volver a su patria.

Se doctoró en 1920 bajo la tutela de *Ludwig Prandtl* y posteriormente trabajo como investigador en el *Kaiser Wilhelm Institute for Flow Research* (actualmente Instituto *Max Planck* de Dinámica y Autoorganización). Con el favor de *Prandtl* llegó a obtener el puesto de Jefe de Departamento hasta 1930, a pesar de sus estrechos vínculos con el Partido Nazi y de la acusación de la Organización Nacional de Socialistas del Instituto, de ser espía para la Unión Soviética y robar libros del instituto. *Prandtl* al principio defendió a *Nikuradse*, pero en 1934 se vio obligado a despedirle.

De 1934 a 1945 trabajó como profesor en la Universidad de *Breslau*, y desde 1945 desempeñó la labor de profesor honorario en la Universidad Técnica de *Aachen*.

Nikuradse vivía principalmente en *Göttingen*, dedicaba la mayor parte de su tiempo al estudio de la Hidrodinámica.

Su experimento más conocido se publicó en Alemania en 1933, y consistió en medir cuidadosamente la fricción que experimenta un fluido circulando en régimen turbulento a través de una tubería rugosa.

Aporte y desarrollo de sus investigaciones

Nikuradse realizó sus ensayos en los Laboratorios Hidráulicos de la Universidad de *Göttingen* (Alemania), en donde experimentó con tubos de diferente diámetro y rugosidad conocida, creada por él mismo, pegando en la superficie interior de tubos lisos de vidrio, arenas cuidadosamente tamizadas para lograr que el diámetro fuese conocido.

Empezó realizando pruebas con tubos hidráulicamente lisos, variando los caudales de circulación y volcando los resultados sobre un gráfico doble logarítmico de f = F(Re).

Midió la caída de presión necesaria para los distintos caudales y los datos se convirtieron en factor de fricción para el número de *Reynolds* Re y la rugosidad relativa k/D correspondiente.

Con la velocidad v = Q/S, la viscosidad ν y el diámetro, calculaba el número de *Reynolds* Re y los valores del coeficiente f para régimen laminar (Re < 2000), en la ecuación (Ecuación 333):

$$f = \frac{64}{Re}$$

Tomando logaritmos resulta:

$$\log f = \log 64 - \log Re$$ **Ecuación 452**,

que se corresponde con la ecuación de una recta, conocida como la recta de *Poiseuille*.

De esta forma verificó que los puntos se alineaban de una manera admisible con la (Ecuación 333) para números de Re < 2.000.

Verificó también los puntos que interpretan a los movimientos en tuberías lisas con régimen turbulento, representadas por la Ecuación 444) para números de *Reynolds* Re > 4.000-5.000, siendo la ecuación:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log\left(Re\sqrt{f}\right) - 0,80$$

En el intervalo comprendido entre los números de Reynolds 2000 < Re < 4.000-5.000, comprobó que la distribución no se correspondía con ninguna de las alineaciones anteriores, si no que obedece a la denominada zona crítica o inestable, de paso del régimen laminar al turbulento (Ilustración 127).

En el gráfico doble logarítmico, las abscisas representan al número de *Reynolds* Re y las ordenadas a f (coeficiente de fricción).

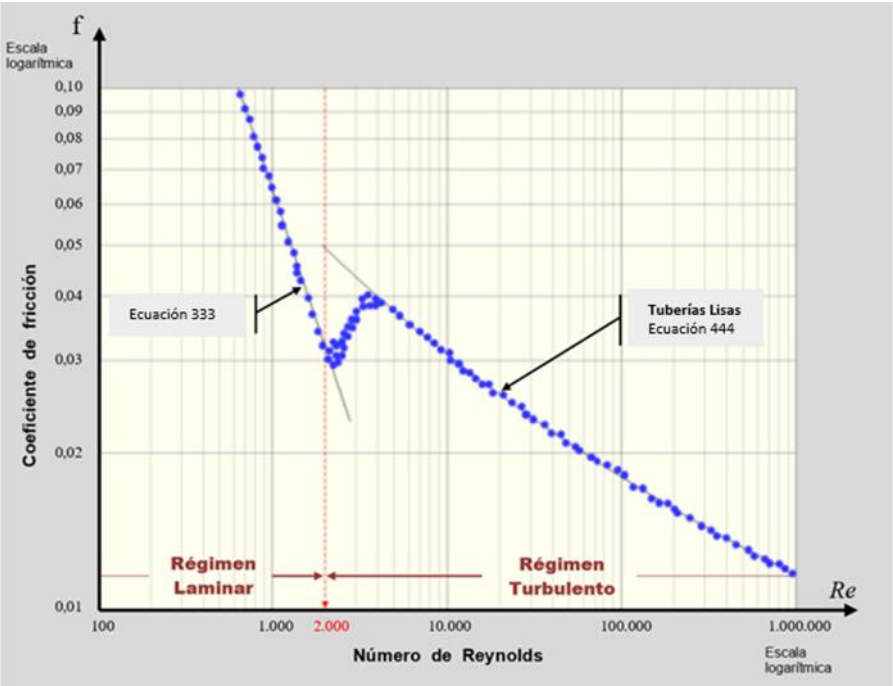


Ilustración 127. Experiencias de Nikuradse con tuberías.

Nikuradse, después de estudiar las tuberías lisas, continuó realizando ensayos con tuberías hidráulicamente rugosas, determinando la rugosidad relativa K/D para 30 valores distintos. La denominada rugosidad relativa K/D es el cociente entre el diámetro del grano de arena y el del interior de la tubería.

Para los efectos prácticos, empleó la inversa de la rugosidad relativa D/K, evitando así, trabajar con decimales, con valores variables $30 \leq D/K \leq 1.014$.

El siguiente gráfico (Ilustración 128) representa los puntos correspondientes a los ensayos que *Nikuradse* realizó sobre tuberías de rugosidad uniforme, y en el que aparecen solo seis relaciones D/K de las treinta que efectuó, con el fin de exponer con más claridad su concepto.

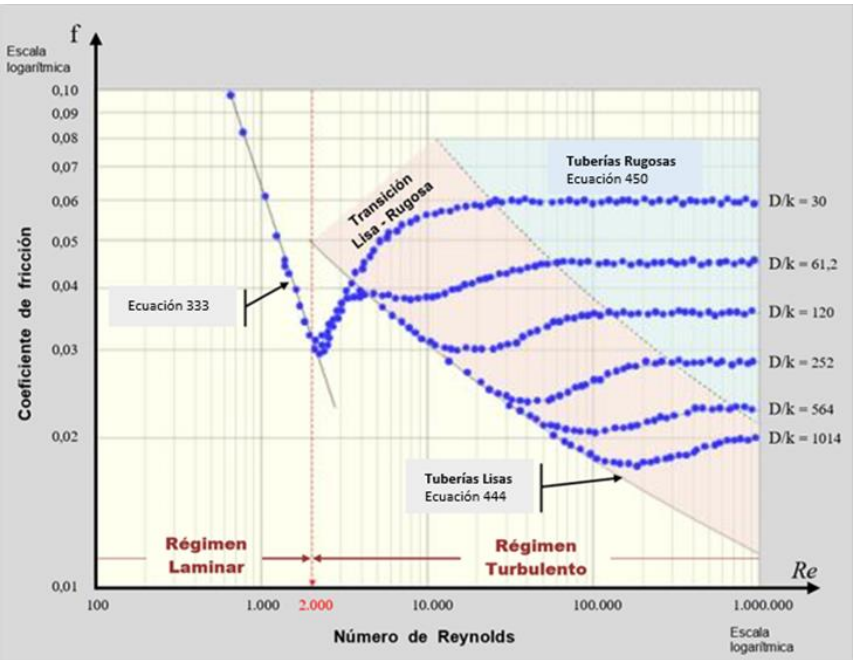


Ilustración 128. Experiencias de Nikuradse con tuberías rugosas.

Del gráfico anterior extrajo las siguientes conclusiones:

- Cuando el número de *Reynolds* Re sea menor que su valor crítico, indicando así que el régimen es laminar, los puntos se alinean con la curva de la (Ecuación 333):

$$f = \frac{64}{Re}$$

- Cuando se sobrepasa la zona crítica, representada por el intervalo 2.000 < Re < 4.000-5000, los puntos se ordenan siguiendo la ley de la (Ecuación 444):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log\left(Re\sqrt{f}\right) - 0,80$$

Estos puntos se van distribuyendo hasta llegar a un determinado valor del número de *Reynolds* Re, que va aumentando a medida que se incrementa la relación D/K. En definitiva, cuando la rugosidad K disminuye (o bien crece D/K), la tubería trabaja como lisa hasta ciertos valores de Re, que cada vez son más amplios.

Todo ello indica, que, aunque una tubería tenga un aspecto físico rugoso, a efectos hidrodinámicos la circulación del fluido puede desarrollarse como si fuese de característica lisa. Para ello se tiene que cumplir que el número de *Reynolds* sea adecuadamente pequeño, en el que las fuerzas viscosas deben prevalecer sobre las inerciales.

Las diferentes curvas que se visualizan en la parte derecha del gráfico, con tendencias a ser horizontales e identificadas con sus respectivos valores de D/K a partir de ciertos valores de *Reynolds* Re, indican que una vez superado dicho valor, el coeficiente de fricción f se independiza del número de *Reynolds* Re y por tanto de la viscosidad ν.

En resumen, en los límites de un flujo turbulento dentro de una conducción con paredes de apariencia física rugosa, el movimiento puede actuar hidráulicamente de dos maneras posibles:

Tubería lisa

El número de *Reynolds* Re debe ser lo suficientemente bajo, pero siempre superior a 4.000 – 5.000.

La resistencia se origina solo por efecto de la viscosidad cinemática ν.

Tubería rugosa

El número de *Reynolds* tiene que ser muy elevado y la resistencia al avance del fluido se produce exclusivamente por la acción de la rugosidad o asperezas en las paredes de las tuberías.

Según el análisis del fenómeno estudiado por *Nikuradse*, se llega la conclusión que no existe un punto único de inflexión donde el comportamiento de la corriente líquida se modifique repentinamente de lisa a rugosa y viceversa, por lo que es más razonable, a la vista del gráfico (Ilustración 128), considerar la existencia de una zona de transición moderada, en la cual la resistencia al avance del fluido está influenciada simultáneamente por la acción de la viscosidad ν y por la rugosidad de los contornos sólidos.

Haciendo un resumen de forma gráfica del comportamiento hidrodinámico de los flujos a presión, en función de la viscosidad del fluido y la rugosidad de la tubería, se presentan los siguientes tipos de regímenes:

1. Régimen laminar

Las características principales son:

- No se forman turbulencias
- Es independiente de la rugosidad absoluta K.
- $f = \frac{64}{Re} \rightarrow f = F(Re)$

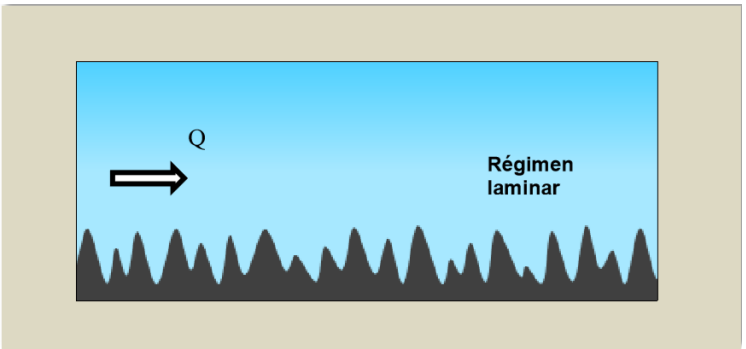


Ilustración 129. Flujo con régimen laminar.

2. Régimen turbulento

1) Tubería lisa

Las características principales son:

- Flujo hidrodinámico como tubería lisa.
- La rugosidad absoluta K queda totalmente cubierta por la subcapa laminar δ' y no influye en el coeficiente de fricción f (δ' >K).
- El coeficiente de fricción es función del número de *Reynolds* Re→ f = F(Re).
- Las fuerzas viscosas son muy importantes.
- Las fuerzas inerciales son insignificantes.

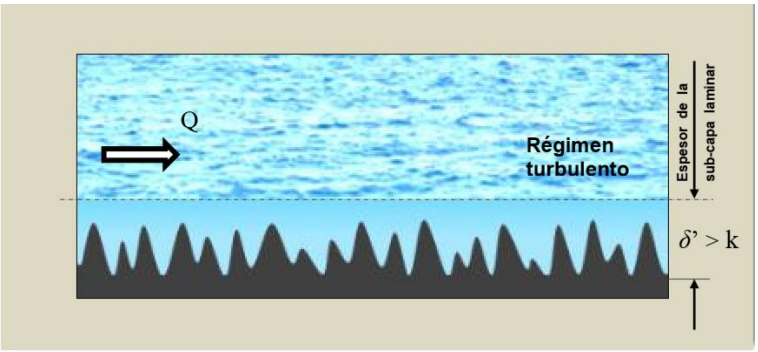


Ilustración 130. Flujo con régimen turbulento en tubería lisa.

2) Tubería transición lisa-rugosa.

Las características principales son:

- Flujo hidrodinámico como tubería en zona de transición o semi-rugosa.
- El espesor de la sub-capa laminar δ' es próximo al valor de la rugosidad absoluta (δ' = K).
- La rugosidad sobresale de la línea de la sub-capa laminar en algunos puntos y en otros no.
- Las rugosidades salientes están afectadas por la turbulencia.
- El coeficiente de fricción depende simultáneamente del número de *Reynolds* y la rugosidad relativa f = F (Re, K/D).

- Las fuerzas viscosas y las inerciales tienen una acción influyente compartida.

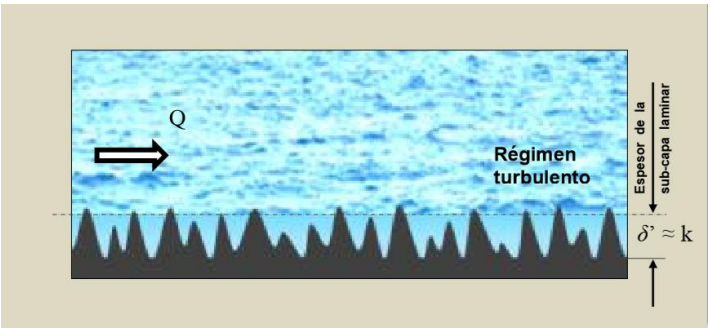


Ilustración 131. Flujo con régimen turbulento en transición lisa-rugosa.

3) Tubería rugosa.

Las características principales son:

- Flujo hidrodinámico como tubería rugosa.
- El espesor de la subcapa laminar δ' es menor que la rugosidad absoluta K ($\delta' < K$).
- Las protuberancias de las paredes sobrepasan sobradamente el espesor de la subcapa laminar, generando turbulencia completa.
- El coeficiente de fricción f depende exclusivamente de la rugosidad relativa f = F(K/D).
- Las fuerzas de inercia son de magnitud importante.
- Las fuerzas viscosas son despreciables.

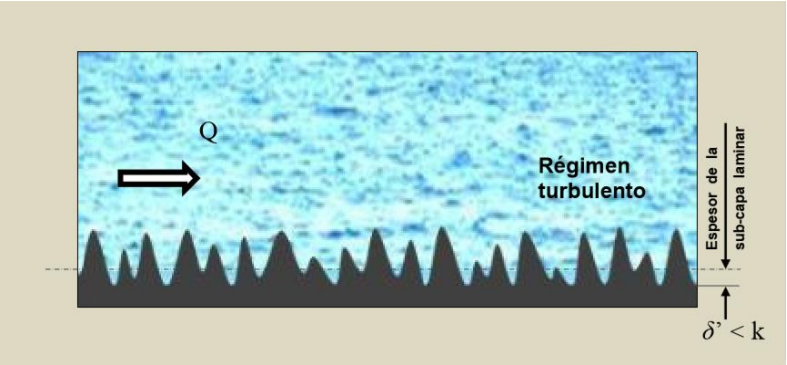


Ilustración 132. Flujo con régimen turbulento en tubería rugosa.

Se pueden demostrar las características principales del régimen laminar referidas anteriormente si se tienen en cuenta las siguientes consideraciones:

Si el flujo es laminar la corriente circula con una cierta lentitud, la viscosidad es relativamente grande, razón por la cual las protuberancias del contorno no llegan a perturbar dicha circulación. Por lo tanto, el efecto de la rugosidad de la tubería cuando el flujo es laminar queda anulado y el factor de fricción f no depende de la rugosidad K. Esto quiere decir que la fórmula empleada para el cálculo de las pérdidas de carga en régimen laminar será igual para tuberías lisas y rugosas.

Si igualamos la (Ecuación 309) correspondiente a la fórmula de *Poiseuille* para pérdidas de carga continua en régimen laminar con la (Ecuación 250) de *Darcy-Weisbach* , tal como se ha hecho en otros apartados, se tiene lo siguiente:

$$J = 32\frac{\mu U L}{\gamma D^2} = f\frac{L}{D}\frac{U^2}{2g}\text{; Como } \gamma = g\rho$$

$$J = 32\frac{\mu U L}{\rho g D^2} = f\frac{L}{D}\frac{U^2}{2g} = f\frac{U}{2}$$

$$J = f\frac{U}{2}$$ **Ecuación 453**

Si se tiene en cuenta que la viscosidad cinemática ν es la relación entre la viscosidad dinámica y la densidad ρ $\rightarrow \nu = \frac{\mu}{\rho}$, despejando el factor de fricción f se tiene:

$$f = 64\frac{\mu}{\rho}\frac{1}{D U} = 64\frac{\mu}{\rho}\frac{1}{D U} = 64\nu\frac{1}{DU}$$

Teniendo en cuenta que $Re = \frac{U D}{\nu}$ $\rightarrow \nu = \frac{U D}{Re}$ se tiene que:

$$f = 64\frac{U D}{Re}\frac{1}{D U} = \frac{64}{Re} \rightarrow f = \frac{64}{Re}$$ como se quería demostrar.

La expresión de pérdidas de carga continúa para un régimen laminar en función de la velocidad, aplicando la fórmula de *Darcy-Weisbach* (Ecuación 250) es:

$$J = f\,\frac{U^2}{2g\,D}\,L = \frac{64}{Re}\,\frac{U^2}{2g\,D}\,L$$

Como $Re = \dfrac{U\,D}{\nu}$, se tiene que la pérdida de carga es:

$$J = \frac{64}{2g}\,\frac{U}{D^2}\,\nu\,L$$ **Ecuación 454**

En función del caudal y operando se llega a la siguiente ecuación:

$$J = \frac{4{,}152\,U}{D^4}\,Q\,L$$ **Ecuación 455**

Influencia simultánea de la viscosidad y la rugosidad.

Es importante resaltar tal como se ha visto, que por la simple circunstancia física que la superficie sólida que contiene al líquido sea áspera en su apariencia visual, el funcionamiento hidrodinámico de una conducción tenga que ser rugoso, ya que puede trabajar tanto como lisa o bien como rugosa.

Resumiendo, se ha visto que, si el número de *Reynolds* Re es lo suficientemente pequeño, le corresponderá a la conducción un funcionamiento tipo tubería lisa, y si Re es muy alto el comportamiento será como tubería rugosa. Queda la zona intermedia entre esos dos estados extremos, en donde la resistencia al avance depende simultáneamente de la viscosidad ν del fluido y de la rugosidad K, es decir, actúa como si fuera una tubería semi-rugosa.

Para estudiar que pasa en esta zona intermedia, se establece un nuevo ordenamiento de las ecuaciones de resistencia de *Von Kármán-Prandtl*:

1) Tuberías lisas

Restando en cada miembro de la (Ecuación 444) el término $2\log(D/K)$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log\left(Re\sqrt{f}\right) - 0,80 \rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} - 2\log(D/K) = 2\log\left(Re\sqrt{f}\right) - 2\log(D/K) - 0,80 \rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} - 2\log(D/K) = 2\log\left(\frac{Re\sqrt{f}}{D/K}\right) - 0,80$$ **Ecuación 456**

2) Tuberías rugosas

Modificando la distribución de la (Ecuación 450):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log\left(\frac{D}{K}\right) + 1,14 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{f}} - 2\log\left(\frac{D}{K}\right) = 1,14$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} - 2\log\left(\frac{D}{K}\right) = 1,14$$ **Ecuación 457**

Las (Ecuación 456) y (Ecuación 457) se grafican sobre unos ejes cartesianos ortogonales, de la siguiente manera:

Abscisa:

$$X = \left(\frac{Re\sqrt{f}}{D/K}\right)$$ **Ecuación 458**

Escala: Logarítmica; Sentido positivo: De izquierda a derecha.

Ordenada:

$$Y = \frac{1}{\sqrt{f}} - 2\log\left(\frac{D}{K}\right)$$ **Ecuación 459**

Escala: Aritmética; Sentido positivo: De arriba a abajo.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, se simplifican las ecuaciones de la siguiente manera:

1) Tuberías lisas

La siguiente (Ecuación 456), se transforma en la (Ecuación 460):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} - 2\log\left(\frac{D}{K}\right) = 2\log\left(\frac{Re\sqrt{f}}{D/K}\right) - 0,80$$

$Y = 2\log X - 0,80$ **Ecuación 460**

Esta ecuación corresponde a una línea recta, por lo que, definiendo dos puntos se puede representar en un sistema de ejes cartesianos (Ilustración 133).

Punto A: Si X=1 → Y= - 0,80

Punto B: Si X=100 → Y= 3,20

2) Tuberías rugosas

La siguiente (Ecuación 457), se transforma en la Y=1,14 Ecuación 462:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} - 2\log\left(\frac{D}{K}\right) = 1,14$$ **Ecuación 461**

$Y = 1,14$ **Ecuación 462**

Esta ecuación corresponde a una línea recta paralela al eje X (ver Ilustración 133).

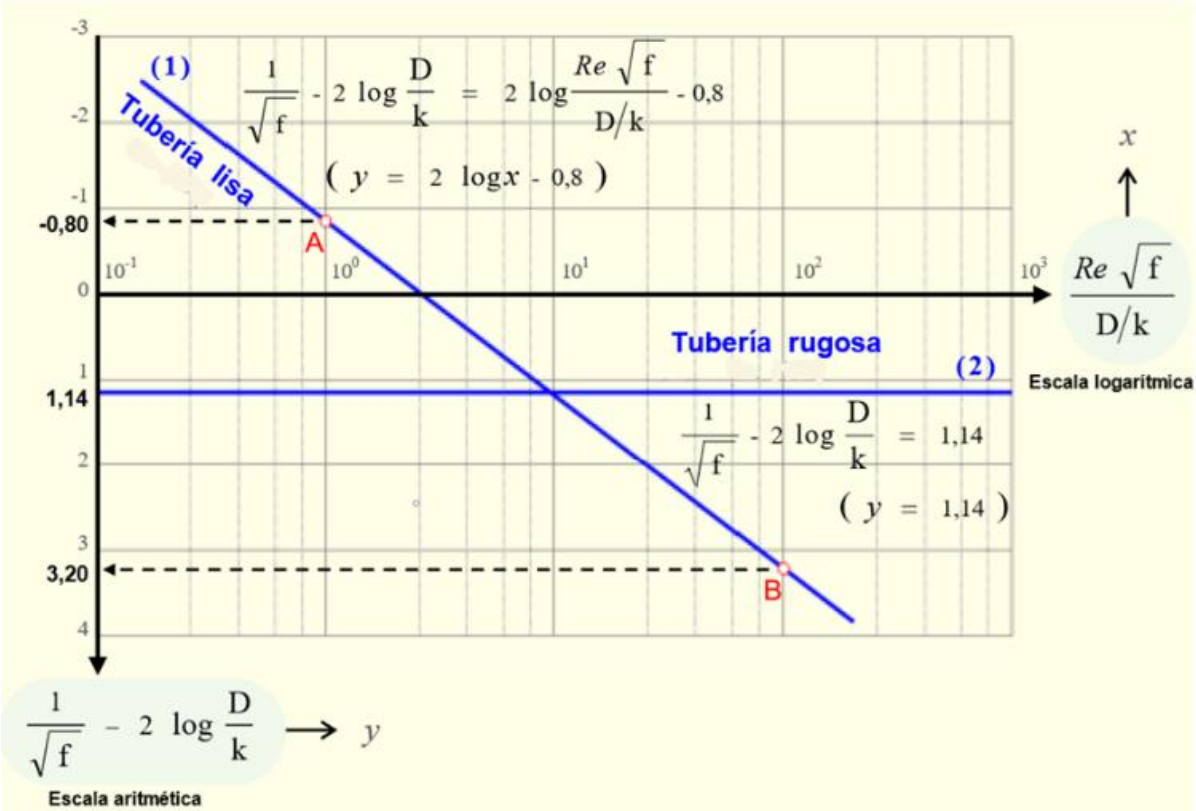


Ilustración 133. Representación gráfica del funcionamiento hidráulico como tubería lisa y rugosa.

Resumiendo, las variables que gobiernan la resistencia al movimiento del agua en las dos situaciones extremas son:

1) Tuberías lisas

Según la $\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log\frac{D}{\delta'} + 2,23$ Ecuación 448), la resistencia depende de D/δ':

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log\frac{D}{\delta'} + 2,23 \rightarrow f = F(D/\delta')$$ Ecuación 463

2) Tuberías rugosas

Según la (Ecuación 450), la resistencia depende de D/K:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log\left(\frac{D}{K}\right) + 1,14 \rightarrow f = F(D/K)$$ Ecuación 464

Para conocer la resistencia al movimiento entre los límites de comportamiento de tuberías que funcionan hidráulicamente entre lisa y rugosa, parece razonable pensar que su evaluación estará dentro de una proporcionalidad entre las fuerzas viscosas y la rugosidad de las paredes, por lo tanto, dividiendo la variable D/δ' entre D/K se obtiene:

$$\frac{D/\delta'}{D/K} = \frac{K}{\delta'}$$ **Ecuación 465**

La relación K/δ', es la que sirve para cuantificar la resistencia en la zona intermedia.

De esta relación se extraen dos conclusiones:

La resistencia disminuye a medida que la rugosidad K va quedando más inmersa en la subcapa laminar δ'.

La resistencia aumenta cuando la subcapa laminar δ' se reduce, resultando así más turbulento el movimiento por causa de la rugosidad K que queda al descubierto.

Si partimos de la (Ecuación 447) determinada experimentalmente por *Nikuradse* exclusivamente para tuberías lisas, se tiene, multiplicando ambos miembros por K y dividiendo posteriormente por D/K:

$$Re\sqrt{f} = 32,80\frac{D}{\delta'} \rightarrow Re\sqrt{f}K = 32,80\frac{D}{\delta'}K$$

$$\frac{Re\sqrt{f}}{D/K} = 32,80\frac{K}{\delta'}$$ **Ecuación 466**

En donde $\frac{Re\sqrt{f}}{D/K}$ es el término correspondiente a la abscisa del diagrama de la figura 133.

O bien:

$$\frac{K}{\delta'} = \frac{1}{32,80} \frac{Re\sqrt{f}}{D/K}$$ **Ecuación 467**

Para una mejor interpretación gráfica, se adiciona otra abscisa complementaria que indica la relación K/δ', que difiere en una proporción inversa de 32,80 unidades respecto del valor de la abscisa original, según se deduce de la (Ecuación 467).

Se vuelve a graficar con el sistema de coordenadas utilizado anteriormente, considerando la (Ecuación 456) para tubería lisa y la (Ecuación 457) para rugosa como líneas de referencia (Ilustración 135). En este gráfico se volcaron los puntos resultantes de los ensayos experimentales de *Nikuradse*, realizados con un revestimiento interior de granos de arena uniforme incrustados en la tubería (Ilustración 134).

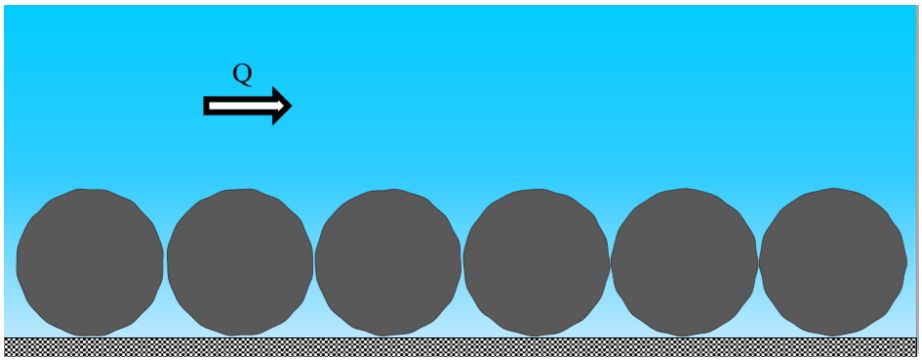


Ilustración 134. Revestimiento con granos de arena uniforme en ensayos de Nikuradse.

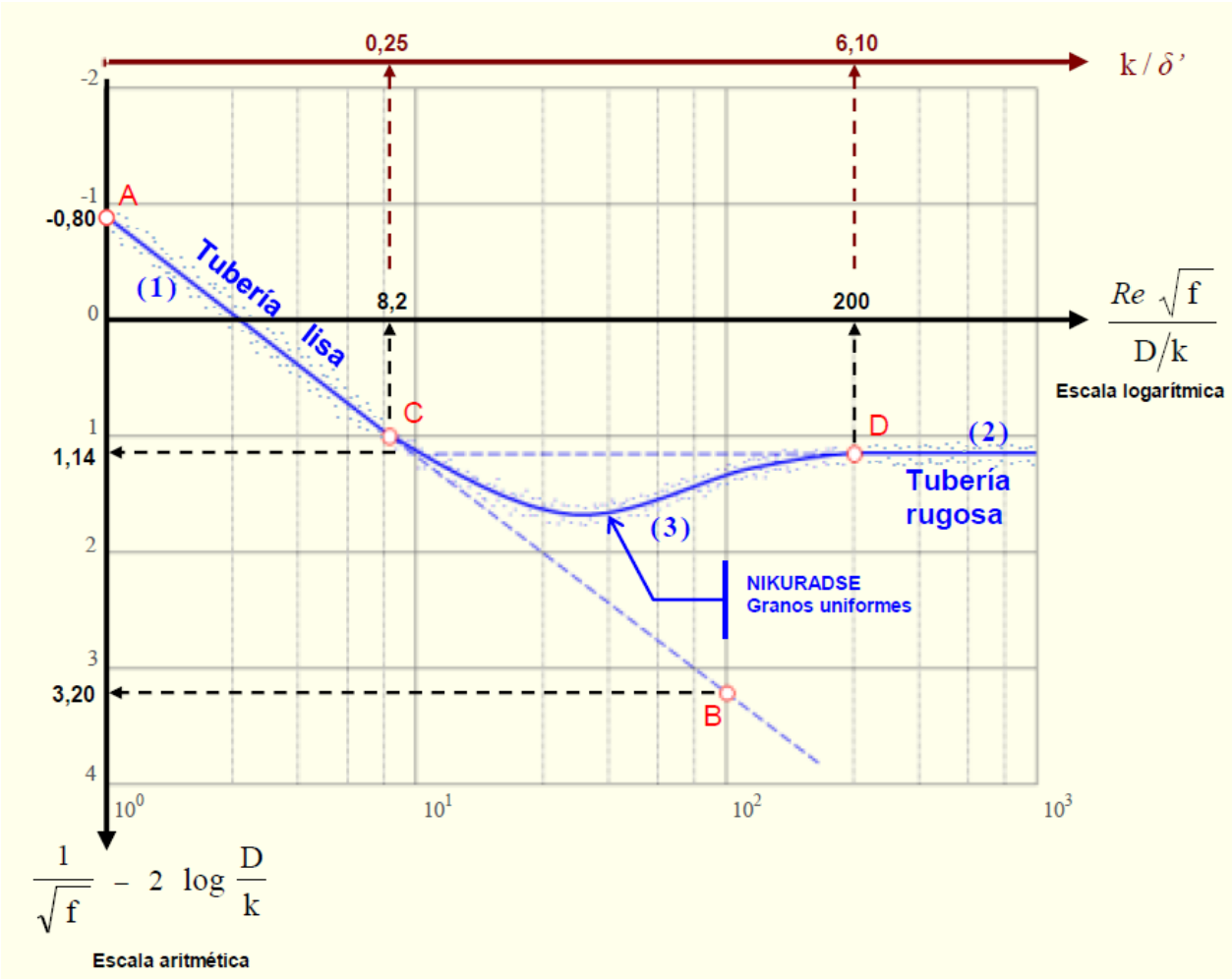


Ilustración 135. Representación gráfica del funcionamiento hidráulico con granos de arena uniforme.

Si se observa la nube de puntos experimental en el gráfico de la Ilustración 135, una parte coincide prácticamente con la línea (1) de escurrimiento liso, y también otra parte se alinea con la recta (2) correspondiente al escurrimiento rugoso. En la zona comprendida entre los valores $0,25 < K/\delta' < 6,10$, la nube de puntos se separa notablemente de las dos rectas (1) y (2), formando una línea (3) individual.

Nikuradse haciendo un análisis del comportamiento hidrodinámico apoyándose en el diagrama de la Ilustración 135, concluyó que, en los escurrimientos a través de tuberías a presión con régimen turbulento, el movimiento deberá cumplir con los siguientes condicionantes según la zona que corresponda:

Para $K/\delta' < 0,25$ que se corresponde con $\frac{Re\sqrt{f}}{D/K} < 8,2$.

En este caso la tubería siempre funciona hidrodinámicamente como lisa, y la resistencia solo depende de la viscosidad ν.

$$\frac{K}{\delta'} < \frac{1}{4} \rightarrow K < \frac{1}{4}\delta'$$

La desigualdad anterior indica que esto sucede cuando la rugosidad K es 4 veces inferior al espesor de la subcapa laminar δ'.

La siguiente (Ilustración 136) da una idea visual de este caso:

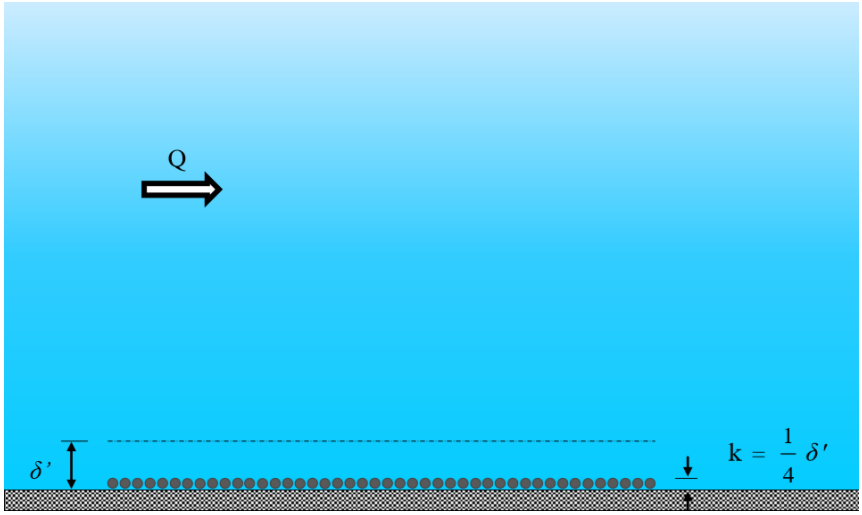


Ilustración 136. Relación límite para una tubería hidráulicamente lisa.

Para $K/\delta' > 6,10$ que se corresponde con $\frac{Re\sqrt{f}}{D/K} > 200$.

En este caso la tubería trabaja hidráulica e invariablemente como rugosa, en donde la resistencia al movimiento del agua depende exclusivamente del diámetro del grano de arena.

$$K/\delta' > 6,10 \rightarrow K > 6,10\delta'$$

La desigualdad anterior indica que esto sucede cuando la rugosidad K es 6,10 veces superior a la subcapa laminar δ'.

La siguiente (Ilustración 137) da una idea visual de este caso:

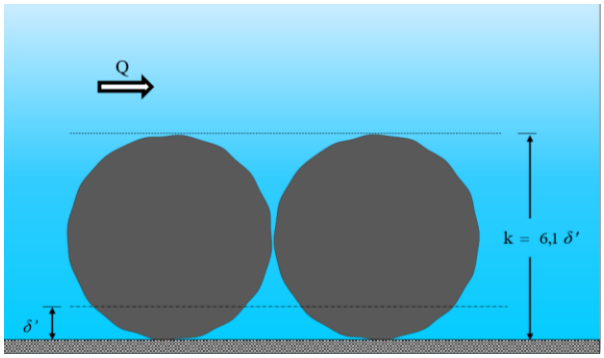


Ilustración 137. Relación límite para una tubería hidráulicamente rugosa.

$$\text{Para } 0,25 < K > 6,10 \quad \text{que se corresponde con } 8,2 < \frac{Re\sqrt{f}}{D/K} < 200.$$

En este caso se corresponde con la situación intermedia entre los extremos correspondientes al escurrimiento liso y rugoso, en la zona donde la resistencia al avance del agua depende simultáneamente de la viscosidad del fluido y la aspereza de la tubería. En esta zona la nube de resultados experimentales no se alinea con las rectas de referencia.

En la siguiente (Ilustración 138) se indica con claridad los límites entre los cuales la tubería actúa como semi-rugosa.

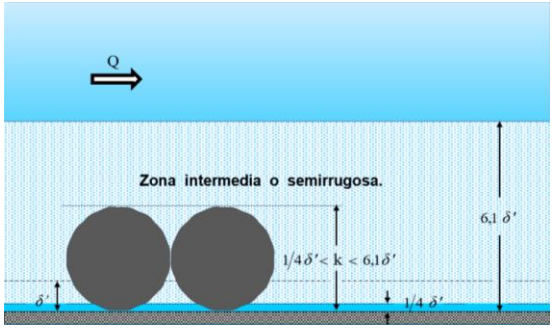


Ilustración 138. Zona donde funciona una tubería hidráulicamente como semirrugosa

5.2.11 Las investigaciones de White - Colebrook

Ambos investigadores realizaron importantes experimentos y aportaron una buena base analítica basados en ellos hasta determinar la fórmula que lleva su nombre. Desarrollaron la ecuación empírica *Colebrook-White* para el cálculo de la caída de presión friccional para la transición y flujo turbulento a través de tuberías lisas y rugosas. La ecuación es la base de la tabla *Moody*.

5.2.11.1 Cedric Masey White (1898-1993)

Biografía sucinta

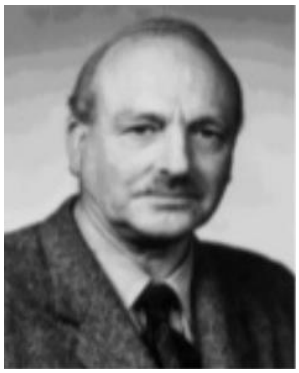


Ilustración 139. Retrato de Cedric Masey White

Nació el 10 de octubre de 1898 en Ontario y se educó en forma privada en *Nottingham* antes de continuar sus estudios de ingeniería en *University College, Nottingham*. Durante la Primera Guerra Mundial, sirvió durante dos años en el recién formado Cuerpo de Tanques.

Fue muy individualista y durante toda su carrera académica aplicó el pensamiento novedoso y fundamental a su campo elegido de Ingeniería Civil, Hidráulica y Mecánica de Fluidos Aplicada. Los años productivos en *King's College*, Londres, donde se convirtió en profesor en 1927, con el profesor *AH Jameson* como jefe de

departamento y con *SJ Davies*, *E. Giffen* y *HM Clarke* como colegas influyentes, fueron seguidos por un período igualmente fructífero como lector en el *Hawksley Hydraulics Laboratory* en *Imperial College*, Londres, donde el Profesor *AJS Pippard* era entonces jefe del Departamento de Ingeniería Civil. La filosofía de *Pippard* era designar a la mejor persona para el trabajo y luego darles rienda suelta, una filosofía eminentemente adecuada para un hombre del carácter y el calibre de *White*.

Como lector en Hidráulica en el *Imperial College* (Colegio Imperial de Ciencia y Tecnología), *White* revitalizó el Laboratorio de Hidráulica y entre 1933 y 1939, con *RA Bagnold*, *RV Burns*, *FC Colebrook*, *EF Gibbs* y *RP Pendennis-Wallis*, persiguieron y apoyaron investigaciones fundamentales en temas como las presiones de onda, transporte de sedimentos, diseño de vertederos, fricción de tuberías y canales, cavitación, fuerzas de arrastre y predicciones de inundaciones. Durante la Segunda Guerra Mundial, se llevaron a cabo estudios relacionados con el diseño de rompeolas neumáticos, con *Mulberry Harbor*, y con proyectos similares. En particular, en lo que nos atañe en esta tésis, *White* fue el supervisor de doctorado del ingeniero británico *Cyril Frank Colebrook* (1910-1997) y con quien desarrolló la ecuación empírica *Colebrook-White*.

En 1946 *White* recibió una Cátedra personal de Mecánica de Fluidos e Ingeniería Hidráulica. Realizó estudios sobre problemas relacionados con la estratificación térmica de depósitos de agua, con diseños de vertederos para instalaciones de energía hidroeléctrica y temas similares. Además, animó plenamente a sus colegas más jóvenes en sus diversas actividades relacionadas con las vibraciones de compuertas inducidas por el flujo, los efectos del viento sobre el agua, el daño por cavitación en el hormigón, los flujos sifónicos que atraviesan el aire, el control de las inundaciones y temas asociados.

Estos colegas, algunos de los cuales todavía están activos en el campo de la Hidráulica, incluyen *JRD Francis*, *PO Wolf*, *T. O'Donnell*, *DH Kent*, *MJ Kenn*, *P. Minton* y *JD Harwick* (Kenn, 1994).

Con el apoyo sustancial de *English Electric Company*, *White* introdujo un exitoso curso de postgrado de un año en *Hydro-Power* para graduados en el hogar y en el extranjero. Este curso duró dos décadas más o menos, y terminó con las jubilaciones simultáneas, en 1966, de *White* y el *Dr. Charles Jaeger*.

Inmediatamente antes de su retiro del recién ampliado Imperial *College, 'CMW'*, presenció, en 1964, la finalización de un nuevo Laboratorio de Hidráulica que incorporó muchos de sus conceptos de diseño. Las características especiales incluyen un gran tanque visual, una plataforma giratoria 'Coriolis' (para pruebas de modelos hidráulicos) y una sección de trabajo alta que excedió deliberadamente una atmósfera en altura de agua. Murió en *Ontario* el 27 de diciembre de 1993.

5.2.11.2 Cyril Frank Colebrook (1910-1997)

Biografía sucinta

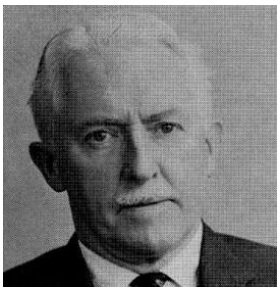


Ilustración 140. Retrato de Cyril Frank Colebrook

Físico británico nacido en *Swansea*, *Gales*, hizo contribuciones significativas para la comprensión básica de la Mecánica de Fluidos. *Colebrook* fue estudiante de Doctorado de *Cedric Masey White*, y en 1934 ambos desarrollaron la ecuación empírica denominada *Colebrook-White* para el cálculo de la caída de presión inducida por fricción para flujos turbulentos en tubos lisos y rugosos, que después fue la base para confeccionar el diagrama de Moody.

Dado el carácter implícito de la ecuación, dejo de ser atractiva para muchos ingenieros, debido a que en la época que fue propuesta no existían calculadoras programables que pudieran dar una respuesta rápida. Fue entonces cuando en 1942,

el ingeniero *Hunter Rouse* construyó un gráfico y una tabla a partir de la ecuación para hacer más fácil el cálculo del factor de fricción f.

Posteriormente, en 1944 *Lewis F. Moody* tabuló sus resultados y los trasladó al conocido **Diagrama de *Moody***, dando así, una salida más fácil a los ingenieros de la época.

A partir de entonces el desarrollo científico en ese sentido se ha decantado hacia explicitar la ecuación de *Colebrook*, siendo las ecuaciones más representativas en este sentido las fórmulas de *Swamee-Jain* (1976), *Churchill* (1977) y *Haaland* (1983).

El 12 de enero de 1997 falleció en *Worthing* (Inglaterra).

En el mundo de habla inglesa, la ecuación de *Colebrook* lleva su nombre, y en el de habla hispana el de *Colebrook-White*.

Aporte y desarrollo de sus investigaciones

Las experiencias realizadas por *Nikuradse* para evaluar la resistencia al movimiento del agua en tuberías a presión, están basadas en la homogeneidad de las asperezas de las conducciones en estudio, confeccionadas con granos de arena uniforme, al contrario de las conducciones pertenecientes a las instalaciones hidráulicas reales, que no coinciden con las elaboradas por *Nikuradse*, por lo tanto, estas hipótesis iniciales conducían con seguridad a resultados erróneos en la práctica.

A partir de aquí *Colebrook* y *White*, para acercarse más a la realidad, procedieron a realizar nuevas experiencias complementarias usando granos de arena no uniforme (Ilustración 141) y, por otro lado, con tuberías de uso comercial.

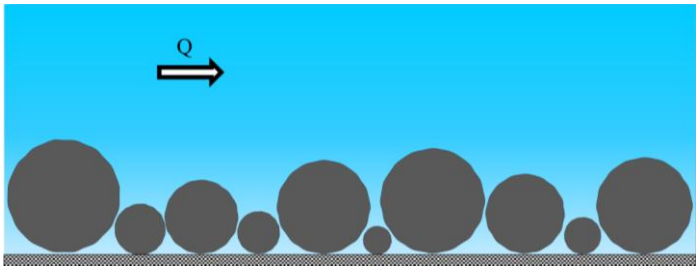


Ilustración 141. Revestimiento con granos de arena no uniforme (Colebrook y White)

a) Tuberías revestidas con granos de arena no uniforme

En el gráfico de la Ilustración 142 se muestra la curva (4), resultado de los estudios realizados por *Colebrook-White* en la zona de transición lisa-rugosa, y que representa el comportamiento del movimiento del fluido en tuberías con rugosidad artificial, obtenida con incrustaciones sobre la superficie de granos de arena con graduación variable.

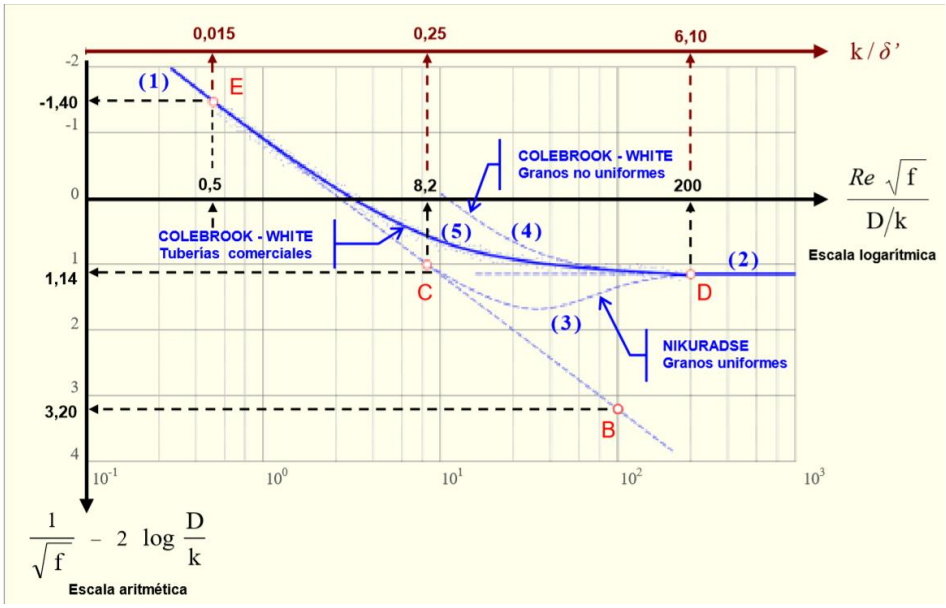


Ilustración 142. Experiencias de Colebrook y White.

Dada la dificultad en la práctica de relacionar la rugosidad K, con un solo valor representativo, con una sola magnitud, tal como acontece con la rugosidad K correspondiente a los revestimientos uniformes, *Colebrook* y *White* introdujeron el concepto de **rugosidad equivalente**, que consiste en una rugosidad particular K de

granos ficticios, los cuales generan un idéntico valor del coeficiente de fricción f en el mismo diámetro D de la tubería considerada en régimen turbulento.

Así, de este modo, la curva (4), para granulometría no uniforme resulta muy distinta y bien separada de la curva (3), correspondiente a tuberías con grano uniforme.

Si un fluido se mueve a través de una tubería a presión, y se diese el caso de que la sub-capa laminar δ' resultara ser superior a la rugosidad de las paredes, y luego por efecto de la aceleración del movimiento, δ' disminuye sucesivamente, entonces los granos de arena se irán descubriendo de dos maneras distintas según los siguientes tipos de recubrimiento con granos de arena:

Uniforme

Si la subcapa laminar tiene una disminución del nivel en la línea superior que une los puntos de tangencia del diámetro K de los granos de arena, se producirá el descubrimiento total de los bordes de manera simultánea (Ilustración 143).

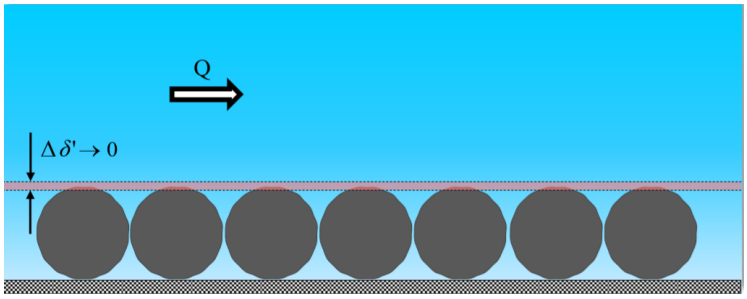


Ilustración 143. Variación de la subcapa laminar en tubería revestida con arena uniforme.

No Uniforme

En este caso, al ser granulometría no uniforme, los diámetros de los granos de arena son distintos, por lo tanto, una disminución progresiva de la subcapa laminar descubrirá primero a las partículas de mayor diámetro y así sucesivamente hasta descubrir a las de menor diámetro en su totalidad (Ilustración 144).

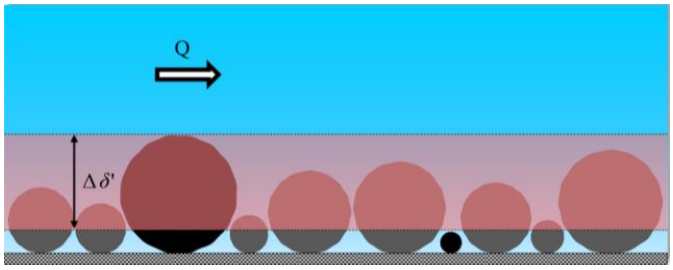


Ilustración 144. Variación de la subcapa laminar en tubería revestida con arena no uniforme.

a) Tuberías comerciales.

Las fuertes diferencias verificadas a través de los experimentos sobre los flujos en tuberías de rugosidad artificial con granos de arena uniforme y no uniforme condujeron a *Colebrook* y *White* a seguir estudiando el movimiento sobre la zona semi-rugosa.

Debido a que en la práctica real relacionadas con las instalaciones hidráulicas a presión, la circulación de fluidos no se realizan a través de tuberías con rugosidades obtenidas artificialmente, sino con tuberías cuya rugosidad son producto de fabricación de la propia industria, dependiendo del material y de la calidad obtenida en el proceso de ejecución (Ilustración 145), *Colebrook* y *White* optaron por investigar sobre esas conducciones directamente sin alterar la rugosidad de sus paredes interiores.

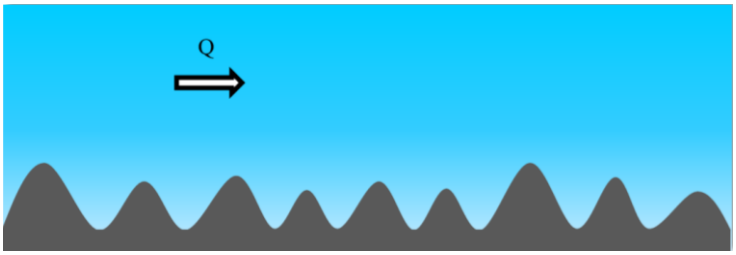


Ilustración 145. Rugosidad en una tubería comercial.

La gran variedad de tuberías comerciales de uso común permite su fabricación con distintos materiales, tales como fundición, PVC (policloruro de vinilo), PE (polietileno), hormigón, fibrocemento (actualmente en desuso), PRFV (polietileno reforzado con fibra de vidrio), etc. Para evaluar su funcionamiento hidráulico se

utiliza el concepto de rugosidad equivalente de arena uniforme, que se determina de la siguiente manera:

1. Se determina la pérdida de energía J para un determinado diámetro, longitud, caudal y material, luego se despeja de la fórmula general de *Darcy-Weisbach* el factor de fricción f:

   $$J = f\,\frac{L}{D}\,\frac{V^2}{2g} \;\rightarrow\; f = \frac{J\,D\,2g}{L\,V^2}$$

   La velocidad es consecuencia del caudal→ Q = V S → V=Q/S

2. Se calcula la rugosidad de varios tubos que tengan igual diámetro, longitud y caudal con distintos granos de arena uniforme incrustados y se calcula la pérdida de energía de cada uno de ellos hasta conseguir que genere la misma pérdida de energía del tubo que se está estudiando.

3. El grano de arena con rugosidad K que iguale la pérdida de energía del tubo que se está estudiando, será la rugosidad equivalente para el material de la tubería en cuestión.

En la (Ilustración 142) la curva (5) representa particularmente a los diversos tipos de materiales, en donde se observa que está no coincide ni con la curva (3) de granos de arena uniforme, ni con la (4) de arena no uniforme, quedando entre medias de estas dos.

Esta situación se interpreta como que la rugosidad natural de las tuberías comerciales no resulta ser tan uniforme como la de las arenas experimentadas por *Nikuradse*, ni tan irregulares como las arenas estudiadas por los investigadores *Colebrook* y *White*.

La distribución de puntos de la curva (5) no responde a una ley bien definida por la existencia de una abundante dispersión de valores, por lo que *Colebrook* y *White* aportaron una aproximación a través de una ecuación semi-empírica, que abarca

una gran cantidad de diversos materiales, la cual concuerdan tolerablemente con los ensayos que realizaron (Educativo, 2017).

La ecuación de *White-Colebrook* se deduce de las ecuaciones de resistencia de *Von Kármán-Prandtl* (Ecuación 444) y (Ecuación 450):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log\left(Re\sqrt{f}\right) - 0,80 \text{ para tuberías lisas}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log\left(\frac{D}{K}\right) + 1,14 \text{ para tuberías rugosas}$$

Para ello se hacen las siguientes operaciones:

Tuberías lisas

Se realizan las siguientes operaciones

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log\left(Re\sqrt{f}\right) - 0,80 + 1,94 - 1,94 = 2\log\left(Re\sqrt{f}\right) + 1,14 - 1,94$$

$$2\log X = 1,94 --> \log X = \frac{1,94}{2} = 0,97 --> X = 10^{0,97} = 9,35$$

Sustituyendo en la fórmula y operando se tiene:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1,14 + 2\log\left(Re\sqrt{f}\right) - 2\log 9,33 = 1,14 - \left(2\log 9,35 - 2\log\left(Re\sqrt{f}\right)\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1,14 + 2\log\left(Re\sqrt{f}\right) - 2\log 9,35 = 1,14 - \left(2\log 9,35 - 2\log\left(Re\sqrt{f}\right)\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1,14 - 2\log\frac{9,33}{Re\sqrt{f}} \quad \textbf{Ecuación 468}$$

Tuberías rugosas

En tuberías rugosas (Ecuación 450):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log\left(\frac{K}{D}\right) + 1{,}14 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{f}} = 1{,}14 - 2\log\left(\frac{K}{D}\right)$$

White y *Colebrook* combinaron las ecuaciones (Ecuación 444) transformada y la (Ecuación 468) para obtener una expresión especifica que se corresponde con la zona de transición lisa-rugosa en tuberías comerciales:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1{,}14 - 2\log\left(\frac{K}{D} + \frac{9{,}35}{Re\sqrt{f}}\right)$$ **Ecuación 469**

La ecuación de *Colebrook* y *White* (Ecuación 469) se ajusta satisfactoriamente con la curva (5) del gráfico de la (Ilustración 142), independientemente del material utilizado, y esta corroborada con los ensayos efectuados sobre una variada cantidad de tuberías.

Es importante destacar que el rango de influencia simultánea de la viscosidad y la rugosidad en las tuberías comerciales se ha incrementado sustancialmente respecto a las tuberías revestidas con grano de arena uniforme, quedando la zona de transición o semirrugosa entre los siguientes límites:

$$0{,}015 < K/\delta' < 6{,}10 \quad \text{o bien} \quad 0{,}5 < \frac{Re\sqrt{f}}{D/K} < 200$$

El límite superior de K/δ' se ha mantenido constante, mientras que el inferior se ha modificado, disminuyendo de 0,25 a 0.015.

La siguiente Tabla 132, resume las fórmulas para calcular el coeficiente de fricción f según el tipo de régimen y comportamiento hidráulico de la superficie de las conducciones:

RÉGIMEN	Comportamiento hidraulico de la SUPERFICIE	Nº REYNOLDS Re	AUTOR	FÓRMULA
LAMINAR	Sin limitación	$Re \leq 2.000$	**Hagen-Poiseuille**	$f = \frac{64}{Re}$
TURBULENTO	Lisa	$Re > 4.000$	**Von Kármán-Prandtl**	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log\left(Re\sqrt{f}\right) - 0,80$
	Rugosa	$Re > 30.000$ En la practica se considera este valor	**Von Kármán-Prandtl**	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log\left(\frac{D}{K}\right) + 1,14$
	Transicion lisa-rugosa	$2.000 < Re < 4.000$	**Colebrook-White**	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1,14 - 2\log\left(\frac{K}{D} + \frac{9,35}{Re\sqrt{f}}\right)$

Tabla 132. Cuadro sinóptico resumen de las fórmulas de fricción f.

A continuación, y basado en los experimentos de *Colebrook* y *White* se expone la siguiente Tabla 133 tabla de rugosidades medias:

MATERIAL	RUGOSIDAD k (m)	RUGOSIDAD k (mm)
ACERO LAMINADO.	0,000100	0,1000
ACERO REVESTIDO CON MATERIAL EPOXI.	0,000100	0,1000
ACERO ROBLONADO.	0,002000	2,0000
ACERO SOLDADO.	0,000600	0,6000
ALUMINIO.	0,000040	0,0400
ASBESTO CEMENTO	0,000030	0,0300
ASBESTO CEMENTO REVESTIDO CON ASFALTO.	0,000002	0,0020
COBRE.	0,000150	0,1500
ERFV EPOXI-PLASTICO REFORZADO CON FIBRA DE VIDRIO.	0,000005	0,0050
FUNDICIÓN.	0,000350	0,3500
FUNDICIÓN REVESTIDA CON ASFALTO.	0,000120	0,1200
HIERRO DÚCTIL REVESTIDO CON MORTERO.	0,000100	0,1000
HIERRO FORJADO.	0,000075	0,0750
HIERRO GALVANIZADO.	0,000150	0,1500
HORMIGÓN.	0,001200	1,2000
HORMIGÓN CENTRIFUGADO	0,000160	0,1600
HORMIGÓN CON MOLDE METÁLICO (mínimo).	0,000300	0,3000
HORMIGÓN CON MOLDE METÁLICO (máximo).	0,000500	0,5000
LATÓN.	0,000150	0,1500
MADERA (mínimo).	0,000183	0,1830
MADERA (máximo).	0,000910	0,9100
MAMPOSTERIA DE PIEDRA.	0,002000	2,0000
PLOMO.	0,000080	0,0800
POLIETILENO.	0,000003	0,0030
PRFV POLIESTER-PLASTICO REFORZADO CON FIBRA DE VIDRIO (mínimo).	0,000050	0,0500
PRFV POLIESTER-PLASTICO REFORZADO CON FIBRA DE VIDRIO (máximo).	0,000100	0,1000
PVC POLICLORURO DE VINILO.	0,000007	0,0070
VIDRIO.	0,000001	0,0010

Tabla 133. Rugosidad media aproximada según el material de las tuberías.

A partir de entonces el desarrollo científico en ese sentido se ha decantado hacia fórmulas más explícitas la ecuación de *Colebrook*, siendo las ecuaciones más representativas en este sentido las fórmulas de *Swamee-Jain* (1976), *Churchill* (1977) y *Haaland* (1983).

A continuación, se exponen las fórmulas más representativas que han explicitado la ecuación de *Colebrook* para facilitar el cálculo del coeficiente de fricción f y los límites en los que son válidas en función del número de Reynolds:

Fórmula de Altshult (1968)

(1) $$f = 0{,}11 \times \left[\left(K/D \right) + \left(68/\mathrm{Re} \right) \right]^{1/4}$$ **Ecuación 470**

(2) $$f = \left[-1{,}8 \log \left[\frac{\mathrm{Re}}{0{,}35\,\mathrm{Re}\left(K/D \right) + 6{,}5} \right] \right]^{2}$$ **Ecuación 471**

$$4 \times 10^{4} \leq \mathrm{Re} \leq 1 \times 10^{8}$$

$$1 \times 10^{-6} \leq \mathrm{K}/\mathrm{D} \leq 5 \times 10^{-2}$$

Fórmula de Churchill (1973)

Ecuación 472

$$f = 8 \times \left[\left(\frac{8}{\mathrm{Re}} \right)^{12} + \left(\left(2{,}457 \ln \frac{1}{\left(7/\mathrm{Re} \right)^{0{,}9} + 0{,}27\left(\mathrm{K}/\mathrm{D} \right)} \right)^{16} + \left(\frac{37530}{\mathrm{Re}} \right)^{16} \right)^{-3/2} \right]^{1/12}$$

Sus límites de validez en función del número de *Reynolds* son:

$$4 \times 10^{3} \leq \mathrm{Re} \leq 1 \times 10^{8}$$

$$1 \times 10^{-6} \leq \mathrm{K}/\mathrm{D} \leq 5 \times 10^{-2}$$

Fórmula de P. K Swamee y A.K. Jain (1976)

$$f = \left[2\log\left(\frac{\left(K/D\right)}{3,7} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) \right]^{2}$$ **Ecuación 473**

Sus límites de validez en función del número de *Reynolds* son:

$5\times10^{3} \leq Re \leq 1\times10^{8}$

$1\times10^{-6} \leq K/D \leq 1\times10^{-3}$

Fórmula de N. H Chen (1979)

$$f = \left[-2\log\left[\frac{\left(K/D\right)}{3,7065} - \frac{5,0452}{Re}\log\left(\frac{\left(K/D\right)^{1,1098}}{2,8257} + 5,8506\,Re^{-0,8981} \right) \right] \right]^{-2}$$ **Ecuación 474**

Sus límites de validez en función del número de *Reynolds* son:

$4\times10^{3} \leq Re \leq 1\times10^{8}$

$1\times10^{-6} \leq K/D \leq 5\times10^{-2}$

Fórmula de G. F Round (1980)

$$f = \left(1,8\times\log\left[0,27\left(K/D\right) + \left(6,5/Re\right) \right] \right)^{-2}$$ **Ecuación 475**

Fórmula de M. Shacham (1980)

$$f = \left(-2\log\left[\frac{\left(K/D\right)}{3,7} - \frac{5,02}{Re}\log\left(\frac{\left(K/D\right)}{3,7} + \frac{14,5}{Re} \right) \right] \right)^{-2}$$ **Ecuación 476**

Sus límites de validez en función del número de *Reynolds* son:

$$4\times10^{3} \le \mathrm{Re} \le 1\times10^{8}$$

$$1\times10^{-6} \le K/D \le 5\times10^{-2}$$

Fórmula de D. I. Barr (1981)

$$f=\left(-2\log\left[\frac{(K/D)}{3,7}-\frac{4,518\log(\mathrm{Re}/7)}{\mathrm{Re}(1+0,0345\mathrm{Re}^{0,52}(K/D)^{0,7}}\right]\right)^{-2}$$ **Ecuación 477**

Fórmula de D. Pavlov (1981)

$$f=\left(-2\log\left[\frac{(K/D)}{3,7}-\left(\frac{6,81}{\mathrm{Re}}\right)^{0,9}\right]\right)^{-2}$$ **Ecuación 478**

Sus límites de validez en función del número de *Reynolds* son:

$$4\times10^{3} \le \mathrm{Re} \le 1\times10^{8}$$

Fórmula de D. J. Zigrang y N.D. Sylvester (1982)

Ecuación 479

$$f=\left[-2\log\left[\frac{(K/D)}{3,7}-\frac{5,02}{\mathrm{Re}}\log\left(\frac{(K/D)^{1,1098}}{3,7}-\frac{5,02}{\mathrm{Re}}\log\left(\frac{(K/D)}{3,7}-\frac{13}{\mathrm{Re}}\right)\right)\right]\right]^{-2}$$

Fórmula de S. E. Haaland (1983)

$$f=\left(-1,8\log\left[\left(\frac{(K/D)}{3,7}\right)^{1,1}-\frac{6,9}{\mathrm{Re}}\right]\right)^{-2}$$ **Ecuación 480**

Sus límites de validez en función del número de *Reynolds* son:

$$4\times10^{3} \le \mathrm{Re} \le 1\times10^{8}$$

$$1\times10^{-6} \le K/D \le 5\times10^{-2}$$

Fórmula de J. O. Guerrero Angulo (1995)

$$f = \left(-2\log\left[\frac{\left(K/D\right)}{3,71} - \frac{G}{Re^{T}} \right] \right)^{-2}$$ **Ecuación 481**

Sus límites de validez en función del número de *Reynolds* son:

Si $4\times10^{3} \leq Re \leq 1\times10^{5}$ → G = 4,555 y T = 0,8764

Si $1\times10^{5} \leq Re \leq 3\times10^{6}$ → G = 6,732 y T = 0,9104

Si $3\times10^{6} \leq Re \leq 3\times10^{8}$ → G = 8,982 y T = 0,9300

Fórmula de Manadilli (1997)

$$f = \left[-2\log\left(\frac{\left(K/D\right)}{3,7} + \frac{95}{Re^{0,983}} - \frac{96,82}{Re} \right) \right]^{-2}$$ **Ecuación 482**

Sus límites de validez en función del número de *Reynolds* son:

$5235\times10^{3} \leq Re \leq 1\times109$

Fórmula de Avci y Kagaroz (2009)

$$f=6,4\left(\ln Re - \ln\left[1+0,01Re\left(K/D\right)\left(1+10\left(K/D\right)^{1/2}\right) \right] \right)^{-2,4}$$ **Ecuación 483**

Las ecuaciones anteriores se han deducido a base de aproximaciones y regresiones de valores calculados a partir de métodos implícitos (*Newton*, *Raphson*, *Fourier*, etc), a excepción de las ecuaciones de *Avci* y *Kagaroz*, la cual ha sido desarrollada en base a datos obtenidos experimentalmente.

ESTUDIO DE LA ZONA CRITICA

La zona crítica corresponde al rango de trabajo de las tuberías a presión donde los valores del número de *Reynolds* están comprendidos dentro del siguiente intervalo:

2000<Re<4-5.000

En el límite superior se tiene lo siguiente:

Si Re = 4.000 → La tubería funciona hidráulicamente como lisa.

Si Re = 5.000 → La rugosidad relativa de la tubería es k/D = 0,05 → D/k = 20

La línea que define con más precisión la determinación superior para Re=5.000, cumple con la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -5,82 \log\left(Re\sqrt{f}\right) + 21,89$$ **Ecuación 484**

En la zona de transición no es fácil predecir qué tipo de régimen se puede alcanzar, si el laminar o el turbulento, debido a su inestabilidad, ya que las causas pueden ser diversas.

En la circulación del agua, al pasar de régimen laminar a turbulento, se produce un proceso gradual con alteraciones y agitaciones del movimiento sobre el eje de la tubería y su contorno, debido a que en ese sector se establecen las mayores velocidades, pero manteniéndose en principio una corona circular con régimen laminar entre las paredes del tubo y la región central turbulenta.

Esta corona circular irá disminuyendo a medida que la velocidad media U aumenta, hasta desaparecer totalmente cuando se llegue a la turbulencia total.

Con especial cuidado en instalaciones se puede obtener el régimen laminar con valores del número de *Reynolds* muy superiores a $Re_{CRITICO}$ = 2.000, pero se puede modificar ante la acción de una perturbación de tipo vibratorio (incluso pudiendo ser acústico), pasando a ser de tipo turbulento.

Dentro de la zona crítica, y para los números de *Reynolds* levemente mayores a 2.000, el movimiento del fluido se caracteriza por periodos cortos de régimen laminar seguidos alternativamente con régimen turbulento, plasmándose la transición de forma progresiva.

Al fenómeno descrito en el párrafo anterior se le denomina <u>intermitencia</u>.

A continuación, se describe el funcionamiento de una instalación para describir de una forma analítica este fenómeno:

La instalación consiste en una tubería cilíndrica, de diámetro pequeño y conectada a un depósito con un líquido a nivel constante que descarga libremente al ambiente (Ilustración 146). La pérdida de energía localizada por la embocadura se desprecia (empalme depósito-tubería es abocinado).

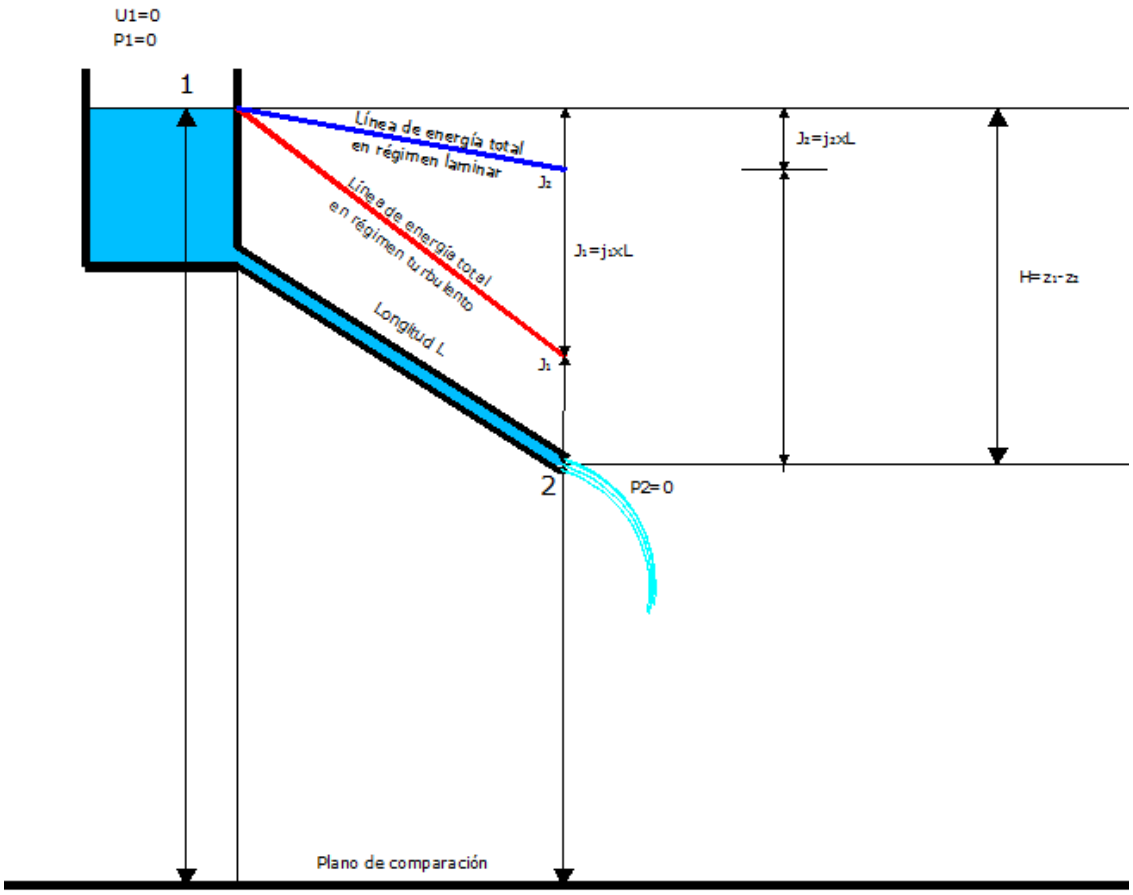


Ilustración 146. Fenómeno de intermitencia.

El desnivel constante H entre el nivel libre de la superficie libre del depósito (punto 1) y la salida del líquido de la tubería (punto 2) se transforma dividiéndose proporcionalmente en dos partes:

Pérdida de energía total $\mathbf{J}_g$ a lo largo de la tubería, que, por tratarse en este caso de un tubo cilíndrico, resulta ser numéricamente igual a la pérdida de carga J.

Energía cinética en la desembocadura $\alpha \frac{V^2}{2g}$

Por lo tanto: $H = J_g + \alpha \frac{U^2}{2g} = cte$ **Ecuación 485**,

O bien

$H = j_g\ L + \alpha \frac{U^2}{2g} = cte$ **Ecuación 486**

Turbulento

- Se supone que el análisis se efectúa en un determinado instante en el cual circulación corresponde a un régimen de tipo turbulento.
- Según la ecuación de *Darcy-Weisbach*, la pérdida de energía $J_1 = j_1\ L$ es proporcional al cuadrado de la velocidad media (U^2) y es de mayor valor que si se tratara de un régimen laminar.

  $J_1 = j_1\ L = \frac{f}{D} \frac{U^2}{2g}$ **Ecuación 487**

- Ante el aumento de la pérdida de energía $J_1 = j_1\ L$, la velocidad media U_1 debe disminuir, para que se cumpla la condición de que el desnivel H permanece constante (H= cte) según la **Por lo tanto:** $H = J_g + \alpha \frac{U^2}{2g} = cte$ Ecuación 485**,**.
- El menor valor que adquiere la velocidad media U_1 hace que se reduzca en consecuencia el número de *Reynolds* Re.
- $R_e = \frac{U \times D}{\nu}$ → Si la velocidad media U disminuye, entonces R_e disminuye.
- Esa disminución que sufre el número de *Reynolds* R_e, hace que el régimen, originalmente turbulento, pase a ser laminar.

Laminar

- Según el último apartado anterior, se concluyó que el régimen en ese instante es laminar debido a la transformación turbulento-laminar ocurrida en la descripción descrita.
- En la condición establecida de régimen laminar, la pérdida de energía pasa a ser proporcional a la primera potencia de la velocidad media U_1 según la ecuación de *Hangen-Poiseuille* (Ecuación 307), y por ese efecto se reduce su magnitud a J_2.

  $$J = 32 \frac{\mu\, U\, L}{\gamma\, D^2}$$

  Para mantener la condición indicada por la (Ecuación 307), la reducción de la pérdida de energía se compensa con un incremento de la velocidad media desde U_1 a U_2.
- Ese incremento de velocidad produce un aumento en el número de *Reynolds* Re, provocando que el régimen, anteriormente de tipo laminar, se modifique nuevamente pasando a ser turbulento.

Este fenómeno de cambios de régimen continúa indefinidamente, repitiéndose el proceso de forma intermitente.

Esta intermitencia causa inestabilidad en las instalaciones, por lo que es aconsejable que los proyectistas, en sus diseños y cálculos, eviten que el diseño hidráulico este comprendido dentro de la denominada zona crítica (2.000 < Re < 4-5.000).

5.2.12 Los diagramas universales de Rouse y Moody.

Blasius en 1913 fue el primero en representar los valores del coeficiente de fricción f en función del número de *Reynolds* en un diagrama doble logarítmico para el cálculo en tuberías lisas (Ilustración 147), producto de un análisis de las mediciones de resistencia realizadas por los investigadores *Saph* y *Schoder*. Estos resultados quedaron representados por la siguiente formula empírica, válida hasta Re=100.000:

$$f = 0{,}316/R_e^{0{,}25}$$ Ecuación 488

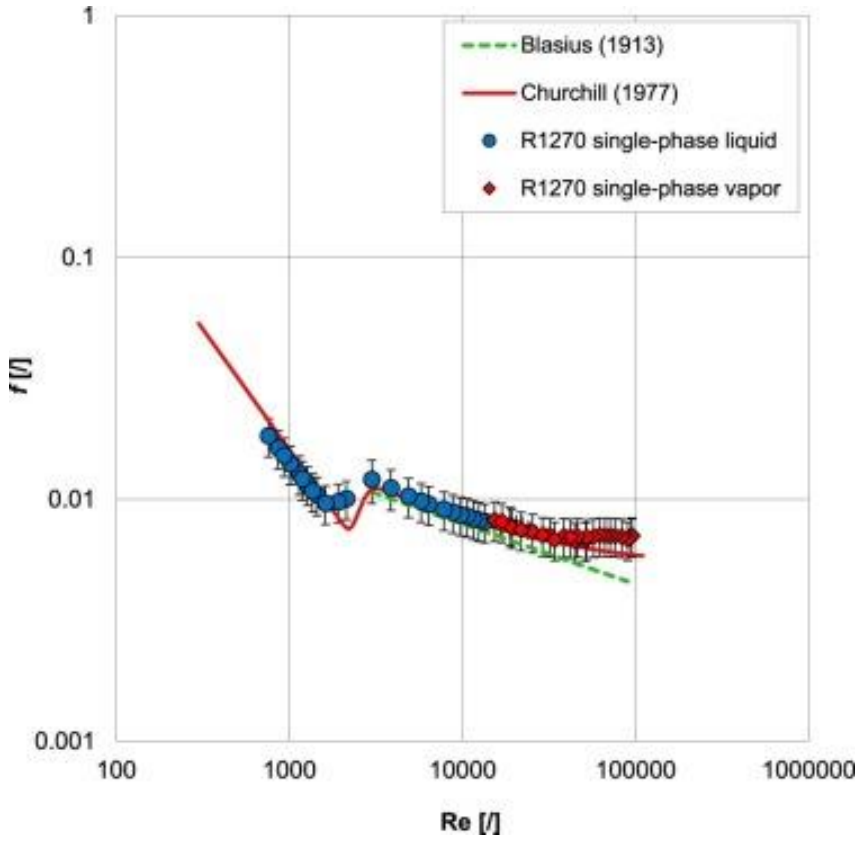


Ilustración 147. Diagrama de Blasius y Churchill.

Stanton en 1914 realizó idénticos diagramas para plasmar los resultados de experimentos realizados con tubos lisos, de hierro fundido limpio y acero liso. A esta forma de representar los valores de f en función del número de *Reynolds* Re se le conoce desde entonces como diagrama de *Stanton* (Tweedie, 2007).

Blasius y *Stanton* despejaron el camino para posibilitar un análisis más racional de las pérdidas de carga en tuberías, ya que resolvieron parte del dilema para determinadas condiciones de las paredes interiores de las tuberías.

Para deducir el coeficiente de fricción f integrado en la fórmula de *Darcy-Weisbach* para régimen turbulento se debe recurrir necesariamente a las siguientes ecuaciones de resistencia, según sea el caso:

- Tuberías lisas → Ecuación 440 de *Von Kármán-Prandtl*.
- Tuberías rugosas → Ecuación 446 de *Von Kármán-Prandtl*.
- Tuberías transición lisa-rugosa → Ecuación 466 de *Colebrook-White*.

Dado el carácter implícito de estas ecuaciones, no era sencillo ni práctico en aquella época el cálculo analítico del coeficiente de fricción f.

Para dar una solución viable al problema, y basándose en la idea de *Blasius* y *Stanton*, los estadounidenses *Hunter Rouse* y *Lewis Ferry Moody* volcaron las ecuaciones mencionadas en los diagramas que llevan su nombre.

Ambos diagramas tienen una estructura básica similar para abordar los problemas de las corrientes a presión:

En ambos casos se ha añadido la ecuación que representa el coeficiente de rugosidad en régimen laminar $f = 64/Re$ (resultante de compatibilizar la fórmula de *Hagen-Poiseuille* (Ecuación 307) con la de *Darcy Weisbach* (Ecuación 250).

En ambos casos está indicada la línea que separa la zona de comportamiento hidráulico como tubería rugosa de la transición lisa-rugosa:

$$\frac{Re\sqrt{f}}{D/K} = 200 \quad \textbf{Ecuación 489}$$

Los diagramas hacen posible efectuar un adecuado cálculo hidráulico de tuberías en base al denominado criterio racional basado en el análisis mediante la utilización de fórmulas empíricas.

Las variables que involucran el cálculo mediante diagramas, en cualquiera de ambas opciones son:

- J = Pérdida de carga total.
- Q = Gasto o caudal.
- D = Diámetro.
- L = Longitud.
- ν = Viscosidad cinemática.
- K = Rugosidad.

Para la resolución de los problemas, se deberá complementar el diagrama universal con los siguientes fundamentos como herramientas del cálculo:

- Ecuación de continuidad.
- Fórmula de *Darcy-Weisbach*.

5.2.12.1 Thomas Ernest Stanton (1865-1931)

Biografía sucinta

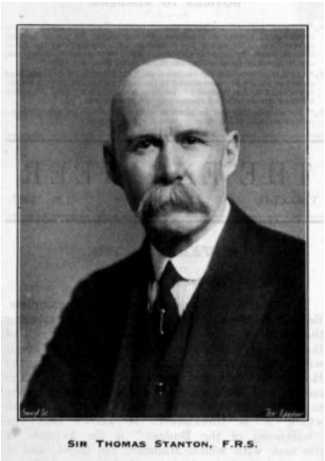


Ilustración 148. Retrato de Thomas Ernest Stanton.

Nació en *Atherstone*, *Warwickshire* (Gran Bretaña), el 12 de diciembre de 1865, y recibió su educación general en *Atherstone Grammar School*. Después de servir un pupilaje de tres años con los Sres. *Gimson and Company*, ingenieros, *Leicester*, de 1884 a 1887, estudió durante el mismo período en *Owen's College*, *Manchester*, obteniendo el B.Sc. Grado de Ingeniería en 1891. Durante los siguientes cinco años, trabajó como demostrador en el Laboratorio de Ingeniería *Whitworth de Owen's College*, actuando como asistente del profesor *Osborne Reynolds*, y fue sin duda durante este período de su formación que adquirió gran parte de la experiencia habilidad e ingenio que ha caracterizado su carrera. En 1896, cuando el *Dr. Hele-Shaw* requirió un profesor de ingeniería para *University College*, *Liverpool*, el puesto fue ofrecido y aceptado por el Sr. *Stanton*, aunque creemos que el profesor *Osborne Reynolds* se separó de él con considerable renuencia. Permaneció en *Liverpool* hasta 1899, obteniendo su doctorado en 1898, y luego fue nombrado profesor de Ingeniería Civil y Mecánica en el *University College*, *Bristol*, permaneciendo allí hasta que fue nombrado superintendente del Departamento de Ingeniería del Laboratorio Nacional de Física, cuando se inauguró en 1901. Su principal contribución es su artículo de 1914 con *J.R. Pannell* "Relaciones de similitud de movimiento en relación con la fricción superficial de fluidos. *Staton*

recibió numerosos premios. Se convirtió en miembro de la *Royal Society* en 1914. Fue nombrado caballero en 1928. Se ahogó en el mar cerca de *Pervensey Bay* (*Eastbourne*) en 1931 (Tweedie, 2007).

5.2.12.2 Hunter Rouse (1906-1996)

Biografía sucinta

Ilustración 149. Retrato de Hunter Rouse.

Nació en Toledo – *Ohio* Estados Unidos, *Warwickshire*, el 29 de marzo de 1906. El Dr. *Hunter Rouse* desempeñó un importante papel internacional en el desarrollo de la ingeniería hidráulica desde 1929. Estuvo a la vanguardia de la evolución de la ingeniería hidráulica, en gran medida de un arte en el que la experiencia e intuición fueron sus principales herramientas, para una presisa disciplina formulada. Dirigió el trabajo pionero sobre problemas tan diversos como cavitación, convección, rugosidad, flujo en canales abiertos, transporte de sedimentos, flujos estratificados por densidad, capas límite, turbulencia, flujos de cizallamiento de turbulencia libre y difusión turbulenta.

El Dr. *Rouse* se convirtió en miembro de *Chi Epsilon* en 1929 en el MIT, donde fue alumno de honor, editor del periódico estudiantil, ganador de dos premios *Boit* por composición, escritor de teatro para el *Tech Show*, un actor especial para el musical

combinado. clubes, y un miembro de *Tau Beta Pi*. Fue un miembro honorario de ASCE.

El primer libro del Dr. Rouse, "*Fluid Mechanics for Hydraulic Engineers*" (Mecánica de Fluidos para Ingenieros Hidráulicos), publicado en 1938, estaba destinado a desempeñar un papel importante en el avance de la ciencia de la Hidráulica en los Estados Unidos. Su segundo libro fue Mecánica Elemental de Fluidos (con Joseph W. Howe). En 1950, Ingeniería Hidráulica apareció bajo su dirección como los procedimientos de la Cuarta Conferencia de Hidráulica de *Iowa* (el precursor de las Conferencias de Especialidades de la División de Hidráulica de la ASCE). "*History of Hydraulics*" (Historia de la Hidráulica.), en coautoría con *Simon Ince*, se publicó primero como suplemento bilingüe de La *Houille Blanche*, y luego en forma de libro en 1957. "*Advanced Mechanics of Fluids*" (Mecánica Avanzada de Fluidos), editado por Rouse, apareció en 1959.

Hunter Rouse aceptó el decanato de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de *Iowa* en 1966, puesto que ocupó hasta que se retiró en 1972. Los honores recibidos por el Dr. *Rouse* incluyen: la Medalla Normanda ASCE (1938); el premio ASCE Karl Emil Hilgard (1951 y 1961); el Premio ASEE *George Westinghouse* (1948); el Premio ASEE Vincent Bendix (1958); el Premio ASCE Theodore von Karman (1963); y el Premio de Historia y Patrimonio de la ASCE (1980). Fue elegido miembro de la Academia Estadounidense de las Artes y las Ciencias en 1958 y miembro de la Academia Nacional de Ingeniería en 1966. Además, en 1966 fue seleccionado de cinco en la primera Conferencia Conmemorativa John R. Freeman y en 1967 fue elegido miembro honorario de la Sociedad Americana de ingenieros mecánicos. En 1975, ganó el primer Premio de Hidráulica de *Freeman* de la Sociedad de Ingenieros Civiles de *Boston* por el manuscrito de este libro Hidráulica en los Estados Unidos, 1876-1976.

En 1979, la Conferencia de Ingeniería Hidráulica de *Hunter Rouse* fue establecida por ASCE para reconocer a otros que han hecho contribuciones significativas y

continuas a la ingeniería hidráulica. *Hunter Rouse* tuvo un impacto sin igual en el entrenamiento de generaciones de ingenieros hidráulicos.

El Dr. *Rouse* fue elegido por primera vez en *Chi Epsilon* como estudiante de pregrado el 19 de mayo de 1928, en el MIT, capítulo no. 9, constituida en 1928, con un número general de 586 y en número de capítulo individual de 10. Fue elevado como el 44º Miembro Nacional de Honor en el Estado de *Arizona*, *Tempe*, *Arizona* el 9 de noviembre de 1985, durante las ceremonias de instalación de *Arizona State*. Falleció el 16 de octubre de 1996 en *Sun City*, *Arizona*, Estados Unidos (Epsilon, 2017).

Aporte y desarrollo de sus investigaciones

Rouse integró en un solo gráfico las fórmulas que constituyen la resistencia a la circulación de un fluido en régimen turbulento representada por las ecuaciones Ecuación 444), (Ecuación 450), (Ecuación 469) y en régimen laminar representada por la ecuación (Ecuación 333). Rouse ajustó el diagrama que anteriormente había elaborado Nikuradse con los resultados arrojados por las experiencias a partir de rugosidades generadas artificialmente con granos de arena adheridos a las paredes de las tuberías. Lo desarrolló en el año 1942 y se publicó al año siguiente mediante un informe de la Universidad de *Iowa-EE. UU*.

El diagrama de *Rouse* está diseñado de la siguiente manera:

Los ejes principales están compuestos por:

Abscisa: $R_e\sqrt{f}$

Escala: logarítmica

Sentido positivo: De izquierda a derecha.

Ordenada: $\frac{1}{\sqrt{f}}$

Escala: logarítmica

Sentido positivo: De arriba a abajo.

Los ejes complementarios están constituidos por:

Abscisa: R_e

Escala: logarítmica

Sentido positivo: De izquierda a derecha.

Ordenada: f

Escala: logarítmica

Sentido positivo: De arriba a abajo.

La (Ecuación 450) de *Von Kárman-Prandtl*, correspondiente a tuberías hidrodinámicamente rugosas, se representan a través de un conjunto de líneas en función de la inversa de la rugosidad relativa D/K, para distintos valores de esta, oscilantes entre:

$20 < D/K < 200.000$

El diagrama de *Rouse* permite resolver los siguientes casos particulares:

Zona crítica.

Basándose en las hipótesis que parten de las experiencias de *Nikuradse*, puede resolver analíticamente el problema hidráulico, aunque con las limitaciones con las que están realizadas, ya que suponen una rugosidad uniforme, alejada de los casos reales.

Tuberías con secciones de forma distinta a las circulares.

Teniendo en cuenta el concepto de radio hidráulico y ciertas consideraciones restrictivas, permite el cálculo de tuberías de diferentes secciones.

A continuación, en la (Ilustración 150) se muestra el diagrama de *Rouse*:

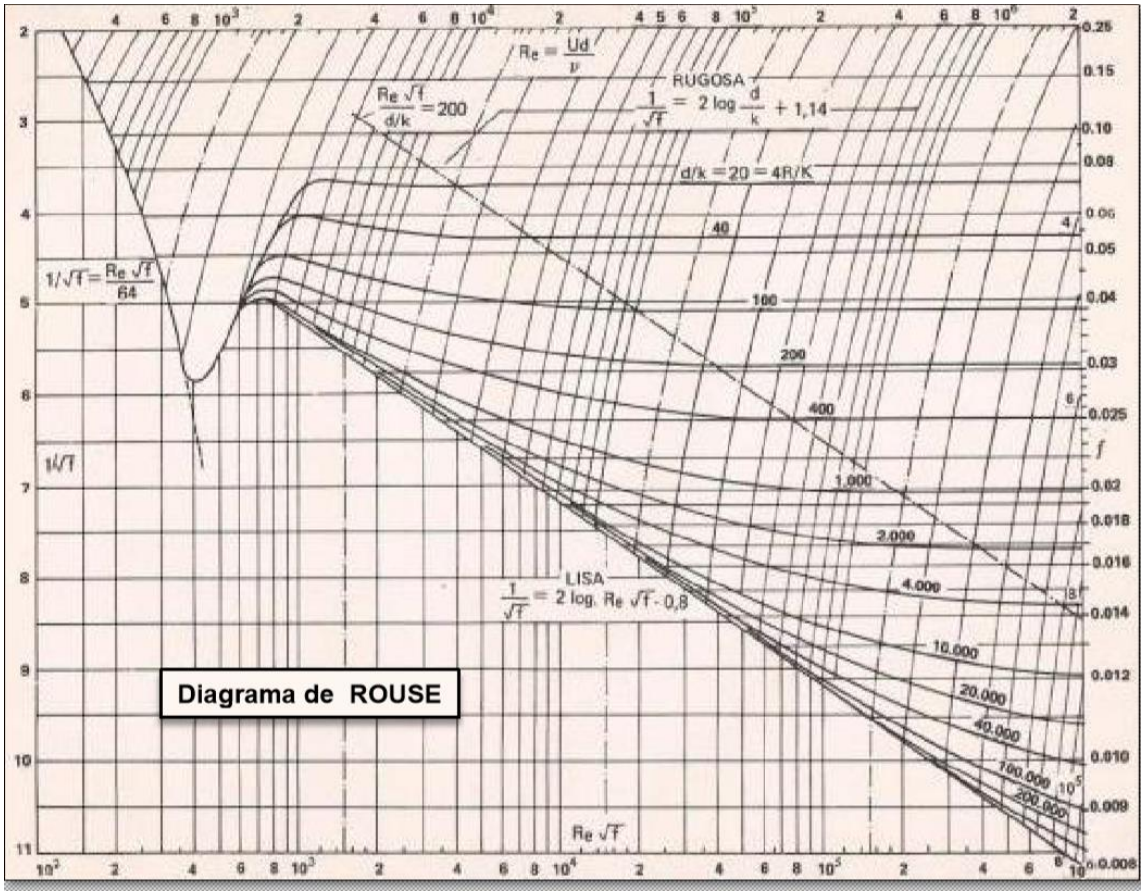


Ilustración 150. Diagrama de Rouse.

Uso del diagrama de Rouse.

El diagrama de *Rouse* resuelve tres problemas típicos que son la base para resolver otros de más complejidad.

1) <u>Cálculo de la pérdida de energía J</u>

Incógnita: Pérdida de energía J.

Datos: Q, D, L, K, ν

Cálculos previos:

- Velocidad media U.

$$U = \frac{4Q}{\pi D^2}$$

- Número de *Reynolds* Re.

  $$Re=\frac{U\,D}{\nu}$$

- Inversa de la rugosidad relativa.

  Seleccionamos la curva correspondiente a $\frac{D}{K}$

- Coeficiente de fricción f.

  Entrando en el diagrama de *Rouse* con los valores de $\frac{D}{K}$ y Re deducimos f.

Calculo final (resolución directa)

La pérdida de energía J se determina aplicando la expresión de *Darcy – Weisbach*:

$$J=f\,\frac{L}{D}\,\frac{U^2}{2g}$$

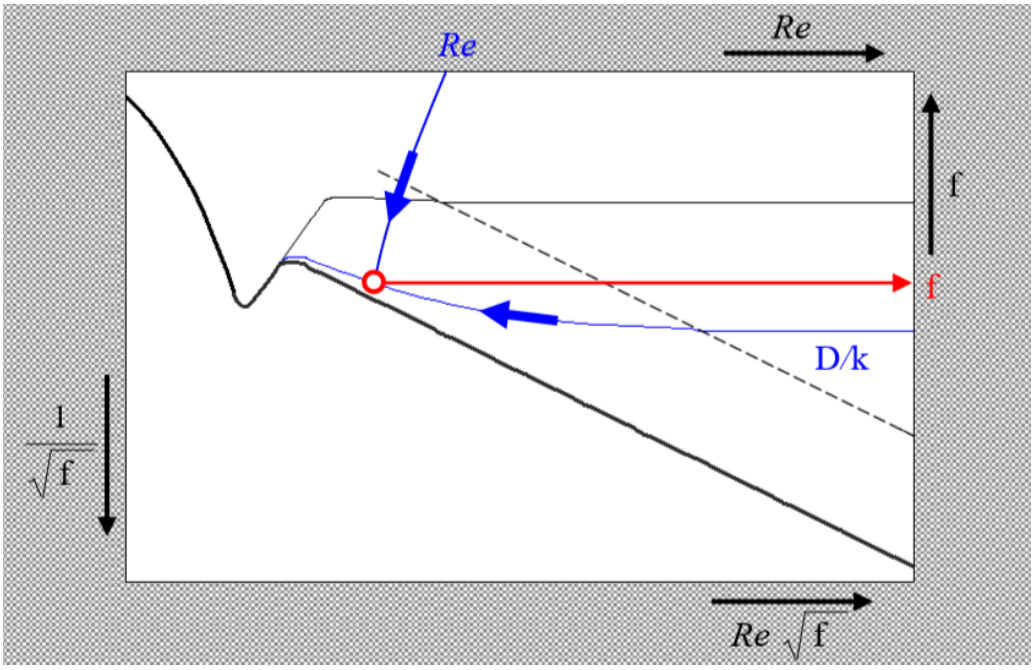


Ilustración 151. Diagrama de Rouse. Cálculo del factor f.

2) Cálculo del caudal Q

Incógnita: Cálculo del caudal Q.

Datos: D, J, L, K, ν

Cálculos previos:

- Producto entre el número de *Reynolds* Re y la raíz cuadrada del coeficiente de fricción.

$$Re\sqrt{f} = \frac{U\,D}{\nu}\sqrt{\frac{J}{L}D\frac{2g}{U^2}} = \frac{D^{3/2}}{\nu}\sqrt{2g\frac{J}{L}}$$ **Ecuación 490**

- Inversa de la rugosidad relativa.

  Seleccionamos la curva correspondiente a $\frac{D}{K}$

- Coeficiente de fricción f.

  Entrando en el diagrama de *Rouse* con los valores de $\frac{D}{K}$ y $Re\sqrt{f}$ deducimos f.

- Velocidad media U.

$$U=\sqrt{\frac{2g\,J\,D}{f\,L}}$$

Calculo final (resolución directa)

El gasto o caudal Q se determina aplicando la ecuación de continuidad:

$$Q = U\frac{\pi\,D^2}{4}$$

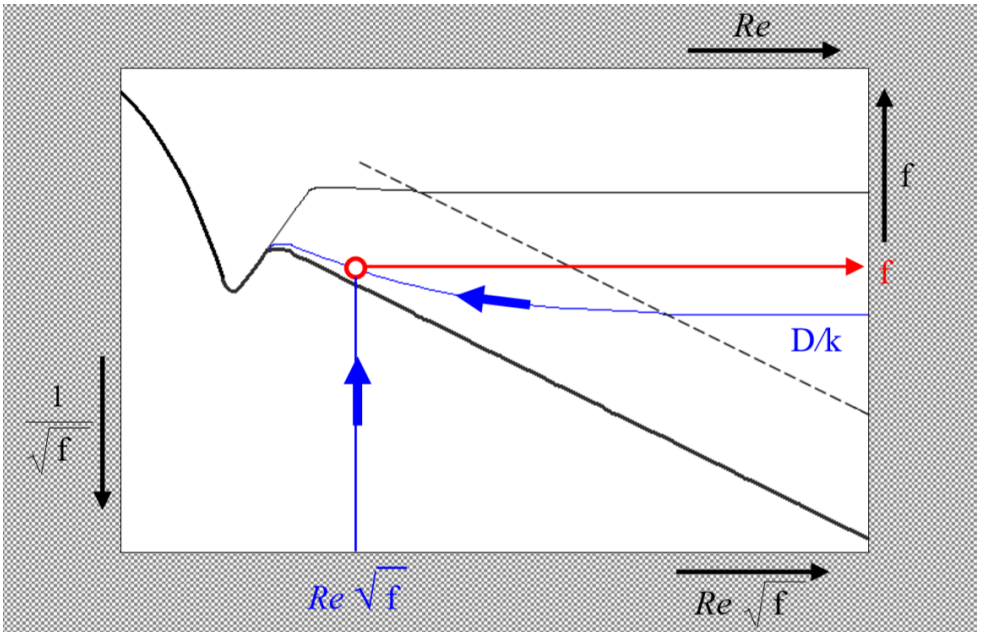


Ilustración 152. Diagrama de Rouse. Coeficiente de fricción en el cálculo del caudal.

3) Cálculo del diámetro D

Incógnita: Diámetro D.

Datos: Q, J, L, K, ν

Cálculos complementarios:

1) Se despeja de la fórmula de *Darcy – Weisbach* el diámetro D a la 5º potencia en función de caudal Q.

$$J=f\frac{L}{D}\frac{U^2}{2g}=f\frac{L}{D}\frac{1}{2g}\frac{16Q^2}{\pi^2D^4}$$, despejando D^5:

$$D^5=Q^2\frac{L}{J}\frac{8}{g\pi^2}f$$ Ecuación 491

a D^5 se le denomina cte.1→ $cte.1=Q^2\frac{L}{J}\frac{8}{g\pi^2}f$ Ecuación 492

$$D^5=cte.1\ f$$ Ecuación 493

2) Número de *Reynolds* Re en función del caudal Q.

$$Re=\frac{U\,D}{\nu}=\frac{4\,Q}{\pi\,D^2}\frac{D}{\nu}=\frac{4\,Q}{\pi\,\nu}\frac{1}{D}$$ **Ecuación 494**

$$cte.2=\frac{4\,Q}{\pi\,\nu}$$ **Ecuación 495**

$$Re=cte.2\frac{1}{D}$$ **Ecuación 496**

Cálculo resolutivo para deducir el diámetro.

Se emplea un procedimiento iterativo mediante la aplicación de aproximaciones sucesivas.

1ª Aproximación

a) Coeficiente de fricción f1.

Se adopta un coeficiente de fricción f1 cualquiera para empezar con la iteración.

El valor recomendable de inicio estará comprendido entre 0,015 y 0,025.

b) diámetro D1.

$$D_1=\sqrt[5]{cte.1\ f_1}$$

c) Número de *Reynolds* Re1

$$Re_1=cte.2\frac{1}{D_1}$$

d) Inversa de la rugosidad relativa $\frac{D_1}{K}$.

e) Coeficiente de fricción f_2.

Entrando en el diagrama de *Rouse* con los valores de $\frac{D_1}{K}$ y Re_1 deducimos f_2.

f) Verificación:

Si $f_1 \approx f_2 \rightarrow D \approx D_1$

Si $f_1 \neq f_2 \rightarrow$ Se continúa con una segunda aproximación.

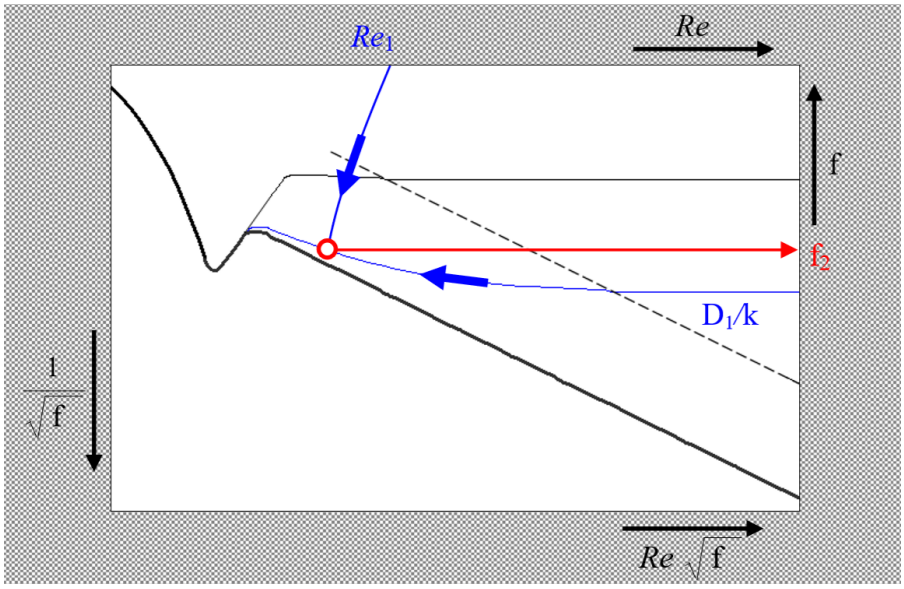


Ilustración 153. Diagrama de Rouse. Coeficiente en el cálculo del diámetro.

2ª Aproximación

a) Coeficiente de fricción f_1.

Se adopta un coeficiente de fricción f_2 determinado en la iteración de la 1ª aproximación.

b) Diámetro D_2.

$$D_2 = \sqrt[5]{cte.1\ f_2}$$

c) Número de *Reynolds* Re_1

$$Re_2 = cte.2 \frac{1}{D_2}$$

d) Inversa de la rugosidad relativa $\frac{D_2}{K}$.

e) Coeficiente de fricción f_3.

Entrando en el diagrama de *Rouse* con los valores de $\frac{D_2}{K}$ y Re_2 deducimos f_3.

f) Verificación:

Si $f_2 \approx f_3 \rightarrow D \approx D_2$

Si $f_2 \neq f_3 \rightarrow$ Se continúa con una tercera aproximación, y así sucesivamente hasta determinar el diámetro D definitivo con un pequeño error.

La siguiente (Ilustración 154) muestra una síntesis grafica del diagrama universal de *Rouse*, en el cual se encuentra resumida toda la teoría moderna de las corrientes a presión.

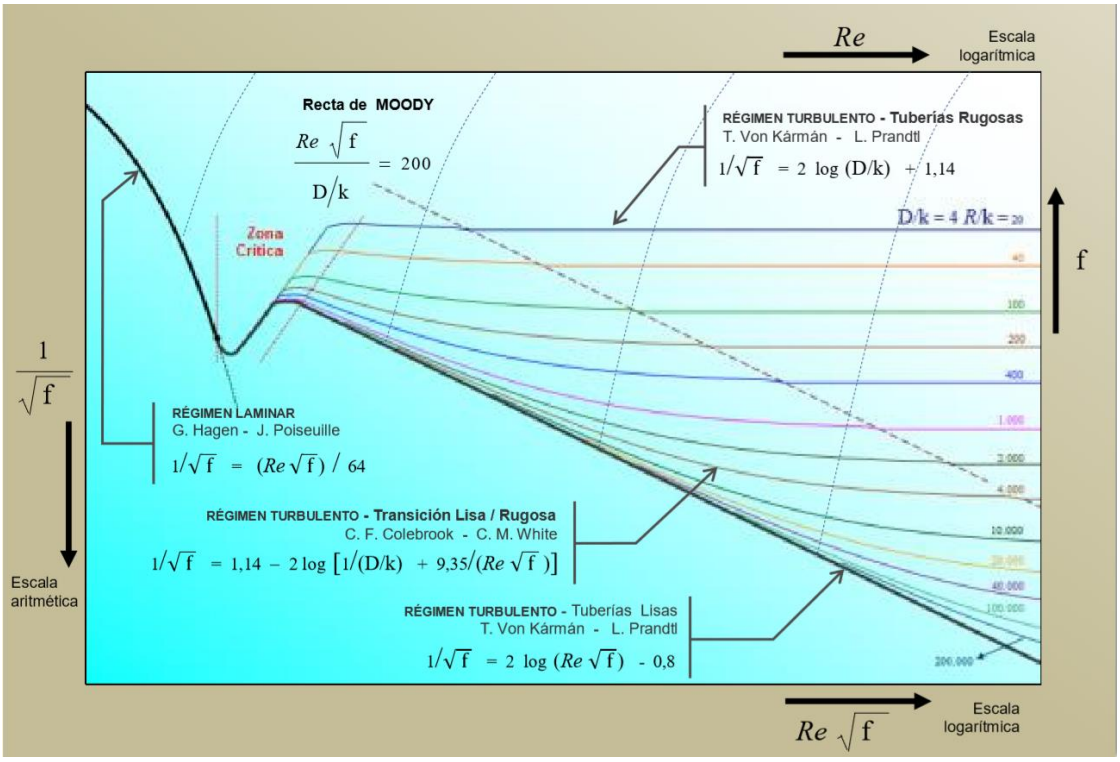


Ilustración 154. Síntesis del diagrama de Rouse.

5.2.12.3 Lewis Ferry Moody (1880-1953)

Biografía sucinta

Ilustración 155. Retrato de Lewis Ferry Moody.

Nació en *Philadelphia*, *Pennsylvania* – Estados Unidos, el 5 de enero de 1880. Fue un ingeniero y profesor estadounidense, más conocido por el diagrama de *Moody*, un diagrama que captura las relaciones entre varias variables utilizadas para calcular el flujo de fluido a través de una tubería. *Moody* tiene 23 patentes para sus inventos. Fue el primer profesor de Hidráulica en la Escuela de Ingeniería de *Princeton*. Fue galardonado con la Medalla *Elliott Cresson* en 1945 y también con una Membresía Honoraria de la Sociedad Americana de Ingenieros Mecánicos (ASME) en 1951. Murió el 21 de febrero de 1953.

Aporte y desarrollo de sus investigaciones

Conocía a la perfección el trabajo desarrollado por *Rouse* y confeccionó en 1944 otro gráfico similar en estructura y apariencia, pero con algunas modificaciones. *Moody* denominó a su gráfico el "diagrama más conveniente" (Ilustración 156).

Los ejes principales están compuestos por:

Abscisa: Re

Escala: logarítmica

Sentido positivo: De izquierda a derecha.

Ordenada: f

Escala: logarítmica

Sentido positivo: De abajo a arriba.

Las líneas que conforman al flujo en régimen turbulento del tipo tubería rugosa se representan como función directa de la rugosidad relativa K/D para valores que abarcan al siguiente intervalo:

0,000001 < K/D < 0,05

El diagrama de Moody excluye directamente como funcionamiento hidráulico la zona crítica comprendida entre 2.000 y 4.000.

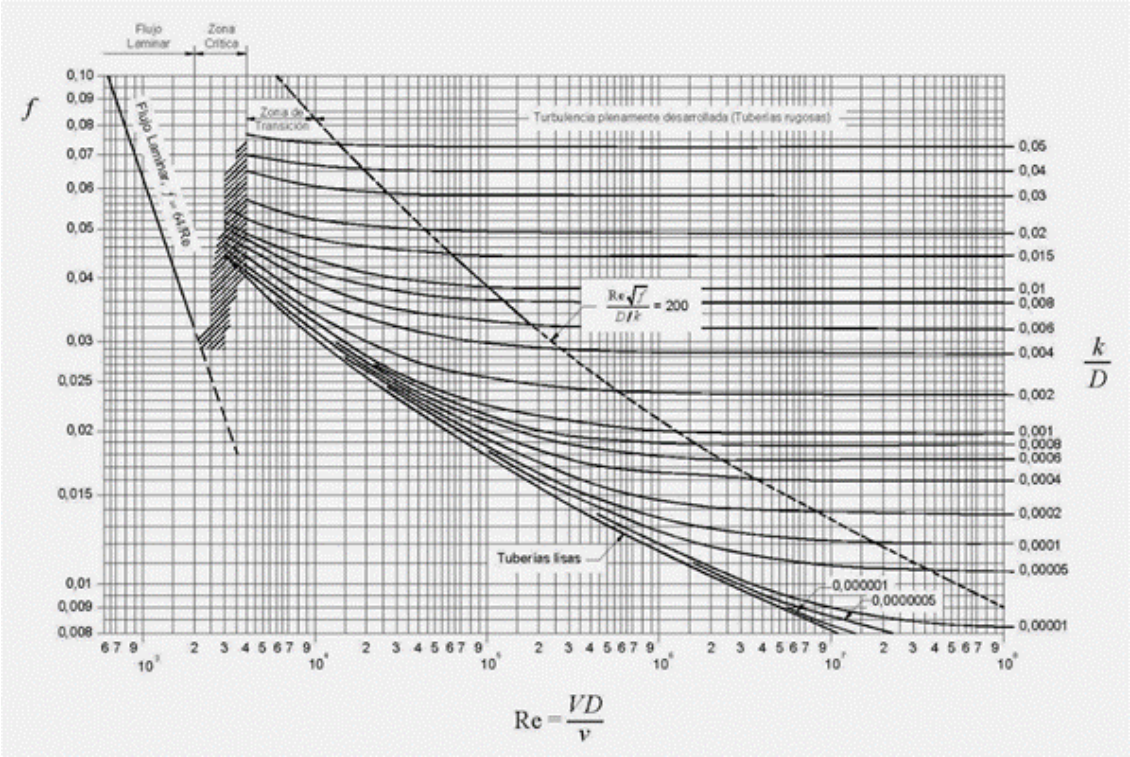


Ilustración 156. Diagrama de Moody.

En general los diagramas universales pueden abordar cálculos de verificación y de dimensionado, según se muestra a continuación:

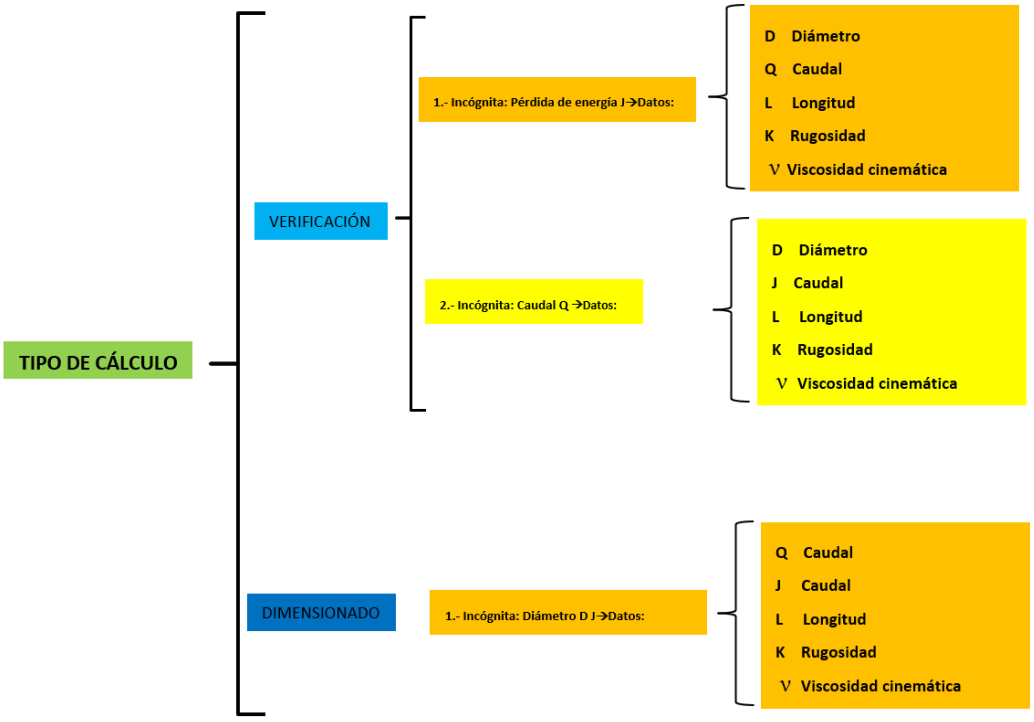


Ilustración 157. Cálculos de verificación para los diagramas universales.

Uso del diagrama de Moody.

El diagrama de *Moody*, idénticamente al de *Rouse*, resuelve los tres problemas típicos antes mencionados, que son la base para resolver otros de más complejidad.

<u>Cálculo de la pérdida de energía J</u>

Incógnita: Pérdida de energía J.

Datos: Q, D, L, K, ν

Cálculos previos:

a) Velocidad media U.

$$U = \frac{4\,Q}{\pi\,D^2}$$

b) Número de *Reynolds* Re.

$$Re = \frac{U\,D}{\nu}$$

c) Inversa de la rugosidad relativa.

Seleccionamos la curva correspondiente a $\frac{K}{D}$

d) Coeficiente de fricción f.

Entrando en el diagrama de *Moody* con $\frac{K}{D}$ y Re deducimos f.

Calculo final (resolución directa)

La pérdida de energía J se determina aplicando la expresión de *Darcy-Weisbach*:

$$J = f\,\frac{L}{D}\frac{U^2}{2g}$$

<u>Cálculo del caudal Q</u>

Incógnita: Cálculo del caudal Q.

Datos: D, J, L, K, ν

Cálculos previos:

a) Con la ecuación de *Darcy-Weisbach* suponemos un f_1 y despejamos en ella la velocidad U1:

$$J=f\,\frac{L}{D}\frac{U^2}{2g} \rightarrow U_1=\sqrt{J\frac{1}{f_1}\frac{D}{L}2g}$$

b) Número de Reynolds Re.

$$Re_1=\frac{U_1 D}{\nu}$$

c) Inversa de la rugosidad relativa.

Seleccionamos la curva correspondiente a $\frac{K}{D}$.

d) Coeficiente de fricción f.

Entrando en el diagrama de *Moody* con $\frac{D}{K}$ y Re_1 deducimos f_1.

e) Verificción:

Si $f_1 \approx f_2 \rightarrow Q_1 = A\,U = \frac{\pi}{4} D^2 U_1 = Q_2$

Si $f_1 \neq f_2 \rightarrow$ Se continúa con una segunda aproximación, y así sucesivamente hasta determinar el caudal Q definitivo con un pequeño error.

<u>Cálculo del diámetro D</u>

Incógnita: Diámetro D.

Datos: Q, J, L, K, ν

Cálculos complementarios:

1) Se despeja de la fórmula de *Darcy-Weisbach* el diámetro D a la 5º potencia en función de caudal Q.

$$J = f\,\frac{L}{D}\frac{U^2}{2g} = f\,\frac{L}{D}\frac{1}{2g}\frac{16\,Q^2}{\pi^2 D^4},$$

despejando $D^5 \rightarrow D^5 = Q^2 \frac{L}{J}\frac{8}{g\pi^2} f$,

a D^5 se le denomina cte.1 $\rightarrow$ $cte.1 = Q^2 \frac{L}{J}\frac{8}{g\pi^2} f$

$D^5 = cte.1\ f$

2) Número de *Reynolds* Re en función del caudal Q.

$$Re = \frac{U\,D}{\nu} = \frac{4\,Q}{\pi\,D^2}\frac{D}{\nu} = \frac{4\,Q}{\pi\,\nu}\frac{1}{D}$$

$cte.2 = \frac{4Q}{\pi\nu}$ $\rightarrow$ $Re = cte.2\,\frac{1}{D}$

Cálculo resolutivo para deducir el diámetro.

Se emplea un procedimiento iterativo mediante la aplicación de aproximaciones sucesivas.

1ª Aproximación

a) Coeficiente de fricción f_1.

Se adopta un coeficiente de fricción f_1 cualquiera para empezar con la iteración.

El valor recomendable de inicio estará comprendido entre 0,015 y 0,025.

b) Diámetro D_1.

$$D_1 = \sqrt[5]{cte.1\ f_1}$$

c) Número de *Reynolds* Re1

$$Re_1 = cte.2\frac{1}{D_1}$$

d) Inversa de la rugosidad relativa $\frac{K}{D_1}$.

e) Coeficiente de fricción f_2.

Entrando en el diagrama de *Moody* con los valores de $\frac{K}{D_1}$ y Re_1 deducimos f_2.

f) Verificción: Si $f_1 \approx f_2 \rightarrow D \approx D_1$, Si $f_1 \neq f_2 \rightarrow$ Se continua con una segunda aproximación.

6. CONCLUSIONES

PRIMER PERIODO (Desde Couplet en 1712 hasta Darcy en 1857).

- Se desarrolló la Hidráulica Experimental y las bases que sirvieron para desarrollar la determinación de las pérdidas de carga en tuberías.
- Se realizaron experiencias, de las cuales se extrajeron leyes fundamentales, fórmulas binómicas y monómicas, que no contemplaban la rugosidad interior de las paredes de las tuberías.
- La mayoría de los experimentos se realizaron con pequeños diámetros y conducciones de corta longitud, y es por ello por lo que dichas fórmulas arrojaban grandes diferencias de caudal cuando se trataba de todo lo contrario.
- En 1768 *Chezy* establece la primera fórmula para calcular la velocidad de circulación en un canal, introduce por primera vez el concepto de radio hidráulico y aplica el mismo método para el caso de tuberías.
- *Darcy* dio una idea más clara, al reconocer la influencia que tiene el estado de las superficies interiores de las conducciones sobre las pérdidas de carga.
- Se afianzaron los principios fundamentales que sirvieron de base para seguir investigando sobre el tema, dado que muchas de esas leyes y principios siguen aún vigentes.

SEGUNDO PERIODO (Desde Darcy en 1732 hasta Staton).

- *Weisbach* dedujo su fórmula de pérdidas de carga apoyándose en los experimentos de *Darcy*, por lo que también se le denomina fórmula de *Darcy-Weisbach*. Fue concebida para las condiciones de un fluido en movimiento para régimen laminar y posteriormente se demostró su validez para régimen turbulento.
- *Hagen* fue el primero en intuir la existencia de otro tipo de régimen que no fuera el laminar, al observar que éste cesaba cuando la velocidad sobrepasaba un cierto límite.

- *Reynolds* confirmó científicamente con los experimentos, la división entre régimen laminar y turbulento. A partir de aquí, la viscosidad empezó a formar parte integrante en la mayoría de las formulaciones.
- Prandtl en equipo con *Kármán* y *Blasius*, desarrolla la teoría de la capa límite, en la que establece que para un fluido en movimiento todas las pérdidas friccionales se producen en una delgada franja adyacente al contorno sólido, también conocido como estrato límite.
- Se comprueba que la velocidad en el contorno o pared de la tubería es cero (principio de *Meyer*).
- Introdujo el concepto de tuberías lisas y tuberías rugosas en función de la posición de la rugosidad K con respecto al espesor de la subcapa límite, y analizó el régimen laminar y turbulento en cada caso, ajustando las ecuaciones respectivas (expresiones racionales) en función de los resultados reales de las experiencias realizadas por su discípulo *Nikuradse*.
- Las ecuaciones de *Von-Kárman-Prandtl* y *Colebrook-White* sirven para deducir el coeficiente de fricción integrado en la fórmula de *Darcy-Weisbach* en régimen turbulento, pero su carácter implícito no dejaba en su época calcular analíticamente el coeficiente f, así que para dar una solución viable al problema y basándose en la idea de *Blasius* y *Staton*, los estaudinenses *Hunter Rouse* y *Lewis Ferry Moody* volcaron las ecuaciones mencionadas que llevan su nombre.

7 BIBLIOGRAFÍA

Afif Khouri, E., 2004. *Apuntes de Hidráulica para Explotaciones Forestales.*. 33011 Oviedo: Ediciones de la Universidad de Oviedo.

Agüera Soriano, J., 1992. *Mecánica de Fluidos Incompresibles y Turbomáquinas.* 3ª Edición ed. 28007 Madrid: Editorial Ciencia 3, S. A..

Arbor, A., 1906. *University of Michigan Press.* [En línea]
Available at:
http://umhistory.dc.umich.edu/history/Faculty_History/W/William,_Gardner_Stewart.html
[Último acceso: 31 julio 2018].

Berlin, R. d. B. z., 2017. *Cosmo indirekt - Physik für Schüler.* [En línea]
Available at: https://physik.cosmos-indirekt.de/Physik-Schule/Gotthilf_Hagen
[Último acceso: 9 septiembre 2017].

Biography, C. D. o. S., 2008. *Encyclopedia.com.* [En línea]
Available at: https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/du-buat-pierre-louis-georges
[Último acceso: 7 julio 2017].

Biography, C. D. o. S., 2018. *ENCICLOPEDIA.com.* [En línea]
Available at: http://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/weisbach-julius-ludwig
[Último acceso: 4 septiembre 2017].

Brewster, D., 1832. *The Edinburgh Encyclopedia Vol. X.*. The American Edition of the New Edinburgh Encyclopedia ed. Philadelphia: Joseph And Edward Parker.

Cabrera, E. E., 1996. *Ingeniería Hidráulica Aplicada a los Sistemas de Distribución de Agua-VOLUMEN 1.* 2ª Edición ed. Valencia: U.D. Mecánica de Fluidos, Universidad Politécnica de Valencia y Aguas de Valencia, S.A..

Carpentier, A. &. F. F., 2013. *MITRAL VALVE.* [En línea]
Available at: http://www.themitralvalve.org/mitralvalve/jean-leonard-marie-poiseuille
[Último acceso: 21 septiembre 2017].

Coulomb, C. A., 1800. *Mémoires de mathématiques et physique T.3 246-305.* París: Mémoires de I´nnstitut National des Sciences et Arts.

Cruz, C., 2015. *librosdrvaliente.* [En línea]
Available at: https://librosdrvaliente.files.wordpress.com/2015/09/capc3adtulo-6-el-flujo-de-fluidos-por-el-interior-de-las-tuberc3adas-y-las-perdidas-por-friccic3b3n.pdf
[Último acceso: 1 septiembre 2017].

Darcy, H., 1857. *Recherches expérimentales relatives au movement de l'eau dans les tuyaux.* 1 ed. Paris: Imprimerie Impériale.

Debaube, A., 1875. *Manuel de L'Ingénieur des Ponts et Chaussés - 16 fascicule-texte. Traité des Eaux 2ª Partie. Distributions D'Eau..* París: Dunod.

Dubuat, M., MDCCCXVI (1816). *Principes D'Hydraulique et de Pyrodynamique, Vérifiés Par un Grand Nombre D'Experiénces. Tome Second..* Nouvelle Èdition ed. Paris: Cuez Firmin Didot.

EcuRed, 2010. *EcuRed Conocimiento con todos y para todos.* [En línea]
Available at: https://www.ecured.cu/Ludwig_Prandtl
[Último acceso: 19 diciembre 2017].

Educativo, H. -. P. I., 2017. *Escurrimientos a Presión.* s.l.:s.n.

Epsilon, C., 2017. *Chi Epsilon.* [En línea]
Available at: https://www.chi-epsilon.org/XEWebGeneral2/About/NHMBio.aspx?MemberId=44
[Último acceso: 20 marzo 2018].

Franquet Bernis, J. B., 2003. *Cinco Temas de Hidrología e Hidráulica.* 1 ed. Tortosa: Universitat Internacional de Catalunya.

Giles, R. V., 1979. *Mecánica de Los Fluidos e Hidráulica..* 3ª Edición ed. s.l.:McGraw Hill.

Hager, W., 2003. Blasius: A life in research and education. *Exp Fluids* , Issue 24, p. 6.

Kenn, M. J., 1994. *Independent.* [En línea]
Available at: https://www.independent.co.uk/news/people/obituary-professor-c-m-white-1401219.html
[Último acceso: 15 marzo 2018].

Khoury, F., 2005. *ponce.sdsu.edu.* [En línea]
Available at: http://manning.sdsu.edu/
[Último acceso: 30 julio 2018].

Kurrer, K. E., 2008. *Structurae Internartional Database and Gallery of Structures..* [En línea]
Available at: https://structurae.net/persons/johann-eytelwein
[Último acceso: 3 marzo 2017].

Levi, E., 2001. *El Agua según La Ciencia.* Primera edición ed. Mexico DC: Ediciones Castell Mexicana.

Libes, A., 1821. *Tratado de Física Completo y Elemental Tomo I..* Segunda edición ed. Barcelona: Antonio Brusi.

Mallorquí, J. M. M., 1981. *TUBERIAS Tomo 1 Materiales, cálculos hidráulicos, cálculos mecánicos..* 1 ed. Barcelona: Editores técnicos asociados, S.A..

Mallorquí, J. M. M., 1983. *TUBERIAS, Tomo II, Instalaciones de conducción, distribución y saneamiento. Aplicaciones de cálculo por ordenador.* 1 ed. Barcelona: Editores técnicos asociados, S.A..

Mariano Vallejo, J., 1833. *Tratado sobre el Movimiento y Aplicaciones de Las Aguas (Tomo I).*. 1 ed. Madrid: Imprenta de D. Miguel de Burgos.

McGuire, M. J., 2013. *This Day in Water History.* [En línea]
Available at: https://thisdayinwaterhistory.wordpress.com/2015/08/28/august-28-1869-birth-of-allen-hazen-1882-death-of-john-rose-leal-2/
[Último acceso: 30 marzo 2018].

O'Connor, J. &. R. E., 2010. *School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland.* [En línea]
Available at: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Girard_Pierre.html
[Último acceso: 7 julio 2017].

Ordoñez Viñan, M. A., 2013. *Automatización del Banco de Pérdidas del Laboratorio de Turbomáquinaria de la Facultad de Mecánica.* Río Bamba-Ecuador: Tesis de Grado.

Pérez Franco, D., 2001. Evolución Histórica de las Fórmulas para expresar las Pérdidas de Carga en Tuberías: Primera parte: Desde los experimentos de Couplet hasta los de Darcy. *Ingeniería Hidráulica y Ambiental,* Vol. XXII(2), p. 5.

Pérez Franco, D., 2002. Evolución Historica de las Fórmulas para expresar las Pérdidas de Carga en Tuberias. Sefunda parte: Desde los trabajos de Darcy hasta los de Staton.. *Ingeniería Hidráulica y ambiental.,* Vol. XXIII(3), p. 6.

Riaño Valle, F., 2016. La hidráulica experimental durante el siglo XVIII en Francia. *CIH Ingeniería Hidráulica y Ambiental,* XXXVII(3), p. 14.

Riaño Valle, F., 2016. La hidráulica experimental durante el siglo XVIII en Francia. *Ingeniería Hidráulica y Ambiental,* volumen 37(Nº 3).

Ribeiro, D., 2014. *WikiCiencias.* [En línea]
Available at: http://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/index.php/Jean-

L%C3%A9onard-Marie_Poiseuille
[Último acceso: 21 septiembre 2017].

Rodríguez Castro, J. A., 2014. *In slideshare.* [En línea]
Available at: https://es.slideshare.net/eliasmatu/hidraulica-basica-35265182
[Último acceso: 27 enero 2017].

Rott, N., 1990. Note on the History of the Reynolds Number. *Fluid Mech.,* Issue 22, p. 12.

Rural, D. d. I., 2008. *UCLM Universidad de Castilla La Mancha.* [En línea]
Available at: https://previa.uclm.es/area/ing_rural/Trans_hidr/Tema3.PDF
[Último acceso: 15 febrero 2017].

Salas, A. F. U., 2008. *Hidráulica y Riegos.* [En línea]
Available at: http://ocwus.us.es/ingenieria-agroforestal/hidraulica-y-riegos.
[Último acceso: 4 septiembre 2017].

Sutera P., S. &. S. R., 1993. The History of Poiseuilles's Law.. *Fluid Mech,* Issue 25, p. 20.

Tweedie, A., 2007. *Grace`s Guide to British Industrial History.* [En línea]
Available at: https://www.gracesguide.co.uk/Thomas_Ernest_Stanton
[Último acceso: 20 marzo 2018].

Wales, J. &. S. R., 2001. *Wikipedia La enciclopedia libre.* [En línea]
Available at: https://es.wikipedia.org/wiki/Henry_Darcy
[Último acceso: 2 febrero 2017].

Webmaster, F., 2017. *Florida Water & Pollution Control Operarators Assotiations..* [En línea]
Available at:
https://www.fwpcoa.org/content.aspx?page_id=2507&club_id=859275&item_id=1105&pst=4289&sl=938958398
[Último acceso: 1 julio 2018].

Woltmann, R., 1791. *Beitrage zur Hydraulischen Architectur.* 2016 ed. Góttingen: ReInk Books.

Zuluaga García, F., 2009. *EIA Escuela de Ingeniería de Antioquía.* [En línea] Available at: http://fluidos.eia.edu.co/hidraulica/articuloses/flujoentuberias/ec_flujo/Paginas/page4.html
[Último acceso: 2 julio 2017].

ANEXOS

Anexo 1

Artículo

Julián Ignacio Monís, Rafael López-Luque, Juan Reca, Juan Martínez. Multistage Bounded Evolutionary Algorithm to Optimize the Design of Sustainable Photovoltaic (PV) Pumping Irrigation Systems with Storage. Sustainability 2020, 12(3), 1026; https://doi.org/10.3390/su12031026. Factor de impacto: 2,591.

sustainability

MDPI

Article

Multistage Bounded Evolutionary Algorithm to Optimize the Design of Sustainable Photovoltaic (PV) Pumping Irrigation Systems with Storage

Julián Ignacio Monís [1], Rafael López-Luque [1,*], Juan Reca [2] and Juan Martínez [2]

1 Department of Applied Physics, University of Córdoba, Campus of Rabanales, 14071 Córdoba, Spain; jimopana1999@hotmail.com

2 CIAIMBITAL, Agri-Food Campus of International Excellence CeiA3, Ctra, Department of Engineering, University of Almería, Sacramento s/n, La Cañada de San Urbano, 04120 Almería, Spain; jreca@ual.es (J.R.); jumartin@ual.es (J.M.)

* Correspondence: fa1lolur@uco.es

Received: 16 January 2020; Accepted: 28 January 2020; Published: 31 January 2020

check for updates

Abstract: Small off-grid photovoltaic (PV) pumping irrigation systems with storage tanks are an environmentally friendly, cost effective and efficient way of taking advantage of solar energy to irrigate crops, and they are increasingly being used today. However, finding the optimal design of this type of system is cumbersome since there are many possible designs. In this work, a new heuristic method based on the hybrid approach, which uses search space reduction, is developed and adapted to the optimal design for this type of PV irrigation system. At different stages, the proposed approach iteratively combines a bounding strategy based on the application of engineering rules with the aim of reducing the search space with a genetic algorithm to find the optimal design within this search space. The proposed methodology was applied to minimize the cost of a benchmark case study consisting of a real farm placed in the province of Almería (Spain). The proposed methodology was able to provide a faster and an accurate convergence due to the reduction of the search space. This fact led to a reduced total cost of the system. This study proved that the most sensitive variables were the number of modules and the type of pump, whereas the diameter of the pipe and volume of the storage tank remained more stable.

Keywords: irrigation; photovoltaic irrigation; optimization; irrigation design; pumping; storage

1. Introduction

The use of renewable energy, such as solar energy, is a suitable measure for coping with the scarcity of fossil fuels and their as sociated problems, such as the emission of Greenhouse Gases (GHG) and their growing impact on global warming and climate change. The use of off-grid photovoltaic pumping irrigation systems has increased recently not only because of their environmental benefits but also because of their economic profitability because the cost of conventional electrification in isolated rural areas is rising, whereas the price of PV cells has dropped in recent decades.

The possibility of storing both water and energy in an elevated reservoir or in the soil is another valuable feature of photovoltaic irrigation systems, although in some cases, battery banks are used to store the energy [1]. In addition, in many crops, water consumption is strongly dependent on radiation [2,3], thus PV energy production and energy consumption can be synchronized so the design of these systems can be simpler and more economically and environmentally efficient.

Different typologies of PV irrigation systems exist, namely those that pump water to an elevated tank or reservoir and direct pumping irrigation systems that transport water directly to the irrigation pipe distribution system. The latter type is less common and more complex to operate, primarily because

energy production and consumption need to be matched perfectly [4–6] as the capacity of the soil profile to store water is limited, especially in sand dominant or coarse soils. In addition, the flowrate of these systems is usually constant because it depends on the discharge and number of the emitters of the irrigation units, so adopting strategies to adapt the flowrate to the available energy is much more complicated. Different authors have comprehensively analyzed this kind of system in order to propose operation strategies able to match energy supply and demand and optimize their performance [7–10].

The first type of PV irrigation system mentioned is the most common because the bias between the energy supply and demand can be balanced by storing water in an elevated storage tank or reservoir [11]. Despite their advantages, these systems also feature some drawbacks, such as the reservoir investment costs and higher evaporation losses from the reservoir [12].

The sizing of these systems must consider the different parts that comprise the system itself, which makes finding an optimal design a difficult task because there are many options to choose from and all the components of the system are interrelated.

Many authors have developed simulation models of the PV irrigation systems and have tried to find an optimal design by performing a sensitivity analysis. The said procedure is simple, but the number of iterations should be very high in order to find a suitable solution. For example, Glasnovic and Margeta [4] developed a simulation model in order to find the optimal solution by performing a sensitivity analysis. Yahyaoui et al. [13] developed an algorithm for sizing PV irrigation systems for tomato crops. Campana et al. [14] followed a similar approach. Bouzidi [15] also developed a simulation model of the system and used two optimization criteria: The concept of loss of power supply probability (LPSP) for the reliability as sessment and the life cycle cost (LCC) for the economic evaluation. Maleki and Askarzadeh [16] and Maleki and Pourfayaz [17] also used the LPSP concept for different kinds of hybrid PV systems. Hamidat and Benyoucef [11] proposed a systematic procedure for sizing PV irrigation systems with storage.

Due to the complexity of the problem, the use of powerful and robust optimization methods is needed for determining an optimal solution, both from an economic and environmental perspective. More specifically, the use of heuristic methods is the most suitable approach for this problem as heuristic approaches can handle complex global optimization problems. Heuristic methods can be defined as a special type of optimization method based on simple rules, which on many occasions mimic some biological or physical processes, capable of finding a "satisfactory" solution. Albeit this solution is not guaranteed to be optimal [18], it is close enough to the optimum from a practical standpoint.

Several heuristic optimization methods have been applied to optimize the design of different types of PV powered systems. Among them, Maleki et al. [19] applied different PSOs (particle swarm optimization algorithms) to the optimum design of hybrid (PV/wind/Batt) systems. Maleki and Pourfayaz [17] also applied three classic heuristic algorithms and four new metaheuristics to the optimal design of a PV/WT/battery hybrid. Sanchez et al. [20] evaluated the performance of the Particle Swarm Optimizer (PSO) method for the optimal design of a residential hybrid wind–photovoltaic–fuel power plant in Mexico.

Regarding the specific case of stand-alone PV pumping systems with water storage, Bakelli and Kaabeche [21] proposed different metaheuristics, such as ant lion optimizer (ALO), bat algorithm (BA), cuckoo search algorithm (CSA) and gray wolf optimization algorithm (GWO). They concluded that the GWO algorithm outperformed the other algorithms. Olcan [22] developed a multi-objective model that considered both the reliability and cost as objectives. On the other hand, EL-Shimy [23] preferred to apply an efficient non-conventional direct method.

Genetic or evolutionary algorithms are perhaps the most well known and widely used heuristic methods and they have also been applied to the PV pumping design problem. For example, Dufo-López and Bernal-Agustín [24] and Carroquino et al. [25] used a Genetic Algorithm (GA) to design a hybrid PV-diesel system. Ma et al. [26] also used a GA to optimize the design of a solar photovoltaic system with pumped storage. Mérida et al. [27] proposed a multiobjective approach and developed a model called MOPISS that used a Non-dominated Sorting Genetic Algorithm (NSGA-II) for the optimal sizing of a PV irrigation system.

Despite their valuable advantages, the accuracy of heuristic methods and their convergence speed decrease as the size of the optimization problem increases. This inefficiency occurs because general purpose heuristic algorithms must explore a vast search space, and thereby devote a great effort to evaluating unfeasible solutions. To overcome this drawback, Reca et al. [28] proposed a new hybrid evolutionary algorithm that was applied to the optimal design of a pipe network. This approach reduced the search space thus increasing both the convergence speed and accuracy of the solution.

In this study, a new heuristic method based on the hybrid approach using search space reduction is developed and adapted to the optimal design of stand-alone PV irrigation pumping systems with a storage tank. The proposed approach is based on iteratively reducing the search space by applying engineering-based rules to the problem with the aim of reducing the number of possible scenarios to analyze. The proposed methodology has been applied to minimize the cost of a benchmark case study. The proposed case study consisted in finding the optimal design of a stand-alone PV irrigation system for an olive orchard farm located in Tabernas (Almería).

2. Materials and Methods

2.1. Overall Description of the Optimal Design Approach

The system is composed of a photovoltaic array, a frequency converter, a variable speed pump and an elevated tank or reservoir that stores water with enough elevation to distribute it to the irrigation system. A scheme of the PV pumping system analyzed in this work is illustrated in Figure 1.

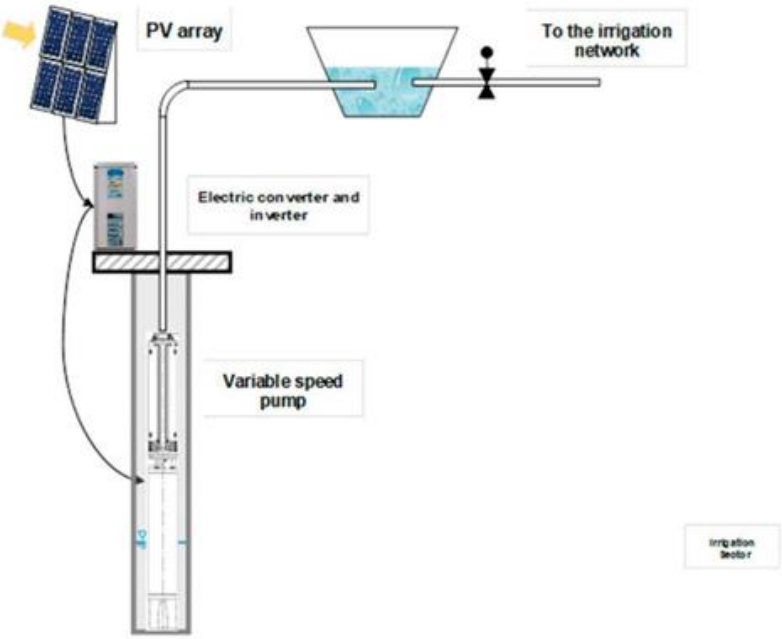


Figure 1. Scheme of the photovoltaic pumping irrigation system.

The decision variables that must be optimized are the following:

1. Diameter of the delivery pipe
2. Pump model
3. Capacity of the elevated tank
4. Number of PV modules.

The proposed optimal design method is composed of a simulation model of the PV irrigation pumping system and an optimization module based on a heuristic approach. These models are described hereafter.

2.2. *Simulation of the PV Pumping System*

2.2.1. PV Subsystem

The PV subsystem model estimated the net photovoltaic power provided by the PV generator (P_{PV}) depending on the calculated incoming irradiance. An isotropic distribution of the diffuse radiation [29] was supposed in order to calculate the temporal distribution of the irradiance, $I(t)$. The model by Collares-Pereira and Rabl [30] was applied to disaggregate direct and diffuse irradiance from the global daily radiation in MJ m^{-2}. A detailed description of the calculation procedure is further described in previous works [7,31].

2.2.2. Pumping Subsystem

The pumping system can be described by both the performance curves and the system curve. In this work, the Head-Discharge (H-Q) and Power-Discharge (P-Q) performance curves of the pump for its nominal rotational speed are given as the input data of the problem. These curves can be fitted to second degree polynomial functions and are shown in the following set of equations.

$$\begin{aligned} H &= A{\cdot}Q^2 + B{\cdot}Q + C \\ P &= E{\cdot}Q^2 + F{\cdot}Q + G \end{aligned} \tag{1}$$

where: H is the pumping head (m), Q is the pump discharge (m^3 s^{-1}) and P is the pumping power. A to C and E to G are regression coefficients.

The performance of the pump depends on not only the type of pump but also on its working speed. The performance of a variable speed pump can be modelled by applying affinity laws that are shown in the following set of equations:

$$\left.\begin{aligned} \frac{N_1}{N_2} &= \frac{f_1}{f_2} = \frac{Q_1}{Q_2} = \lambda \\ \frac{H_1}{H_2} &= \frac{Q_1^2}{Q_2^2} = \lambda^2 \\ \frac{P_1}{P_2} &= \left(\frac{H_2}{H_2}\right)^{\frac{3}{2}} = \lambda^3 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

where: N_1 and N_2 are two specific pump speeds (in rpm) 1 and 2, f_1 and f_2 are the electric frequency, Q_1 and Q_2 are the pump discharges, H_1 and H_2 are the pumping heads and P_1 and P_2 are the pumping power for these two specific pump speeds. λ is the pump speed ratio.

The system curve (H) is given in Equation (3):

$$H = \Delta z + hf \tag{3}$$

where: Δz is the static head, i.e., elevation change between the water level in the suction of the pump and the water level in the elevated tank (m), h_f is the friction head, i.e., the total head losses in the delivery pipe (m).

Pressure losses were calculated by applying the Darcy–Weisbach equation [32].

$$hf = 8{\cdot}f_p \cdot \frac{L}{D^5} \cdot \frac{Q^2}{g{\cdot}\pi^2} \tag{4}$$

where: f_p is the friction factor of the pipe, which in turn depends on the relative roughness of the pipe and the Reynolds number, L is the length of the pipe, D is the diameter and Q is the total discharge.

The net power transferred to the water by the pump is equal to:

$$P_i = \gamma \cdot Q \cdot H \tag{5}$$

where: γ is the specific weight of the water (N m^{-3}).

The total PV power required to drive the pump is estimated by applying Equation (6):

$$P_{PV} = \frac{P_i}{\eta_P \cdot \eta_{AM} \cdot \eta_{FC}} \tag{6}$$

where: η_{FC} is the efficiency of the converter, η_{AM} is the efficiency of the asynchronous motor and η_P is the pump efficiency.

2.2.3. Water Balance

The irrigation water demands were calculated using the methodology proposed by FAO [33]. The crop evapotranspiration (ET_c) was calculated applying Equation (7):

$$ET_c = ET_o \cdot K_c \cdot K_r \tag{7}$$

where: ET_o is the reference evapotranspiration and K_c is the crop coefficient and K_r is a reduction coefficient for sparse crops with limited canopy cover.

In this study, ET_o was computed applying the Penman–Monteith formula. The net irrigation requirements, N_n, (mm) can be estimated as the difference between ET_c and the effective precipitation [34], meaning rainfall that is effectively used by the crop (P_e).

Finally, the gross irrigation water requirements (N_g, in mm) can be calculated as a function of the N_n by applying an irrigation efficiency (η_a) in order to take into account the water losses in the system (See Equation (8)).

$$N_g = \frac{N_n}{\eta_a} \tag{8}$$

A model to calculate irrigation water requirements previously developed by the authors and applied in previous works was used in this research.

The water volume (V_{Ri}, in m^3) needed to irrigate a farm with an area S (ha) during a specific period i can be calculated as a function of the gross irrigation requirements for that period (N_{gi}) as shown in Equation (9):

$$V_{Ri} = N_{gi} \cdot S \cdot 10 \tag{9}$$

The water volume pumped to the reservoir (V_{Pi}, in m^3) for a specific period i can be calculated by multiplying the pumping flowrate (Q_i, in m^3/s) by the pumping time (T_i, in s). The volume of water stored in the tank can be modelled by applying a water balance model:

$$\begin{gathered} V_i = V_{i-1} + V_{Pi} - V_{Ri} \\ if\ V_i \geq 0 \rightarrow ID_i = 0 \\ if\ V_i \leq 0 \rightarrow V_i = 0; ID_i = -V_{i-1} - V_{Pi} + V_{Ri} \end{gathered} \tag{10}$$

where: V_i and V_{i-1} are the volume of water stored in the reservoir in periods i and i-1, respectively, ID_i is the irrigation deficit in period i. The volume stored in the reservoir must be lower than the maximum capacity of the tank.

2.3. Statement of the Optimization Problem

A multistage bounded genetic algorithm module was applied to optimize the design of the PV pumping system. The GA algorithm developed in this work is based on the GENOME (University of Almería, Almería, Spain) software model developed by Reca and Martínez [35], which was later converted in B-GENOME [28], an improved bounded version of GENOME that was applied to optimize the cost of a pipe network. This code was modified and adapted with the aim of optimizing the above-mentioned PV pumping design problem (BPV-GENOME). The latter model was developed using the VBA programming language and embedded in an EXCEL© (Microsoft Corporation, Redmond, Washington, EE.UU) workbook.

B-GENOME used an efficient integer-coding scheme. Each individual (possible solution) is described by a chromosome consisting of a vector of n discrete variables (genes). Genes were codified by an integer value ranging from one to n_i (maximum number of possible values as signed to the variable i, i.e., alleles). This coding scheme was also adopted in BPV-GENOME, in which case the chromosome is composed of four genes, one per decision variable. The first gene codifies the diameter of the pipe, the second gene codifies the type of pump, the third one the capacity of the tank and the last one the number of PV modules. The number of alleles per gene depends on the input data of the problem. The number of alleles of the first and second gene depends on the total number of pipe diameters in the input pipe database and the number of pumps in the pump database, respectively. The third and fourth variables have a few alleles that results from a predefined minimum and maximum value of each variable (volume of the tank and number of PV modules, respectively) and a variable step. The bounding strategy used in this work is described hereafter.

2.3.1. Multistage Bounding Strategy

A multistage bounding strategy is proposed in this study with the aim of reducing the search space and improving the efficiency of the GA algorithm. The initial set-up of the limits of the variables is done by applying engineering-based rules. In this initial stage, the aim is to apply relatively wide bounds, so that the resulting reduced search space includes not only the problem solution but also its surroundings, which may provide useful information. Individuals that are clearly beyond the limits and drastically violate the problem's restrictions are simply discarded to reduce the complexity of the problem. The steps in this initial bounding are described as follows:

(a) Bounding the diameter series:

Maximum and minimum reasonable pipe diameters are estimated depending on the flow range required by the irrigation system. The first step is to calculate the fictitious continuous flow (q), which is defined as the flowrate required to supply the maximum crop water requirement if the pumping system operates continuously during the whole day. The maximum flow is obtained multiplying the fictitious continuous flow by a degree of freedom (DF), which indicates the number of times that the system would be able to supply the required irrigation water in a day. The higher the selected value of the degree of freedom, the wider the bound for the maximum flow (see Equation (11)).

$$Q_M = q \cdot DF = \frac{N_g \cdot S \cdot 10}{24} \cdot DF \tag{11}$$

where: q (m^3/s) is the continuous flow, DF is the degree of freedom (dimensionless) and Q_M (m^3/s) is the maximum pumped flow.

To calculate the diameter bounds, velocity restrictions are imposed on the flow in the pipes. Excessively high flow velocities in the pipe may produce pipe erosion, loud noise, undesired effects of hydraulic transients and excessive head losses. On the contrary, very low velocities may produce sedimentation and oversizing of the system. Maximum (D_M) and minimum (D_m) diameter sizes can be calculated by applying these velocity restrictions in the pipe. D_M is limited to the diameter able to supply the maximum flow with the minimum admissible flow velocity in the pipe. D_m is defined as the size of the pipe that would supply the continuous flow with the maximum admissible velocity in the pipe (see Equation (12)). Diameters in the pipe database out of this range are neglected.

$$\begin{aligned} D_M &= \sqrt{\frac{4 \cdot \frac{Q_M}{3600}}{\pi \cdot U_m}} \\ D_m &= \sqrt{\frac{4 \cdot \frac{q}{3600}}{\pi \cdot U_M}} \end{aligned} \tag{12}$$

(b) Bounding the pump series:

The admissible pump series are calculated by performing the procedure depicted in Figure 2 as a function of the bounded pumped flows and pumping heads.

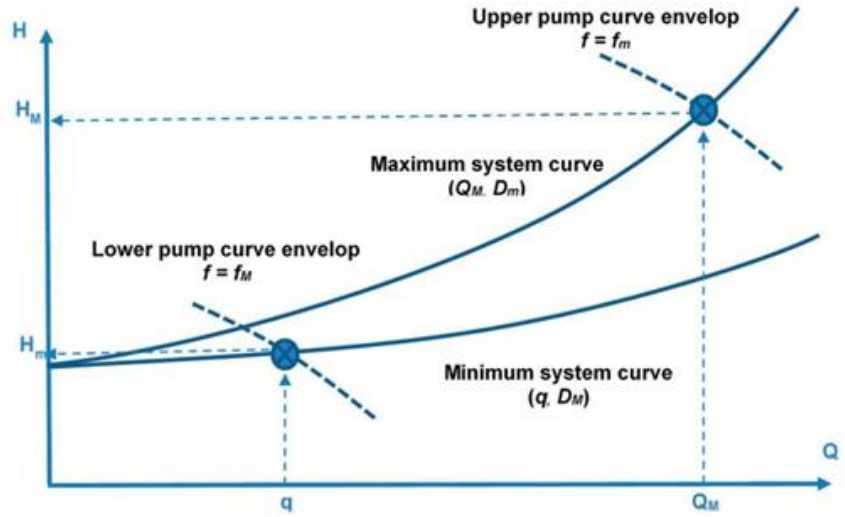


Figure 2. Elective series of pumps.

Extreme maximum and minimum system curves are defined for the maximum pumped flow (Q_M) and continuous flow (q), respectively. These curves were computed by applying Equations (3) and (4). Two extreme operating points, (Q_M, H_M) and (q, H_m), are thus defined. These points are used to limit the range of admissible pumps. Admissible pumps are those whose performance curves lie within two envelopes. The upper envelope requires that the performance H-Q curve of the pump falls below the maximum operating point with the pump operating at the minimum frequency (rotating speed). Pumps above this limit would produce operating points far beyond the upper limit. The lower envelope requires that the pump curve falls above the lower operating point operating at its maximum speed. Pumps with H-Q curves below this limit are clearly unable to supply the flow and energy demands.

(c) Bounding the capacity of the storage tank:

Maximum and minimum capacity levels are defined. The minimum capacity of the tank was set to the volume of water needed to irrigate for one day. This volume makes it possible to have a minimum water storage in case the PV pumping system fails. The maximum capacity was set to the volume equal to 30 days of water consumption. Higher volumes are considered excessive. The volume step is equal to one day of storage so that 30 possible storage volumes (multiple of the minimum volume to store one day of operation) are considered in this initial bounding.

(d) Bounding the PV power:

The maximum and minimum number of PV modules are calculated depending on the power required to drive the most and least powerful pumps in the selected series of admissible pumps. Required PV power for both cases can be calculated by applying the appropriate inverter and motor efficiencies (Equation (6)). If the difference between the maximum and minimum number of modules is lower than 50, the step equals one module. The maximum number of steps was set to 50 so if the difference is higher, the step can be higher than one module.

After this initial bounding is performed, the GA algorithm is applied recursively (in this work ten runs of the GA were performed). The solutions of this first GA phase provide the range of solutions that serve to refine the search space and redefine the problem limits in the subsequent stage. Since the solution space is now narrower, the number of PV modules and capacity of the tank steps

are now smaller. After a second round of GA analyses, a new more precise solution with higher resolution can be found. In this work, two stages were performed, although more iterative stages can be also conducted.

2.3.2. Genetic Algorithm

Genetic algorithms (GA) are heuristic methods that mimics the evolutionary mechanisms of natural selection and genetics [18]. Genetic algorithms are based on the effective optimization model that has naturally evolved for dealing with large, highly complex systems.

In the GA formulation, the initial population is obtained randomly. Using a random generator, integer values are generated, ranging from 1 to n_j, where n_j is the number of alleles of each gene. Then, population evolves by undergoing an iterative reproductive cycle in subsequent generations. This evolutive cycle is composed of three basic operators: Selection, crossover and mutation. There are many possible methods to perform these basic operations: The selection operator used in this work is called steady-state-delete-worst plan. According to this plan, a new individual is inserted in the population if its fitness exceeds that of the least fit member of the parent population. That least fitted individual is consequently removed and replaced by the offspring. The crossover process involves the exchange of information between two parent chromosomes to produce two new offspring chromosomes that inherit their characteristics. This process is controlled by the input parameter p_{cross}, which defines the probability of crossing two chromosomes. In this work, a uniform crossover procedure was applied, meaning that the parents' chromosomes exchange information gene to gene. A gene crossing rate (r_{cross}) parameter is defined with the aim of defining the probability of exchanging a specific gene. Finally, a mutation probability (P_{mut}) is defined to specify the mutation rate. The mutation operator swaps the allele of the selected gene with a randomly generated value.

A population size of 50 individuals and 50 generations was selected in this work because it provided a good trade-off between convergence speed and accuracy. The remaining GA parameters and options used in this work are summarized in Table 1 and were recommended in other works [28,35].

Table 1. Input parameters for the genetic algorithm.

Parameter	Value
Population (n_p)	50
Generations (n_g)	50
Crossover prob. (p_{cross})	0.9
Mutation prob. (P_{mut})	0.05
Prob. of gene crossing (r_{cross})	0.5
Reproduction plan	steady-state-delete-worst plan
Crossover operator	uniform crossover

2.3.3. Objective Function

For every generation, the fitness of every individual is evaluated. This fitness is defined as the sum of the cost of the system (cost of the delivery pipe, cost of the pump, cost of the tank and cost of the PV plant) plus a penalty function to consider the supply deficit. A supply deficit occurs when one specific induvial (system design) is unable to supply the target water demands for irrigation (see Equation (13)).

$$FF = C_D + C_P + C_S + C_{PV} + K_P \cdot ID \tag{13}$$

where: FF = fitness function, C_D = cost of the pipe, C_P = cost of the pump, C_S = cost of the storage tank, C_{PV} = cost of the PV plant, K_P = penalty multiplier and ID = cumulative water deficit in the system (sum of deficits for every study period).

The penalty multiplier (K_P) may affect the convergence and accuracy of the GA algorithm, so the value of this parameter should be adjusted. Some researchers recommend different constraint-handling

techniques, such as the use of variable values or self-adaptive penalty functions [36]. However, in this work, a high value (10^9 €/m) was selected for this parameter to discard infeasible solutions that imply an insufficient irrigation water supply.

2.4. Structure of the BPV-GENOME Model

The flowchart of the BPV-GENOME (Bounded Photovoltaic irrigation-GENOME) model is depicted in Figure 3.

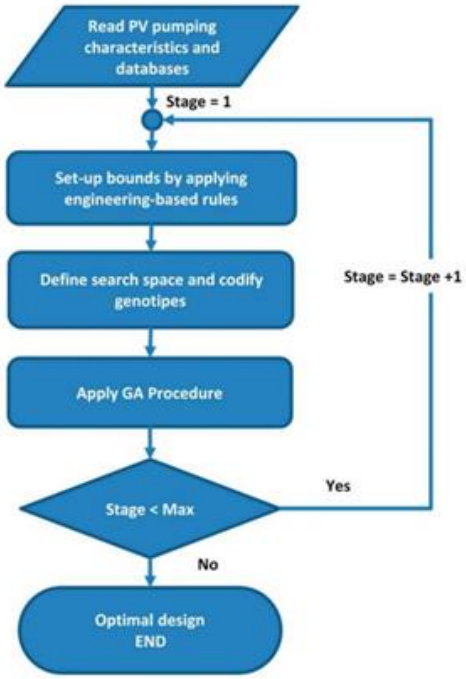


Figure 3. Flow chart of the model BPV-GENOME (Bounded Photovoltaic irrigation-GENOME).

The model BPV-GENOME is composed of several modules: An input/output module, a GA module, a PV pumping simulation model and a bounding module. The model was programmed in the EXCEL© spreadsheet platform using the VBA programming language. The input module reads the general input data of the problem and the specific databases, i.e., the pipe database and the pump database. These databases are stored in EXCEL© sheets. These databases contain the basic characteristics of the pipe and pump series and their as sociated costs. The output module writes the final solution found by the model (optimal combination of pipe diameter, pump unit, storage capacity and PV peak power) and the best fitness function value for every generation in a results spreadsheet.

2.5. Case Study

A specific case study was used in order to test the methodology. This case study consisted in finding the optimal design of a PV irrigation system for an olive farm in Tabernas, in the province of Almería (Southeast of Spain). A description of the area and the characteristics of the farm can be found in Zavala et al. [37].

The location of the PV plant is 37°06′ north latitude and 02°18′ west longitude and its elevation is 435 meters above sea level. A fixed PV frame was considered with a tilt angle of 20°, the azimuth is 0° and the albedo is 0.2. Conventional crystalline cells were used in this study. The peak power per module was 275 W and the cost of the PV plant was supposedly 0.5 €/PW.

The calculated irrigation water requirements are given in Table 2 for the whole farm.

Table 2. Input parameters for the genetic algorithm.

Month	Irrigation Requirements (m^3 day^{-1})
January	0.0
February	0.0
March	6.8
April	94.9
May	156.7
June	255.0
July	311.2
August	273.4
September	113.2
October	64.0
November	0.0
December	0.0

The water is pumped from a well to an elevated tank with a static head of 38 m. The total length of the pipe from the well to the tank is 420 m.

The pipe series is composed of 14 PVC pipes with different diameter sizes taken from a major manufacturer. The working pressure of the selected pipes was 10 at m. The relative roughness of the pipe was 0.0015 mm. The pipe database is supplied as a supplementary material.

The pump database is composed of 229 different pump units. This database includes submerged pumps of 4 and 6 inches. These pumps differ in the impeller type and the number of impellers per pump unit. This database was taken from an international pump manufacturer and it is also supplied as a supplementary material.

The overall efficiency of the system, comprising the pump, inverter and PV array efficiencies was considered equal to 0.5. In this research, a constant pump efficiency was assumed.

For the storage tank, a reservoir constructed of excavated natural earth and lined with a plastic sheet was considered. The cost function of this type of reservoir was obtained by fitting unitary cost data provided by an experienced consulting company (see Figure 4).

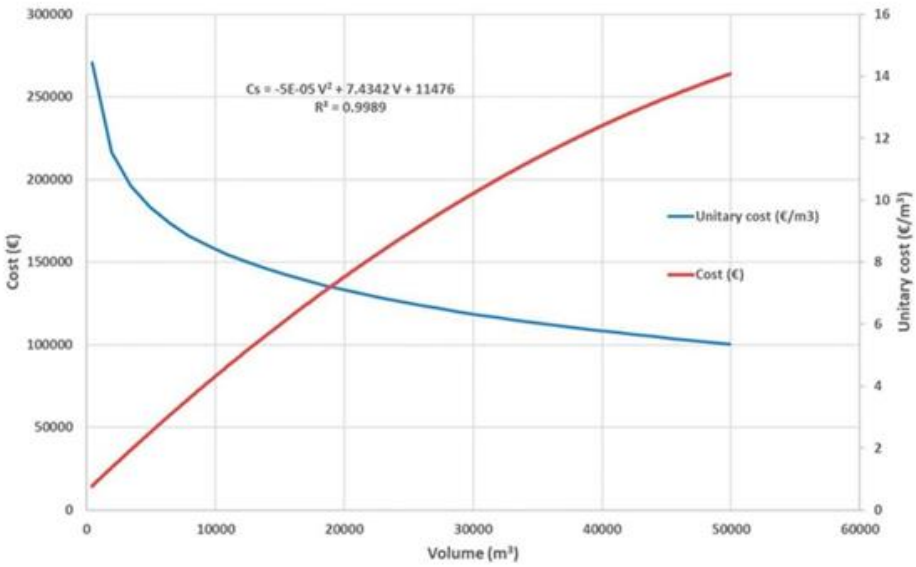


Figure 4. Cost of the storage reservoir.

3. Results

3.1. First Stage

3.1.1. Bounding Results

After applying the proposed bounding algorithm in this first stage to the optimal design of the case study, the following ranges of variables are obtained. The selected pipe series was reduced to a total of 11 admissible diameter pipes (out of 14 total diameters), ranging from a minimal inner diameter of 57 mm (PVC 63) to a maximum diameter of 290.8 mm (PVC 315). The series of admissible pumps was reduced to 161 pump units (out of 229). Regarding the capacity of the storage tank, the volume was discretized in 30 steps of 400 m^3, which represents the volume required to supply the irrigation amount of one day of operation during the peak period. The capacity ranged from a minimum of 400 m^3 to a maximum of 12,000 m^3 (volume needed for 30 days of operation). The number of PV modules was limited to 50 cases, ranging from 0 to 1050 PV modules with a step of 21 modules.

The chromosome of every individual is then composed of an array of four genes (four integer numbers). The first gene was codified by an integer number ranging from 1 to 11 (selected pipe diameter series); the second one from 1 to 161 (selected pump series); the third one ranged from 1 to 30 (volume steps) and the last one from 1 to 50 (number of PV arrays steps). The limited search space had a total size of 2,656,500 combinations.

3.1.2. Fitness Function

The GA analysis performed in this first stage yielded the results shown in Figure 5 and Table 3. Figure 5 shows the evolution of the fitness function for ten iterative simulations. Convergence was quickly reached and the optimal fitness function value (optimal cost) ranged from a minim value of 34,142.2 € to a maximum of 41,731.7 €. The average minimum cost in the ten runs was 36,726.3 € with a coefficient of variation of 5.2%.

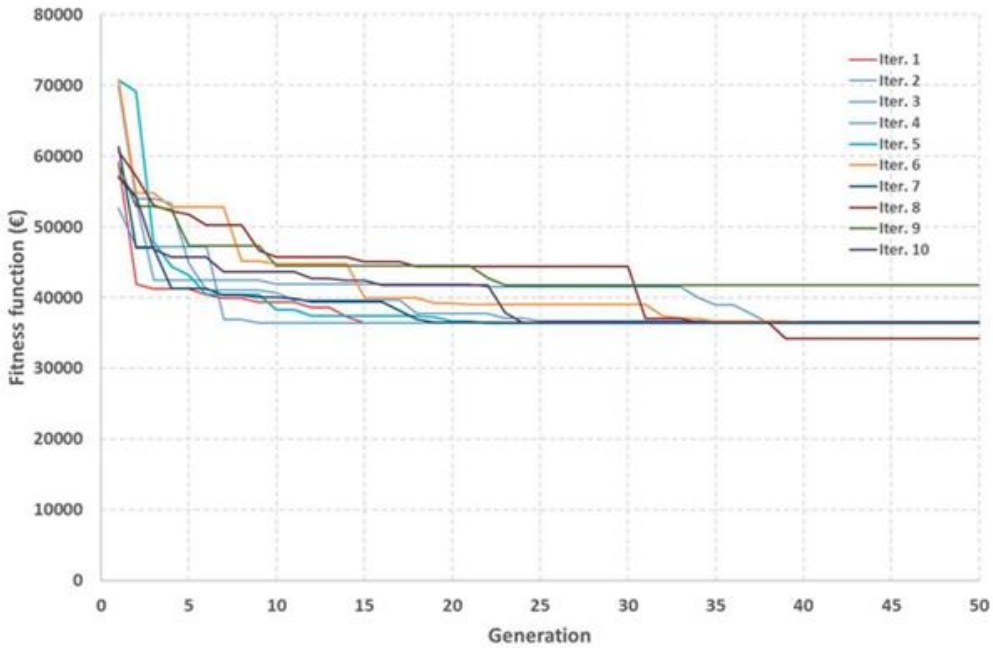


Figure 5. Evolution of the fitness function during the first stage for ten iterative runs.

3.1.3. First Stage Results

The diameter of the pipe that appeared most frequently was 101.6 (8 out of 10 times). The type of pump varied among the iterations. Pumps 123 and 125 were chosen three times and other ones were selected once or twice at most, meaning the choice of pump is a sensitive variable. The number of PV modules ranged from 42 (11.55 kWp) to 105 (28.87 kWp). The number of modules that were most repeated (seven times out of ten) was 63 (17.32 kWp). The storage capacity was always 800 m^3, which is close to the minimum storage capacity.

Table 3. Solutions provided for the model in the first stage and for ten successive runs.

Design Variable	Iteration									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D (mm)	101.6	101.6	101.6	101.6	101.6	101.6	101.6	101.6	101.6	101.6
Peak power (kWp)	17.32	17.32	17.32	17.32	17.32	17.32	17.32	11.55	28.87	28.87
N° Modules	63	63	63	63	63	63	63	42	105	105
Volume (m^3)	800	800	800	800	800	800	800	800	800	800
Pump ID.	75	123	123	76	123	125	75	125	70	125

3.2. Second and Last Stage

3.2.1. Bounding Results

A second stage was performed to improve the accuracy and resolution of the solution. The series of pipe diameters and pumps were not modified in this stage. Regarding the storage volume, the variable was discretized in 50 possible values, starting from 400 and continuing to 1400 m^3 with a step of 20 m^3. The center of this interval coincides with the solution provided in the first stage (800 m^3). Applying a similar procedure, the number of modules varied from 40 to 140 with a step of two modules.

3.2.2. Fitness Function

The GA analysis performed in this stage yielded the results shown in Figure 6 and Table 4. Figure 6 shows the evolution of the fitness function for the ten iterative simulations. Convergence was reached fast after the 50 generations. The optimal fitness function value (optimal cost) ranged from a minim value of 30,994.5 € (almost 10% lower than in the first stage) to a maximum of 32,830.5 €. The average minimum cost in the ten runs was 31,773.8 € (an improvement of almost 14% of the first stage) with a coefficient of variation of only 2%. Considerable cost reductions were achieved in performing this second stage.

3.2.3. Second Stage Results

As expected, the optimal diameter of the pipe was 101.6 mm, precisely as in the first stage. The type of pump varied among iterations. Pump 123 was chosen three times; 167 and 125, twice; and pumps 166, 124 and 126, once. Thus, the choice of pump is a more sensitive variable. The number of PV modules ranges from 42 to 52. The number of modules that were selected more times (four out of ten) was 42 (11.55 kWp). The storage capacity ranged from 420 m^3 to 460 m^3, although the most common capacity was 420 (6 out of ten).

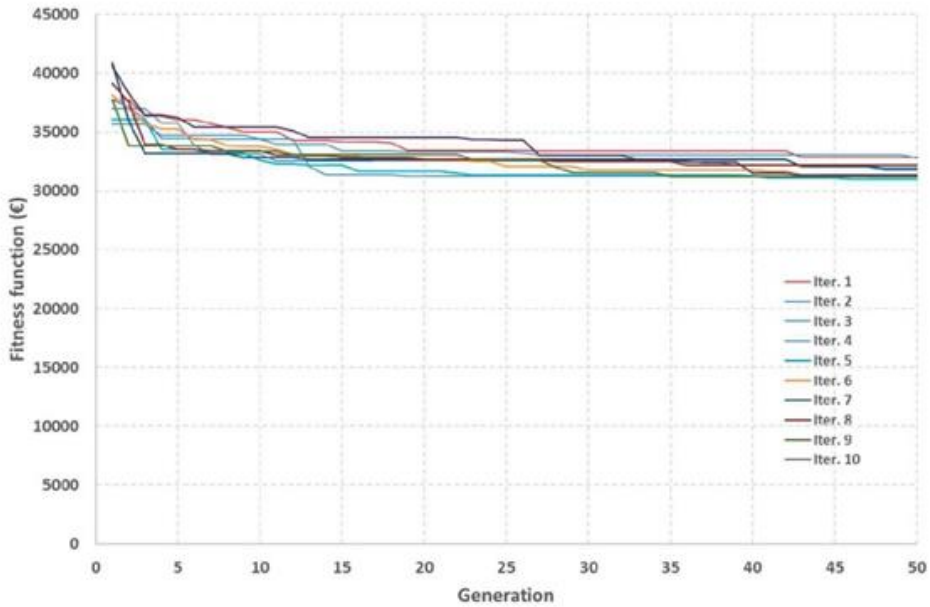


Figure 6. Evolution of the fitness function during the first stage for ten iterative runs.

Table 4. Solutions provided for the model in the first stage and for ten successive runs.

Design Variable	Iteration									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D (mm)	101.6	101.6	101.6	101.6	101.6	101.6	101.6	101.6	101.6	101.6
Peak power (kWp)	14.30	12.65	11.55	12.65	11.55	11.55	13.20	12.10	12.65	11.55
Nº Modules	52	46	42	46	42	42	48	44	46	42
Volume (m^3)	420	420	440	460	420	420	460	420	420	420
Pump ID.	166	123	126	167	124	125	123	167	123	125

3.3. Final Optimal Design

Due to the stability and sufficiently high resolution of the solutions found in the second stage, a third stage was considered unnecessary. The optimal design of the system was that which provided the minimum cost in the second stage (see Table 5).

The proposed methodology was able to provide a much faster and accurate convergence to the optimum because of the considerable reduction of the search space achieved.

It is relevant to note that in the minimum cost solution found, the storage volume tends to be close to the minimum because, as the storage capacity increases, the raise in the cost of the tank exceeds the reduction in the pumping and PV costs. However, this low storage capacity causes much of the PV energy to be wasted, thereby yielding a lower Energy Use Efficiency (EUE). In the following section, a more in-depth analysis of the resulting EUE is conducted and appropriate measures for improving this energy efficiency are proposed.

Table 5. Solutions provided for the model in the first stage and for ten successive runs.

Design Variable	Optimal Design
Delivery pipe	D_i = 101.6 mm (PVC 110)
PV plant	Peak power = 11,550 W (42 modules)
Tank	Volume = 420 m^3
Pump type	6BHE(L) * 32 series.6 impellers

Note: * 6BHE(L) stands for 6″ BOREHOLE CENTRIFUGAL PUMPS.

3.4. Energy Use Efficiency (EUE)

With the aim of evaluating the performance of the system from an environmental standpoint, an efficiency index was calculated. The energy use efficiency (EUE) index is defined as the fraction of the maximum energy potentially generated by the PV system that is effectively used (see Equation (14)). The effectively used energy is computed as the potential energy gained by the water pumped to the tank.

Higher values of EUE implies a more efficient use of the solar energy. Energy losses include the energy potentially produced but not instantaneously consumed, energy losses in the motor, inverter and pump and in the delivery pipe.

$$EUE = \frac{E_P}{E_{PV}} \tag{14}$$

where: E_P is the energy effectively used to pump water to the tank (kWh), E_{PV} is the total energy produced by the PV system (kWh), calculated by the model as described in Section 2.2.1. E_P can be calculated by applying Equation (15).

$$E_P = \frac{\gamma \cdot H \cdot V_P}{3600000} \tag{15}$$

where: V_P is the total volume of water pumped (m^3) and H is the pumping head (m).

The volume of water pumped for the optimal solution was 39,484.9 m^3. The increase in the water level between the well and the tank was 38 m. The increasing of the potential energy of the water accumulated in the tank (net energy received by the water) was 4088.660063 kWh. The potential energy produced by the PV plant as a function of the irradiance was 21,657.46 kWh. The resulting EUE for the minimum cost design was thus 18.88%. These results are similar to those found by Zavala et al. [37] for a direct pumping system without storage.

As discussed before, EUE is low, which implies that much of the potential PV energy is wasted because the tank is often full due to low storage capacity. The EUE could be increased if the storage capacity were increased. To illustrate this scenario, we simulated the system performance for increased values of storage capacity. For each storage value, we determined the minimum required peak power of the PV plant and the EUE was then calculated. Figure 7 depicts these relationships. It can be seen that as the storage volume increases from 420 m^3 (economically optimal design), the peak power of the PV plant decreases and the EUE rises. To illustrate this effect, for a storage capacity of 10,000 m^3, the peak power of the plant reduces almost half its value for 420 m^3 and EUE increases up to 40%.

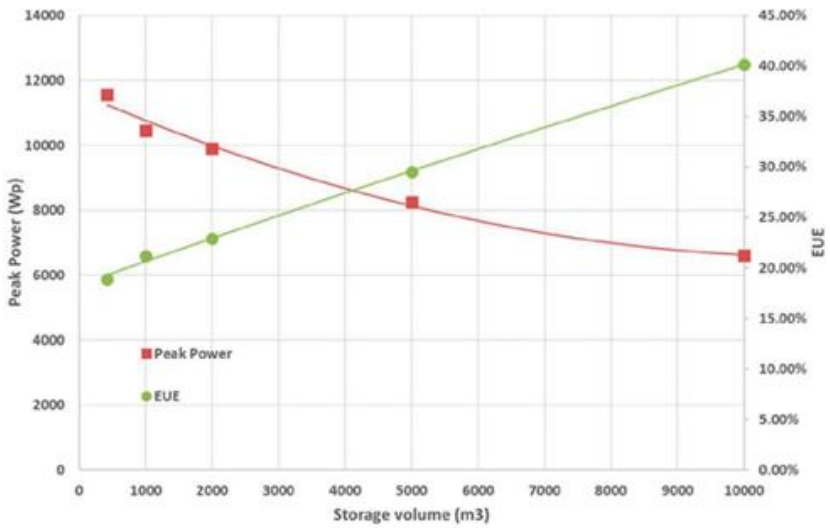


Figure 7. Required minimum peak power of the PV plant and resulting Energy Use Efficiency (EUE) for increased values of tank storage capacity.

According to these results, minimizing the system cost should not be the only objective to optimize the performance of the system, increasing the EUE should be considered as well. A multiobjective optimization approach with two objectives, i.e., minimizing cost and maximizing EUE, is strongly recommended for future research in order to obtain balanced designs with the optimal trade-off between efficiency and cost.

4. Conclusions

In this study, a new heuristic method based on a hybrid approach and a search space reduction has been developed and adapted to the optimal design of stand-alone PV irrigation pumping to a storage tank. The proposed approach is based on iteratively bounding the search space by applying engineering-based rules to the problem with the aim of reducing the number of possible scenarios to analyze and applying a genetic algorithm to the reduced search space. This methodology has been applied to find the optimal design of a benchmark PV irrigation system with storage for a real farm located in Tabernas in the province of Almería (Spain).

A considerable reduction of the search space was accomplished with the proposed methodology, which also provided a much faster and accurate convergence.

The total cost of the PV irrigation system was considerably reduced. This study proved that the most sensitive variables were the number of modules and the type of pump, whereas the diameter of the pipe and volume of the storage tank remained more stable.

It has been proven that minimizing the system cost may result in low energy use efficiency (EUE). To overcome this situation, a multiobjective optimization approach considering two objectives, i.e., minimizing cost and maximizing EUE, is strongly recommended for future research in order to obtain balanced designs with the optimal trade-off between efficiency and cost.

Supplementary Materials: Supplementary materials contain the description of the proposed case study with the aim of providing a benchmark system to test and enable comparison with other methods applied to the optimal design of a Photovoltaic irrigation system with storage. Supplementary materials are composed of a single Excel workbook containing the pump and pipe databases used in this research along with the storage cost function. The following are available online at http://www.mdpi.com/2071-1050/12/3/1026/s1.

Author Contributions: Investigation, data curation J.M. and J.I.M.; formal analysis, data curation, writing—original draft preparation, J.R. and R.L.-L.; formal analysis, validation, methodology, J.R.; R.L.-L.; J.M. and J.I.M. conceptualization, writing—review and editing, project administration, J.R. and R.L.-L. All authors have read and agreed to the published version of the manuscript.

Funding: This research was funded by the Spanish Ministry for Science, Innovation and Universities program RETOS INVESTIGACIÓN under the project RIDESOST (AGL2017-85857-C2-1-R).

Acknowledgments: We want to acknowledge the supporters of this research.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

References

1. Yahyaoui, I.; Chaabene, M.; Tadeo, F. Energy Management for Photovoltaic Irrigation with a Battery Bank. *Int. J. Energy Optim. Eng.* **2015**, *4*, 18–32. [CrossRef]
2. Posadillo, R.; López Luque, R. A sizing method for stand-alone PV installations with variable demand. *Renew. Energy* **2008**, *33*, 1049–1055. [CrossRef]
3. Yahyaoui, I.; Yahyaoui, A.; Chaabene, M.; Tadeo, F. Energy management for a stand-alone photovoltaic-wind system suitable for rural electrification. *Sustain. Cities Soc.* **2016**, *25*, 90–101. [CrossRef]
4. Glasnovic, Z.; Margeta, J. A model for optimal sizing of photovoltaic irrigation water pumping systems. *Sol. Energy* **2007**, *81*, 904–916. [CrossRef]
5. Campana, P.E.; Li, H.; Yan, J. Dynamic modelling of a PV pumping system with special consideration on water demand. *Appl. Energy* **2013**, *112*, 635–645. [CrossRef]
6. Gao, X.; Liu, J.; Zhang, J.; Yan, J.; Bao, S.; Xu, H.; Qin, T. Feasibility evaluation of solar photovoltaic pumping irrigation system based on analysis of dynamic variation of groundwater table. *Appl. Energy* **2013**, *105*, 182–193. [CrossRef]

According to these results, minimizing the system cost should not be the only objective to optimize the performance of the system, increasing the EUE should be considered as well. A multiobjective optimization approach with two objectives, i.e., minimizing cost and maximizing EUE, is strongly recommended for future research in order to obtain balanced designs with the optimal trade-off between efficiency and cost.

4. Conclusions

In this study, a new heuristic method based on a hybrid approach and a search space reduction has been developed and adapted to the optimal design of stand-alone PV irrigation pumping to a storage tank. The proposed approach is based on iteratively bounding the search space by applying engineering-based rules to the problem with the aim of reducing the number of possible scenarios to analyze and applying a genetic algorithm to the reduced search space. This methodology has been applied to find the optimal design of a benchmark PV irrigation system with storage for a real farm located in Tabernas in the province of Almería (Spain).

A considerable reduction of the search space was accomplished with the proposed methodology, which also provided a much faster and accurate convergence.

The total cost of the PV irrigation system was considerably reduced. This study proved that the most sensitive variables were the number of modules and the type of pump, whereas the diameter of the pipe and volume of the storage tank remained more stable.

It has been proven that minimizing the system cost may result in low energy use efficiency (EUE). To overcome this situation, a multiobjective optimization approach considering two objectives, i.e., minimizing cost and maximizing EUE, is strongly recommended for future research in order to obtain balanced designs with the optimal trade-off between efficiency and cost.

Supplementary Materials: Supplementary materials contain the description of the proposed case study with the aim of providing a benchmark system to test and enable comparison with other methods applied to the optimal design of a Photovoltaic irrigation system with storage. Supplementary materials are composed of a single Excel workbook containing the pump and pipe databases used in this research along with the storage cost function. The following are available online at http://www.mdpi.com/2071-1050/12/3/1026/s1.

Author Contributions: Investigation, data curation J.M. and J.I.M.; formal analysis, data curation, writing—original draft preparation, J.R. and R.L.-L.; formal analysis, validation, methodology, J.R.; R.L.-L.; J.M. and J.I.M. conceptualization, writing—review and editing, project administration, J.R. and R.L.-L. All authors have read and agreed to the published version of the manuscript.

Funding: This research was funded by the Spanish Ministry for Science, Innovation and Universities program RETOS INVESTIGACIÓN under the project RIDESOST (AGL2017-85857-C2-1-R).

Acknowledgments: We want to acknowledge the supporters of this research.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

References

1. Yahyaoui, I.; Chaabene, M.; Tadeo, F. Energy Management for Photovoltaic Irrigation with a Battery Bank. *Int. J. Energy Optim. Eng.* **2015**, *4*, 18–32. [CrossRef]
2. Posadillo, R.; López Luque, R. A sizing method for stand-alone PV installations with variable demand. *Renew. Energy* **2008**, *33*, 1049–1055. [CrossRef]
3. Yahyaoui, I.; Yahyaoui, A.; Chaabene, M.; Tadeo, F. Energy management for a stand-alone photovoltaic-wind system suitable for rural electrification. *Sustain. Cities Soc.* **2016**, *25*, 90–101. [CrossRef]
4. Glasnovic, Z.; Margeta, J. A model for optimal sizing of photovoltaic irrigation water pumping systems. *Sol. Energy* **2007**, *81*, 904–916. [CrossRef]
5. Campana, P.E.; Li, H.; Yan, J. Dynamic modelling of a PV pumping system with special consideration on water demand. *Appl. Energy* **2013**, *112*, 635–645. [CrossRef]
6. Gao, X.; Liu, J.; Zhang, J.; Yan, J.; Bao, S.; Xu, H.; Qin, T. Feasibility evaluation of solar photovoltaic pumping irrigation system based on analysis of dynamic variation of groundwater table. *Appl. Energy* **2013**, *105*, 182–193. [CrossRef]

7. López-Luque, R.; Reca, J.; Martínez, J. Optimal design of a standalone direct pumping photovoltaic system for deficit irrigation of olive orchards. *Appl. Energy* **2015**, *149*, 13–23. [CrossRef]
8. Reca, J.; Torrente, C.; López-Luque, R.; Martínez, J. Feasibility analysis of a standalone direct pumping photovoltaic system for irrigation in Mediterranean greenhouses. *Renew. Energy* **2016**, *85*, 1143–1154. [CrossRef]
9. Mérida, A.; Fernández, I.; Camacho, E.; Montesinos, P.; Rodríguez, J.A. Coupling irrigation scheduling with solar energy production in a smart irrigation management system. *J. Clean. Prod.* **2018**, *175*, 670–682. [CrossRef]
10. López-Luque, R.; Martínez, J.; Reca, J.; Ruiz, R. Análisis de viabilidad y gestión del riego en invernaderos mediterráneos con energía solar fotovoltaica. *Ribagua* **2017**, 74–83. [CrossRef]
11. Hamidat, A.; Benyoucef, B. Systematic procedures for sizing photovoltaic pumping system, using water tank storage. *Energy Policy* **2009**, *37*, 1489–1501. [CrossRef]
12. Reca, J.; García-Manzano, A.; Martínez, J. Optimal pumping scheduling model considering reservoir evaporation. *Agric. Water Manag.* **2015**, *148*, 250–257. [CrossRef]
13. Yahyaoui, I.; Tadeo, F.; Segatto, M.V. Energy and water management for drip-irrigation of tomatoes in a semi-arid district. *Agric. Water Manag.* **2017**, *183*, 4–15. [CrossRef]
14. Campana, P.E.; Li, H.; Zhang, J.; Zhang, R.; Liu, J.; Yan, J. Economic optimization of photovoltaic water pumping systems for irrigation. *Energy Convers. Manag.* **2015**, *95*, 32–41. [CrossRef]
15. Bouzidi, B. New sizing method of PV water pumping systems. *Sustain. Energy Technol. Assess.* **2013**, *4*, 1–10. [CrossRef]
16. Maleki, A.; Askarzadeh, A. Artificial bee swarm optimization for optimum sizing of a stand-alone PV/WT/FC hybrid system considering LPSP concept. *Sol. Energy* **2014**, *107*, 227–235. [CrossRef]
17. Maleki, A.; Pourfayaz, F. Optimal sizing of autonomous hybrid photovoltaic/wind/battery power system with LPSP technology by using evolutionary algorithms. *Sol. Energy* **2015**, *115*, 471–483. [CrossRef]
18. Holland, J.H. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*; MIT Press: Cambridge, MA, USA, 1975.
19. Maleki, A.; Ameri, M.; Keynia, F. Scrutiny of multifarious particle swarm optimization for finding the optimal size of a PV/wind/battery hybrid system. *Renew. Energy* **2015**, *80*, 552–563. [CrossRef]
20. Sanchez, V.M.; Chavez-Ramirez, A.U.; Duron-Torres, S.M.; Hernandez, J.; Arriaga, L.G.; Ramirez, J.M. Techno-economical optimization based on swarm intelligence algorithm for a stand-alone wind-photovoltaic-hydrogen power system at south-east region of Mexico. *Int. J. Hydrogen Energy* **2014**, *39*, 16646–16655. [CrossRef]
21. Bakelli, Y.; Kaabeche, A. Optimal size of photovoltaic pumping system using nature-inspired algorithms. *Int. Trans. Electr. Energy Sys.* **2019**, *29*, e12045. [CrossRef]
22. Olcan, C. Multi-objective analytical model for optimal sizing of stand-alone photovoltaic water pumping systems. *Energy Convers. Manag.* **2015**, *100*, 358–369. [CrossRef]
23. El-Shimy, M. Sizing optimisation of stand-alone photovoltaic generators for irrigation water pumping systems. *Int. J. Sustain. Energy* **2013**, *32*, 333–350. [CrossRef]
24. Dufo-López, R.; Bernal-Agustín, J.L. Design and control strategies of PV-Diesel systems using genetic algorithms. *Sol. Energy* **2005**, *79*, 33–46. [CrossRef]
25. Carroquino, J.; Dufo-López, R.; Bernal-Agustín, J.L. Sizing of off-grid renewable energy systems for drip irrigation in Mediterranean crops. *Renew. Energy* **2015**, *76*, 566–574. [CrossRef]
26. Ma, T.; Yang, H.; Lu, L.; Peng, J. An Optimization Sizing Model for Solar Photovoltaic Power Generation System with Pumped Storage. *Energy Procedia* **2014**, *61*, 5–8. [CrossRef]
27. Mérida García, A.; González Perea, R.; Camacho Poyato, E.; Montesinos Barrios, P.; Rodríguez Díaz, J.A. Comprehensive sizing methodology of smart photovoltaic irrigation systems. *Agric. Water Manag.* **2020**, *229*, 105888. [CrossRef]
28. Reca, J.; Martínez, J.; López, R. A Hybrid Water Distribution Networks Design Optimization Method Based on a Search Space Reduction Approach and a Genetic Algorithm. *Water* **2017**, *9*, 845. [CrossRef]
29. Duffie, J.A.; Beckman, W.A. *Solar Engineering of Thermal Process*, 3rd ed.; John Wiley & Sons: Hoboken, NJ, USA, 2006.
30. Collares-Pereira, M.; Rabl, A. The average distribution of solar radiation-correlations between diffuse and hemispherical and between daily and hourly insolation values. *Sol. Energy* **1979**, *22*, 155–164. [CrossRef]

31. Reca, J.; López, R. Chapter 9—Design Principles of Photovoltaic Irrigation Systems. In *Advances in Renewable Energies and Power Technologies*; Yahyaoui, I., Ed.; Elsevier Science: Amsterdam, The Netherlands, 2018; pp. 295–333. [CrossRef]
32. Bhave, P.R. *Analysis of Flow in Water Distribution Networks*; Technomic Publishing Co. Inc.: Lancaster, Basel, Switzerland, 1991.
33. Allen, R.G.; Pereira, L.S.; Raes, D.; Smith, M. *Crop evapotranspiration-Guidelines for Computing Crop Water Requirements*; FAO Irrigation and Drainage Paper 56; Food and Agriculture Organization of the United Nations: Rome, Italy, 1998.
34. Dastane, N.G. *Effective Rainfall in Irrigated Agriculture*; FAO Irrigation and Drainage Paper 25; Food and Agriculture Organization of the United Nations: Rome, Italy, 1976.
35. Reca, J.; Martínez, J. Genetic algorithms for the design of looped irrigation water distribution networks. *Water Resour. Res.* **2006**, *42*, W05416. [CrossRef]
36. Wu, Z.Y.; Walski, T. Self-Adaptive Penalty Approach Compared with Other Constraint-Handling Techniques for Pipeline Optimization. *J. Water Resour. Plan. Manag.* **2005**, *131*, 181–192. [CrossRef]
37. Zavala, V.; López-Luque, R.; Reca, J.; Martínez, J.; Lao, M.T. Optimal management of a multisector standalone direct pumping photovoltaic irrigation system. *Appl. Energy* **2020**, *260*, 114261. [CrossRef]